TERCERA EDICIÓN

MÁQUINAS ELÉCTRICAS Y TRANSFORMADORES

Bhag S. Guru
Hüseyin R. Hiziroğlu

Alfaomega
OXFORD

Máquinas eléctricas y transformadores

Tercera edición

Bhag S. Guru
Hüseyin R. Hiziroğlu

Traducción
Javier Enríquez Brito

Revisión técnica
Daniel Díaz del Castillo





UNIVERSITY PRESS

Antonio Caso 142, San Rafael,
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06470, México, D.F.
Tel.: 5592 4277, Fax: 5705 3738, e-mail: oxford@oupmex.com.mx

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford.
Promueve el objetivo de la Universidad relativo a la excelencia en la investigación, erudición
y educación mediante publicaciones en todo el mundo en

Oxford New York
Auckland Cape Town Dar es Salaam Hong Kong
Karachi Kuala Lumpur Madrid Melbourne Mexico City
Nairobi New Delhi Shanghai Taipei Toronto

Con oficinas en
Argentina Austria Brazil Chile Czech Republic France Greece
Guatemala Hungary Italy Japan Poland Portugal Singapore South Korea
Switzerland Thailand Turkey Ukraine Vietnam

Publicado en México por Oxford University Press México, S.A. de C.V.

División: Ciencia y Tecnología
Área: Ingeniería

Sponsor editor: Diana Servín Chávez
Edición: Ester Alizeri Fernández
Sergio Gerardo López Hernández
Producción: Jorge A. Martínez Jiménez
Paula Sosa Jiménez

MÁQUINAS ELÉCTRICAS Y TRANSFORMADORES

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana, registro número 723.

ISBN 978-970-613-673-2

ISBN 970-613-673-8

Traducido de la tercera edición en inglés de
ELECTRIC MACHINERY AND TRANSFORMERS

ISBN 0-19-513890-2

This translation of *Electric Machinery and Transformers*, Third edition, originally published in English in 2002,
is published by arrangement with Oxford University Press, Inc.

Esta edición en español de *Electric Machinery and Transformers*, Third edition, publicada originalmente en inglés en 2002,
se tradujo con autorización de Oxford University Press, Inc.

Alfaomega Grupo Editor es distribuidor exclusivo para todos los países de habla hispana
de esta coedición realizada entre Oxford University Press México, S.A. de C.V.
y Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.

ISBN 978-970-15-1212-8

ISBN 970-15-1212-X

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.
Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México, D.F.

Impreso en México
Primera reimpresión: Diciembre de 2006

En la composición de esta obra, realizada en
Servicios Editoriales Gráficos, S.A. de C.V.,
se usaron los tipos ITC Garamond (11, 12.5, 18 y 60 pts.),
Palatino (10/12, 9/11 y 8/10 pts.), Mathematical pi (10/12 pts.),
Symbol pro (10/12 pts.), York Chemistry (10/12 pts.) y Zas bats (10/12 pts.).
Se terminó de imprimir en diciembre de 2006 en
Acabados Editoriales Incorporados, S.A. de C.V.,
Calle de Arroz Núm. 226, Col. Santa Isabel Industrial, 09820, México, D.F.
sobre papel Bond Editor Alta Opacidad de 75 g.

El tiraje fue de 2,000 ejemplares.

A nuestros padres y familias

Índice de contenido



11 Dinámica de las máquinas eléctricas 614

12 Máquinas eléctricas de propósito especial 658

Apéndices

Prefacio

Escribimos esta obra para estudiantes de los niveles básico y avanzado de los cursos sobre máquinas eléctricas. Con base en muchos años de experiencia docente, este libro ofrece flexibilidad máxima sin perder la continuidad entre un tema y otro. Sentimos que tal enfoque permite al instructor adaptar sin problemas el material de modo que satisfaga las exigencias de un curso sobre máquinas eléctricas. En las instituciones donde rige un calendario cuatrimestral y sólo se ofrece un curso sobre máquinas eléctricas, lo recomendable es que se concentren en los fundamentos y administren el tiempo destinado a los temas avanzados.

El libro se centra en la operación básica de cada máquina y tiende a minimizar lo que no es esencial. El material que se presenta en cada capítulo pasa de los principios establecidos a los temas avanzados. En la segunda edición incluimos un gran número de preguntas de repaso al final de cada capítulo. Como los estudiantes apreciaron mucho la adición de ese tipo de preguntas, dejamos intactas esas secciones en la tercera edición. Para corregir las deficiencias percibidas o para aclarar más los conceptos se agregó material a partir de los comentarios vertidos por los estudiantes, otros instructores y revisores. También se cambiaron algunos ejemplos a fin de complementar el desarrollo teórico que precede a cada uno de ellos. Además, se revisaron algunos ejercicios al final de cada sección. Como expresamos en la segunda edición, se espera que estos ejercicios alimenten la confianza y faciliten la comprensión del material expuesto en cada sección. Asimismo, revisamos los problemas del final de cada capítulo y los ordenamos para ofrecer a los estudiantes un amplio repertorio de desafíos. Estos problemas deben tratarse como parte integral del proceso de aprendizaje y el alumno debe usar el razonamiento intuitivo para resolverlos.

Algunos de los problemas que se presentan en la obra requieren la solución de ecuaciones no lineales; sugerimos que se estimule al estudiante a hallar la solución por medio de paquetes de software como MathCAD®. Nosotros usamos ese programa para resolver casi todos los ejemplos del libro. Estimulamos el uso de software porque disminuye los cálculos rutinarios, permite que el alumno haga pruebas adicionales en la complejidad de una máquina y le ayuda a centrarse en preguntas del tipo "qué pasaría si...".

Nuestra filosofía básica al escribir la tercera edición no ha cambiado. Como antes, creemos que un tratamiento superficial del tema basado únicamente en enunciar hechos conduciría a la memorización de ecuaciones que pronto caerían en el olvido. Con objeto de motivar al estudiante, debemos presentar el material en un orden sistemático. En otras palabras, al enseñar máquinas eléctricas nuestros objetivos son:

- Explicar la construcción física de una máquina.
- Arrojar luz sobre sus devanados y dónde se encuentran.
- Describir las leyes fundamentales que rigen su operación.
- Justificar los supuestos indispensables para desarrollar la teoría relevante.
- Hacer hincapié en sus limitaciones.

Una vez que los estudiantes entienden con claridad una máquina, debemos desarrollar las ecuaciones necesarias usando las menos leyes fundamentales posibles. Cada ecuación debe situarse en la perspectiva adecuada asociándola con el desempeño de la máquina. Cuando se explican en forma apropiada los principios de una máquina y se desarrollan las ecuaciones correspondientes a partir de las leyes básicas, el estudiante aprende a:

- Apreciar el desarrollo teórico.
- Reducir su temor.
- Comprender el poder del razonamiento.

El resultado final de un proceso de enseñanza tal es que en adelante el estudiante no vacilará en abordar con confianza problemas aún más difíciles. Hemos hecho nuestro mejor esfuerzo para incorporar esta filosofía en el texto.

Nuestra experiencia nos dice que los estudiantes tienden a ver el desarrollo teórico como una abstracción y se concentran en algunas ecuaciones, que de ese modo se convierten en *fórmulas* para ellos. A fin de que los estudiantes aprecien la teoría, es responsabilidad del instructor demostrar que ésta puede aplicarse para resolver problemas prácticos en distintas condiciones. Para alcanzar esta meta, el instructor debe centrarse en su experiencia en la materia y resaltar otras áreas de aplicación de vez en vez, lo cual supone necesariamente destacar cualquier avance en el área al momento de explicar los fundamentos. Por ejemplo, al exponer la fuerza magnética entre dos conductores que portan corriente, el instructor debe llevar la atención a los vehículos basados en la levitación magnética.

Al escribir esta obra supusimos que el estudiante tiene una formación sólida en los campos de las ecuaciones diferenciales lineales, el análisis de circuitos eléctricos de corriente continua y alterna (monofásicos y trifásicos) y en la transformada de Laplace y sus aplicaciones, así como en la teoría electromagnética del campo.

Los capítulos 1 y 2 se escribieron para repasar los conceptos importantes de los circuitos eléctricos y los campos electromagnéticos. El capítulo 1 se amplió para incluir el análisis de la medición de la potencia monofásica y trifásica. La presentación de los circuitos magnéticos, en el capítulo 2, se ha detallado para asegurar que el estudiante comprenda los efectos que tiene la saturación de los materiales magnéticos en el desempeño de una máquina. El comportamiento no lineal de los

materiales magnéticos debido a la saturación es, en efecto, una verdadera bendición para la operación estable de los generadores de corriente continua (cc).

El capítulo 3 es el corazón del libro, ya que en él se exponen los principios de la conversión de la energía de una forma a otra. Por tanto, incluye información sobre:

- El análisis de bobinas acopladas magnéticamente, necesario para la operación de transformadores.
- La fuerza electromotriz (fem) inducida en una bobina que gira en un campo magnético uniforme, vital para la operación de máquinas de cc.
- La fem inducida en una bobina que gira en un campo magnético que varía con el tiempo, esencial para operar máquinas de corriente alterna (ca).
- El concepto de campo giratorio, crucial para la operación de máquinas síncronas y de inducción.

En el capítulo 4 se describen los principios de operación de los transformadores monofásicos y trifásicos y de autotransformadores; se explican los tipos de pérdidas que ocurren en los trasformadores y las medidas que deben adoptarse para reducirlas al mínimo y lograr óptima operación. La exposición en este capítulo incluye diagramas de los devanados en distintas conexiones de los transformadores trifásicos, la representación del circuito equivalente de cada conexión de un autotransformador y el análisis exacto de los autotransformadores.

Nuestra experiencia en la enseñanza de máquinas eléctricas indica que la operación de motores y generadores debe explicarse por separado en aras de evitar confusiones. Por ello, los capítulos 5 y 6 se dedican al estudio de generadores y motores de cc, respectivamente. En los capítulos 7 y 8 se presenta información acerca de generadores y motores síncronos. Además de explicar la construcción, operación, características externas y determinación de parámetros de estas máquinas, hemos incluido información sobre cómo se construyen, lo cual permitirá al estudiante visualizar la colocación de las bobinas y sus interconexiones, así como el número de trayectorias paralelas para la distribución de corriente en la máquina.

En el capítulo 9 se explica la construcción y operación de los motores de inducción trifásica. Se hace hincapié en los criterios para lograr la eficiencia, la potencia y el par máximos. En ese capítulo también se explica el efecto que tiene la resistencia del rotor en el desempeño de un motor y se proporcionan varias clasificaciones de motores de inducción.

Los motores monofásicos se estudian en el capítulo 10, donde se presentan los métodos para determinar el desempeño de los motores de inducción monofásicos. Asimismo, se dan explicaciones sobre la operación del motor de polos sombreados del motor universal.

El capítulo 11 prepara al estudiante para investigar el comportamiento dinámico de las máquinas. Se incluye un programa de cómputo que, basado en el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden, analiza numéricamente la dinámica de las máquinas. Como usamos la transformada de Laplace en nuestro análisis, en el apéndice B se incluye una tabla con las transformadas de las funciones más comunes, de modo que se disponga de una referencia rápida.

En el capítulo 12 se presentan varios temas, entre ellos los distintos tipos de motores de imanes permanentes, incluidos los motores de cc sin escobillas y los motores de reluctancia conmutada. También se incluye la teoría pertinente para analizar los motores de inducción lineales.

En esta obra se utiliza el Sistema Internacional (SI) de unidades, excepto para expresar la velocidad en revoluciones por minuto (rpm) y la potencia desarrollada por un motor en términos de caballos de fuerza (hp). Como el sistema inglés de unidades se emplea comúnmente en Estados Unidos de América, es precisa la conversión de las unidades de un sistema a otro, para lo cual se incluye el apéndice *A*.

Durante el curso el instructor debe adoptar su propia notación para la enseñanza, ya que en la mayor parte de los libros se usan caracteres en negritas para designar cantidades en términos de vectores y fasores. El problema se agudiza cuando los símbolos no se emplean en forma consistente. Esto provoca confusión en los estudiantes cuando tratan de correlacionar los apuntes de clase con los símbolos del texto. A fin de eliminar tales problemas, en este texto hemos adoptado un sistema de notación coherente. Se usan letras mayúsculas para cantidades de cc y para los valores medios cuadráticos (rms)* de las variables de ca. Se emplean letras minúsculas para los valores instantáneos de variables dependientes del tiempo. Para representar un vector, un fasor y una cantidad compleja hemos empleado una flecha (⟶), una tilde (˜) y una testa (^) encima de las letras que las designan, respectivamente.

Hemos procurado escribir y publicar un libro preciso. Utilizamos MathCAD® para resolver casi todos los ejemplos del texto y redondeamos los resultados de los cálculos para efectos de mostrarlos. Aun así, podría haber algunos errores numéricos en el libro. También es posible que algunas secciones precisen aclaraciones adicionales, mientras que otras podrían considerarse demasiado prolijas; por ello, son bienvenidos todos los comentarios y sugerencias. Los tendremos en cuenta para las revisiones futuras.

* rms: *root mean square*, valor medio cuadrático. La abreviatura rms se emplea normalmente en nuestro idioma, por lo que se utilizará como tal en el texto. (N. del R.T.).

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro sincero agradecimiento a todos los revisores que nos ayudaron en las distintas etapas de preparación del libro. Agradecemos a Magne-Tek Corporation, Consumers Energy Company, Toledo Commutator Company y Bodine Electric Company por habernos proporcionado diversas fotografías.

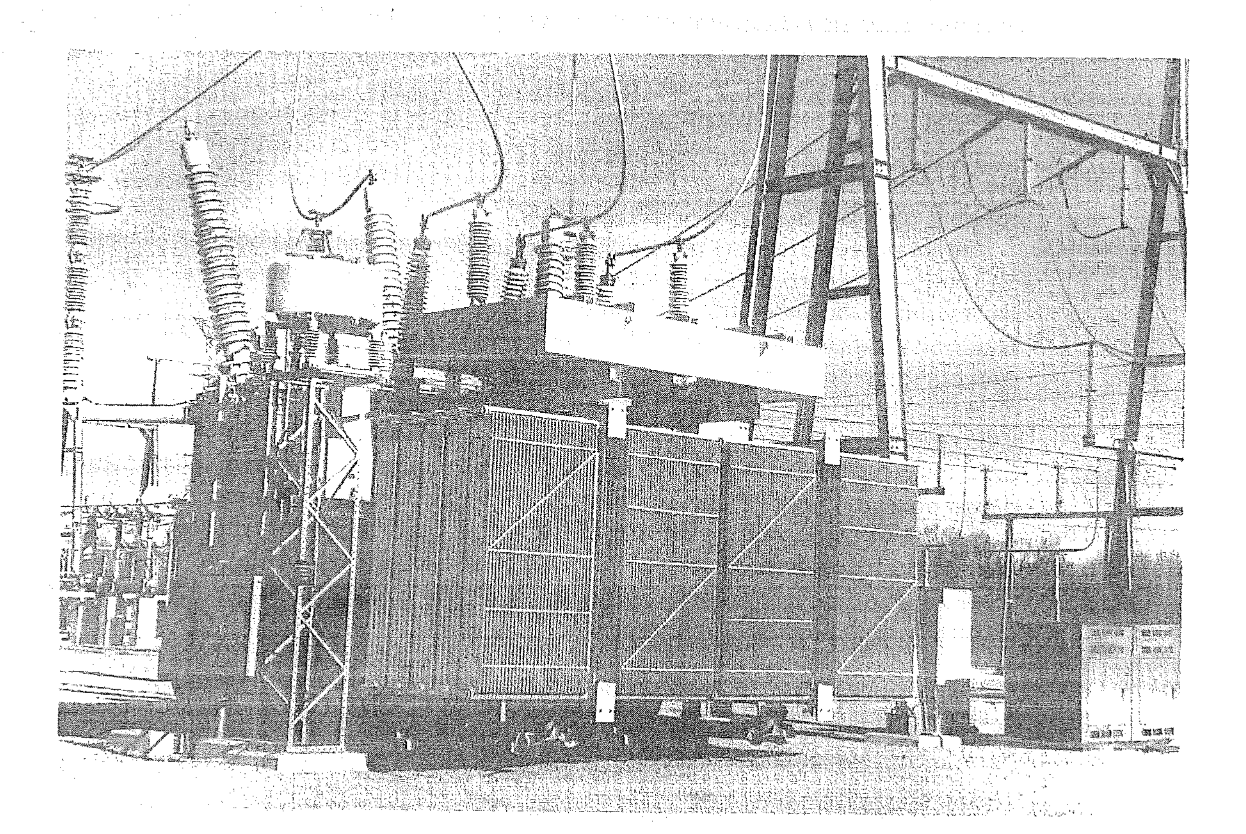
Finalmente, agradecemos a nuestras familias sus sacrificios honestos, estimulación activa, apoyo incondicional, comprensión absoluta y cooperación total durante la revisión del libro.

Bhag Singh Guru
Hüseyin R. Hiziroğlu

Máquinas eléctricas y transformadores

1

Repaso de la teoría de circuitos eléctricos



Transformador trifásico de alto voltaje. *(Cortesía de Consumers Power.)*

1.1. Introducción

Sin reserva ni exageración, puede decirse que la disponibilidad de energía en su forma de electricidad ha hecho nuestras vidas mucho más cómodas que en cualquier periodo anterior de la historia. En efecto, seguramente la sociedad encontraría muy difícil, si no imposible, realizar sus actividades si alguno de los aparatos que trabajan con electricidad le fuera retirado de súbito. Es irónico que la mayor parte de la energía disponible en forma eléctrica sea una conversión directa o indirecta de alguna otra forma de energía. Un ejemplo del proceso de conversión directa es la transformación de energía luminosa en energía eléctrica por medio de celdas solares.

Por su parte, en el proceso indirecto de conversión de energía pueden usarse recursos como petróleo, gas natural y carbón. Al quemar estos combustibles se genera calor, que entonces se utiliza para producir vapor en una caldera. El vapor impulsa las aspas de una turbina, la cual hace girar el rotor de un *generador eléctrico* que produce energía eléctrica. Por otro lado, la energía potencial del agua se convierte en energía mecánica por medio de una turbina en una planta hidroeléctrica. Por tanto, lo más importante en el proceso de conversión indirecta es la energía mecánica que debe suministrarse al rotor de un generador eléctrico. Este proceso también se conoce como *conversión electromecánica de energía,* pues se debe a la conversión de energía mecánica en energía eléctrica.

El objetivo principal de esta obra es analizar los principios fundamentales de la conversión de energía electromecánica. Otro objetivo es destacar que el proceso electromecánico de conversión de energía es reversible, lo cual significa que también es posible transformar energía eléctrica en mecánica por medio de un equipo conocido como *motor eléctrico*.

Se ha descubierto que tiene ventajas económicas generar la energía eléctrica en un punto central en niveles relativamente bajos de voltaje, transmitirla a distancia por medio de líneas de transmisión en niveles de voltaje comparativamente altos y luego distribuirla a los consumidores en niveles de voltaje otra vez bajos. La elevación del nivel del voltaje en el punto de generación y su disminución en el punto de consumo se lleva a cabo por medio de *transformadores elevadores* y *transformadores reductores,* respectivamente. Este cambio de voltaje tiene el propósito reducir las pérdidas eléctricas a lo largo de las líneas de transmisión. Aun cuando los transformadores no convierten la energía mecánica en eléctrica ni viceversa, su estudio es esencial porque tienen una función de suma relevancia en la transmisión y distribución de energía eléctrica.

El método de tratamiento adoptado para cada tipo de máquina eléctrica que se analiza en este libro es el siguiente:

a) Se analiza la construcción de la máquina.
b) Se explica cómo interactúan los campos electromagnéticos como un medio en el proceso de transferencia de energía.
c) Se representa la máquina por su circuito eléctrico equivalente.
d) Se determina su desempeño por medio de las leyes fundamentales de la teoría de circuitos eléctricos.

Es evidente que para entender las máquinas eléctricas debemos estudiar los campos electromagnéticos y ser capaces de analizar circuitos eléctricos. El propósito de este capítulo consiste en repasar algunas de las leyes básicas de los circuitos eléctricos. En el capítulo 2 se revisarán las leyes fundamentales de la teoría del campo electromagnético y sus aplicaciones. En este capítulo y en el siguiente sólo se brinda un repaso, pues se espera que el lector posea ciertos conocimientos de estos temas.

1.2. Análisis de circuitos de corriente continua

Las leyes fundamentales de la teoría de circuitos eléctricos son la ley de Ohm y las leyes de la corriente y del voltaje de Kirchhoff. Aunque todos los circuitos eléctricos pueden analizarse aplicando estas leyes, las ecuaciones resultantes se vuelven engorrosas a medida que crece la complejidad del circuito. Como usted sabe, otras técnicas de análisis de circuitos, como el método de nodo de voltaje y el de malla de corriente, permiten resolver con facilidad problemas complejos pero prácticos. Como veremos en los capítulos siguientes, a menudo se desea determinar la corriente, el voltaje y la potencia que se alimenta a cierta parte de una red, a lo que denominaremos *carga*. En este caso, el análisis se simplifica por medio del teorema de Thévenin.

Comenzaremos nuestro estudio recordando la ley de Ohm, las leyes de Kirchhoff, el teorema de Thévenin y el teorema de la máxima transferencia de potencia; después demostraremos cómo aplicarlos para encontrar corrientes, voltajes y potencia en un circuito eléctrico de corriente continua (cc).

Ley de Ohm

La ley de Ohm establece que la caída de voltaje a través de una resistencia es igual al producto de la corriente que la cruza por su resistencia. Es decir,

$$V = IR \tag{1.1}$$

donde V es la caída de voltaje a través de la resistencia R e I es la corriente que pasa por ella. Hemos usado las letras mayúsculas para denotar la corriente y el voltaje a fin de indicar que I y V son cantidades invariables en el tiempo en un circuito de cc. Tal convención concuerda con las que tal vez ya ha utilizado al estudiar circuitos eléctricos de cc.

Ley de la corriente de Kirchhoff

La suma algebraica de todas las corrientes en cualquier nodo de un circuito eléctrico es igual a cero. Es decir,

$$\sum_{m=1}^{n} I_m = 0 \tag{1.2}$$

donde n es el número de ramas que forman un nodo e I_m es la corriente en la m-ésima rama.

Ley del voltaje de Kirchhoff

La ley del voltaje de Kirchhoff establece que la suma *algebraica* de todos los voltajes implicados en una trayectoria cerrada de un circuito eléctrico es igual a cero. Es decir

$$\sum_{m=1}^{n} V_m = 0 \tag{1.3}$$

donde V_m es el voltaje a través de la m-ésima rama en una trayectoria cerrada que contiene n ramas.

El término *algebraica* nos advierte de prestar atención a las direcciones de las corrientes en un nodo y a las polaridades de los voltajes en un lazo cerrado. Para hacerlo, se siguen las convenciones estándar que se resumen a continuación.

1. Si las corrientes que entran en un nodo se consideran positivas, entonces las que salen del nodo son negativas.
2. Si se considera positiva la caída de potencial al atravesar un lazo cerrado, entonces el aumento de potencial es negativo.
3. Una fuente aporta energía al circuito si la corriente que pasa a través de él fluye de su terminal negativa hacia la positiva. Del mismo modo, una fuente absorbe energía (se comporta como un vertedero) si la dirección de la corriente a través de él fluye de su terminal positiva hacia la negativa.

Teorema de Thévenin

Cuando se observa desde dos nodos (terminales), un circuito lineal que contiene cualquier número de fuentes y elementos puede reemplazarse por una fuente de voltaje equivalente (también conocida como *voltaje de Thévenin*) V_T en serie con una resistencia equivalente R_T (también llamada *resistencia de Thévenin*), donde V_T es el voltaje de circuito abierto entre los dos nodos, y R_T es la relación entre el voltaje de circuito abierto y la corriente de cortocircuito. Si el circuito eléctrico sólo contiene fuentes independientes, R_T puede obtenerse observando las terminales con las fuentes de voltaje reemplazadas por cortocircuitos y las fuentes de corriente por circuitos abiertos. El voltaje de circuito abierto V_T se obtiene eliminando la carga y dejando las terminales abiertas.

Teorema de la máxima transferencia de potencia

El teorema de la máxima transferencia de potencia establece que en un circuito eléctrico de cc, la máxima transferencia de potencia ocurre cuando la resistencia de la carga es igual a la resistencia equivalente de Thévenin.

Ejemplo 1.1

Determine el valor de la resistencia de la carga R_L en la figura 1.1*a* para la máxima potencia transferida. ¿Cuál es la máxima potencia con que se alimenta a R_L?

- Solución

Primero se desconecta la resistencia de la carga R_L para determinar el voltaje de circuito abierto V_{ab}, como se indica en la figura 1.1*b*.

Al aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff (LVK) se obtiene

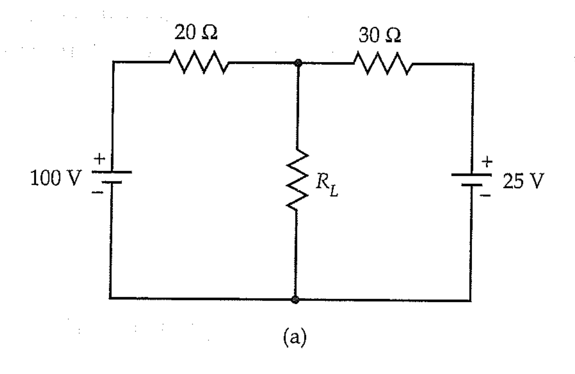
$$(20 + 30)\, I + 25 - 100 = 0$$

o

$$I = 1.5 \text{ A}$$

El voltaje de circuito abierto es

$$V_T = V_{ab} = 100 - 1.5 \times 20 = 70 \text{ V}$$



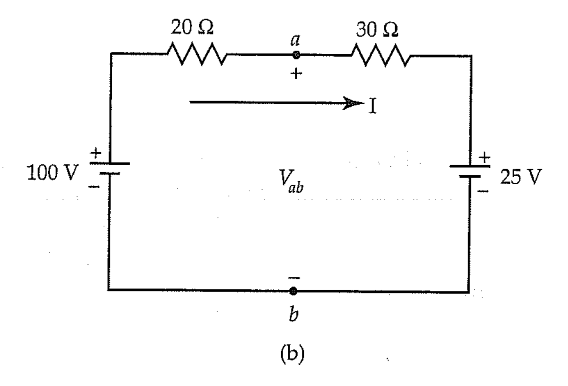


Figura 1.1. (a) Circuito para el ejemplo 1.1. **(b)** R_L para obtener V_{ab}.

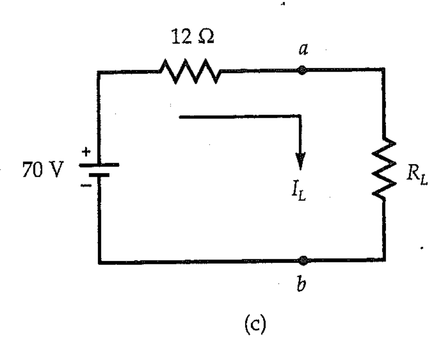


Figura 1.1. (c) Circuito equivalente de Thévenin.

Poniendo en cortocircuito las fuentes de voltaje independientes se obtiene la resistencia equivalente de Thévenin, que es

$$R_T = \frac{20 \times 30}{(20 + 30)} = 12\,\Omega$$

En la figura 1.1*c* se muestra la resistencia de la carga R_L conectada al circuito equivalente de Thévenin. Para la máxima potencia transferida, $R_L = R_T = 12\ \Omega$.

La corriente a través de la resistencia de la carga es

$$I_L = \frac{70}{24} = 2.917\ \text{A}$$

Finalmente, la máxima potencia transferida a la carga es

$$P_L = (2.917)^2 \times 12 = 102.8\ \text{W}$$

■

Ejercicios

1.1. Para el circuito de cc que se muestra en la figura E1.1 determine *a*) la corriente que fluye a través de cada elemento, utilizando el método malla de corriente; *b*) el voltaje en cada nodo con referencia al nodo *a* usando el método del nodo de voltaje; *c*) la potencia aportada por cada fuente, y *d*) la potencia disipada por cada resistencia.

1.2. Aplique el teorema de Thévenin para determinar la corriente que fluye por el circuito que se muestra en la figura E1.1, así como la potencia que disipa la resistencia de 15 Ω. ¿Qué resistencia debe colocarse, en serie o en paralelo con la resistencia de 15 ohms, de modo que la combinación reciba la potencia máxima?

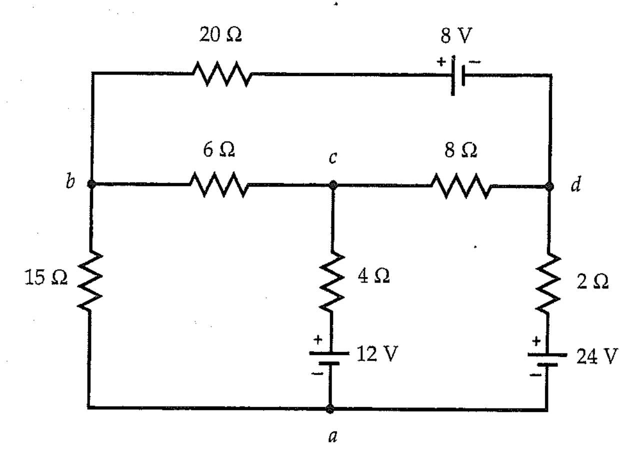


Figura E1.1. Circuito para el ejercicio 1.1.

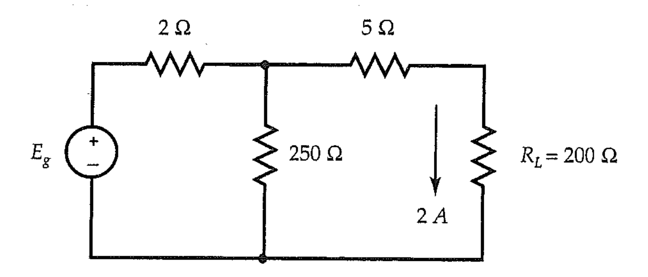


Figura E1.3. Circuito para el ejercicio 1.3.

1.3. En la figura E1.3 se muestra el circuito equivalente de un generador de cc que está conectado a una carga de 200 Ω. Determine E_g si la corriente de la carga es 2 A. E_g se llama *fuerza electromotriz inducida* (fem) o *voltaje generado* en un generador de cc.

1.3. Análisis de circuitos de corriente alterna

De todos los tipos de motores eléctricos, los de corriente alterna (ca) son los más populares y más utilizados. Un motor de ca se diseña para operar como *motor monofásico* o como *motor trifásico*. En los tamaños de un caballo de fuerza y mayores, casi todos los motores se diseñan para operar con alimentación trifásica. Sin embargo, en

tamaños de fracción de caballo de fuerza, el uso de los motores monofásicos excede al de los trifásicos. Por tal motivo, en esta sección se repasan los circuitos de ca monofásicos. En la siguiente se revisarán los de ca trifásicos.

Como se aprecia en la figura 1.2*a*, la expresión general para la forma de la onda de corriente monofásica es

$$i(t) = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{1.4}$$

donde I_m es el valor máximo o amplitud de la corriente, ω es la frecuencia angular (en radianes/segundo [rad/s]) y θ es el desplazamiento de fase inicial. La frecuencia angular ω puede expresarse como

$$\omega = 2\pi f \tag{1.5}$$

donde f es la frecuencia de la forma de la onda de corriente, en hertz (Hz). El tiempo necesario para completar un ciclo de la forma de la onda se llama *periodo de tiempo* y está dado por

$$T = \frac{1}{f} \tag{1.6}$$

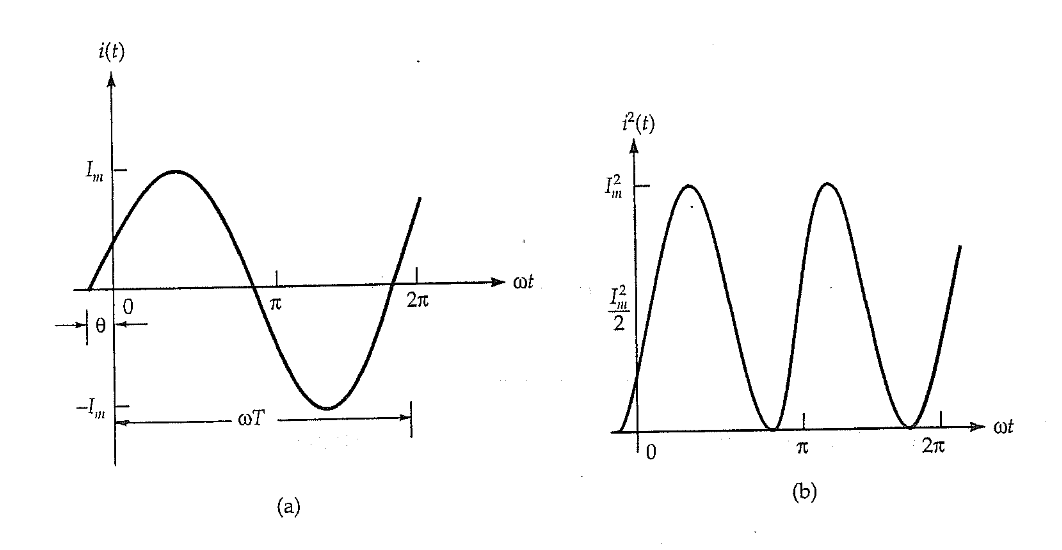


Figura 1.2. (a) Una forma de onda común. **(b)** Cuadrado de la forma de onda común.

El valor promedio de la forma de la onda periódica de la corriente (fig. 1.2*a*) es

$$I_{prom} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\, dt = 0 \tag{1.7}$$

El valor promedio de una función variable senoidalmente de la forma que se da en la ecuación (4) siempre es igual a cero.

El valor medio cuadrático (rms) o valor efectivo de la forma de la onda de corriente (fig. 1.2*a*) es

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cong 0.707\ I_m \tag{1.8}$$

La función $i^2(t)$ se esquematiza en la figura 1.2*b*, donde se muestra con claridad que el cuadrado de la onda queda por completo arriba del eje cero.

Decimos que una corriente alterna tiene un valor efectivo de 1 A cuando produce calor en cierta resistencia a la misma tasa con la que una corriente continua de 1 A produce calor en la misma resistencia. Observe que el valor medio cuadrático (rms) de una función senoidal siempre es 70.7% de su valor máximo.

Potencia instantánea

La potencia en cualquier instante es igual al producto del voltaje y la corriente en ese instante. Es decir,

$$p(t) = v(t)\ i(t) \tag{1.9}$$

Sea $v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$ el voltaje a través de un elemento en un circuito, e $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ la corriente a través del elemento. Entonces, la potencia instantánea es

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \phi) \tag{1.10}$$

y su valor promedio es

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\alpha - \phi) = VI \cos\theta \tag{1.11}$$

donde $V = V_m/\sqrt{2}$ e $I = I_m/\sqrt{2}$ son los valores medios cuadráticos del voltaje y la corriente, y $\theta = \alpha - \phi$ es el ángulo entre ellos, como se muestra en la figura 1.3. La ecuación (1.11) establece que la potencia promedio es igual al producto del valor medio

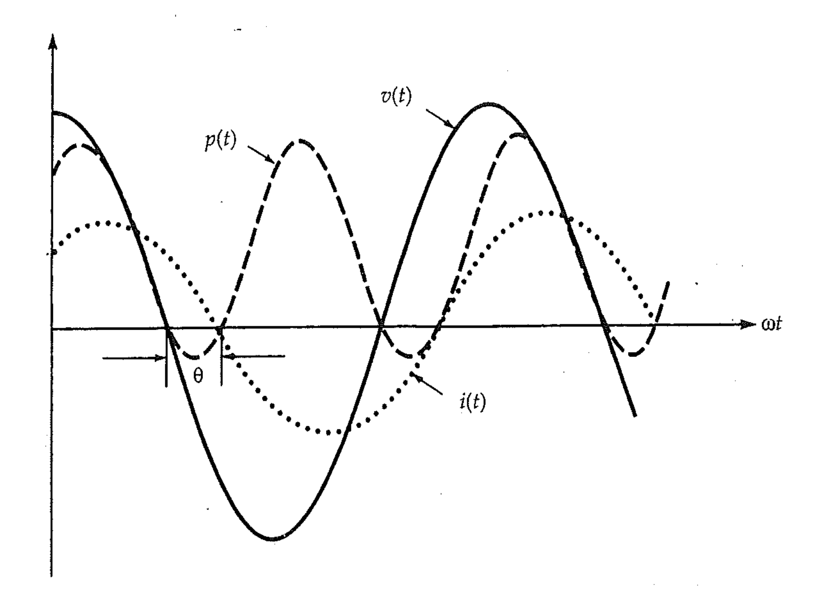


Figura 1.3. Formas de las ondas del voltaje, la corriente y la potencia instantánea.

cuadrático del voltaje, el valor medio cuadrático de la corriente y el coseno del ángulo que hay entre ellos. El ángulo θ que hay entre el voltaje y la corriente se denomina *ángulo del factor de potencia,* y cos θ recibe el nombre de *factor de potencia.*

Se dice que el factor de potencia está *atrasado* cuando la corriente sigue al voltaje, como se aprecia en la figura 1.3. En este caso, el circuito es de naturaleza *inductiva.* Por otro lado, la corriente *antecede* al voltaje en el caso de un circuito capacitivo y tiene un factor de potencia *en adelanto.*

Análisis fasorial o con fasores

En el análisis de circuitos eléctricos se enseña que una función seno puede representarse con un *fasor.* Pero, ¿qué es un fasor?

De la identidad de Euler

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

donde $j = \sqrt{-1}$

Si una fuente de voltaje está dada por

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

entonces puede expresarse como

$$v(t) = \text{Re}\left[V_m e^{j(\omega t + \theta)}\right]$$

donde Re denota la *parte real* de la expresión entre corchetes. $v(t)$ también puede escribirse como

$$v(t) = \text{Re}\left[\sqrt{2}Ve^{j\theta}e^{j\omega t}\right]$$

donde V es el valor medio cuadrático de $v(t)$. Como $\sqrt{2}$ es simplemente un multiplicador constante y ω depende de la frecuencia de la fuente aplicada, por el momento podemos ignorar estos parámetros. Si suponemos que Re también es implícita, entonces puede definirse una cantidad tal que

$$\tilde{V} = Ve^{j\theta} = V\underline{/\theta}$$

donde se dice que $\tilde{V}$ es la representación fasorial de $v(t)$ en términos de su valor medio cuadrático. Es decir,

$$v(t) = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \theta) <=> \tilde{V} = V\underline{/\theta} \tag{1.12}$$

Si $\tilde{V}$ e $\tilde{I}$ son las representaciones en términos de fasores de $v(t)$ y de $i(t)$, entonces las equivalencias en términos de fasores de la ley de Ohm para la resistencia R, la inductancia L y la capacitancia C son las que se indican en la tabla 1.1. Observe que $j\omega L$

Tabla 1.1. Ley de Ohm para R, L y C.

	Símbolo de circuito	*Dominio del tiempo*	*Dominio de fasores*
Resistencia, R	R, i, +, −, v_R	$v_R = iR$	$\tilde{V} = \tilde{I}R$
Inductancia, L	L, i, +, −, v_L	$v_L = L\frac{di}{dt}$	$\tilde{V}_L = j\omega L\tilde{I}$ $= \tilde{I}\hat{Z}_L$
Capacitancia, C	C, i, +, −, v_C	$i = C\frac{dv_C}{dt}$	$\tilde{I} = j\omega C\tilde{V}_C$ $= \frac{\tilde{V}_C}{\hat{Z}_C}$

y $1/j\omega C$ son la impedancia inductiva ($\hat{Z}_L$) y la impedancia capacitiva ($\hat{Z}_C$) correspondientes a la inductancia L y a la capacitancia C. Las impedancias también pueden expresarse como

$$\hat{Z}_L = jX_L = j\omega L \quad \text{y} \quad \hat{Z}_C = -jX_C = -\frac{j}{\omega C}$$

donde $X_L = \omega L$ es la reactancia inductiva y $X_C = 1/\omega C$ es la reactancia capacitiva.

Las leyes del voltaje y de la corriente de Kirchhoff en la forma de fasor son

$$\sum_{m=1}^{n} \tilde{V}_m = 0 \tag{1.13}$$

y

$$\sum_{m=1}^{n} \tilde{I}_m = 0 \tag{1.14}$$

Un circuito con fuentes variables senoidalmente puede transformarse en su circuito equivalente en dominio *fasor* y a continuación resolverse con manipulaciones algebraicas de números complejos. *Una vez que se ha obtenido el circuito variable que se requería en la forma de fasor, en términos de su valor medio cuadrático, es posible reconvertirlo en su representación en dominio del tiempo apropiada si se multiplica el fasor por* $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ *y se considera únicamente su parte real.*

En términos de fasores, la *potencia compleja* se define como

$$\hat{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = P + jQ \tag{1.15}$$

donde $\tilde{I}^*$ *es el conjugado de* $\tilde{I}$, P *es la potencia real o la promedio y* Q *es la potencia reactiva.* Para un circuito resistivo puro, Q vale cero. Q es menor que cero para un circuito capacitivo, y mayor que cero para un circuito inductivo.

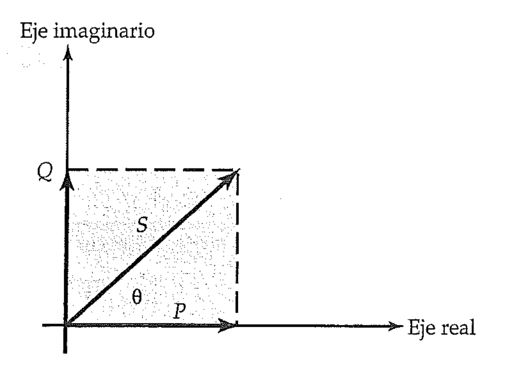


Figura 1.4. Diagrama complejo de la potencia.

El diagrama de potencia (triángulo)

Es posible trazar un diagrama de potencia si se grafica P en el eje real y Q en el eje imaginario del plano complejo, como se indica en la figura 1.4, donde θ es el ángulo del factor de potencia.

El diagrama de fasores

El *diagrama de fasores* es un nombre que se da a un esquema ubicado en un plano complejo de los fasores de voltajes y de los fasores de corrientes en un circuito dado. Los diagramas de fasores se aprovechan para simplificar el trabajo analítico en todo este libro. Al trazar el diagrama de fasores, se sobreentiende que las corrientes y voltajes en un circuito siempre tienen sus propias escalas de amplitud pero una escala angular común.

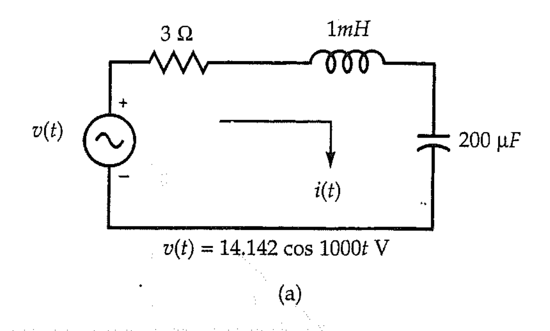
Ejemplo 1.2

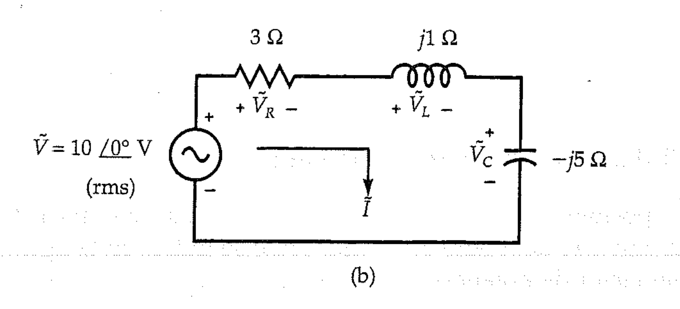
Encuentre la corriente en el circuito que aparece en la figura 1.5*a*. Trace el diagrama de potencia y el de fasores y grafique la alimentación de voltaje y de corriente en el dominio del tiempo.

- Solución

La frecuencia angular es $\omega = 1000$ rad/s. Las impedancias inductiva y capacitiva son

$$\hat{Z}_L = j1000 \times 1 \times 10^{-3} = j1\ \Omega$$





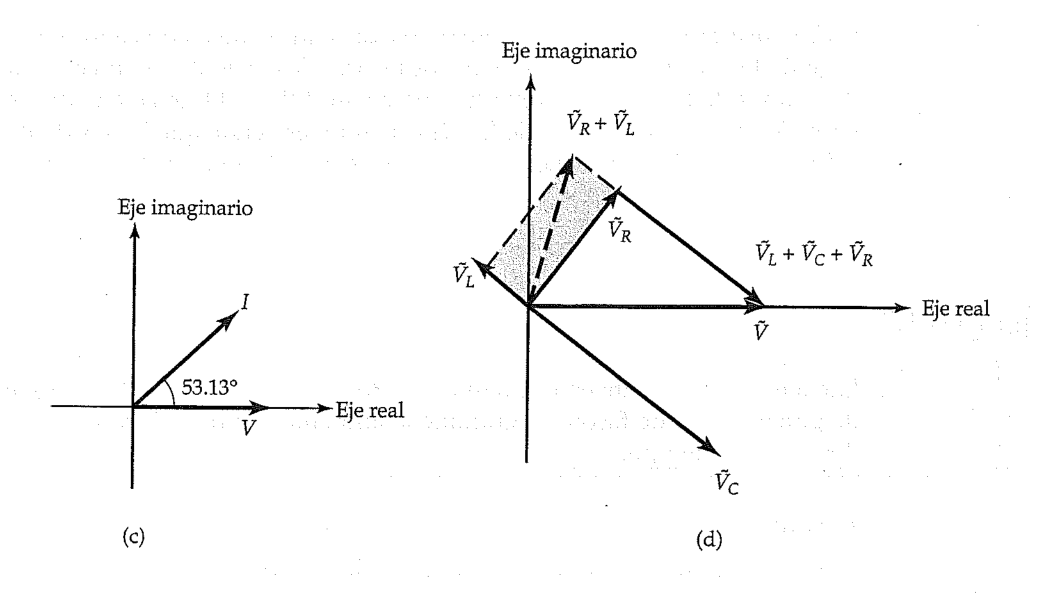


Figura 1.5. (a) Circuito para el ejemplo 1.2. **(b)** Circuito fasor equivalente. **(c)** Relación entre el voltaje y la corriente. **(d)** Diagrama de fasores.

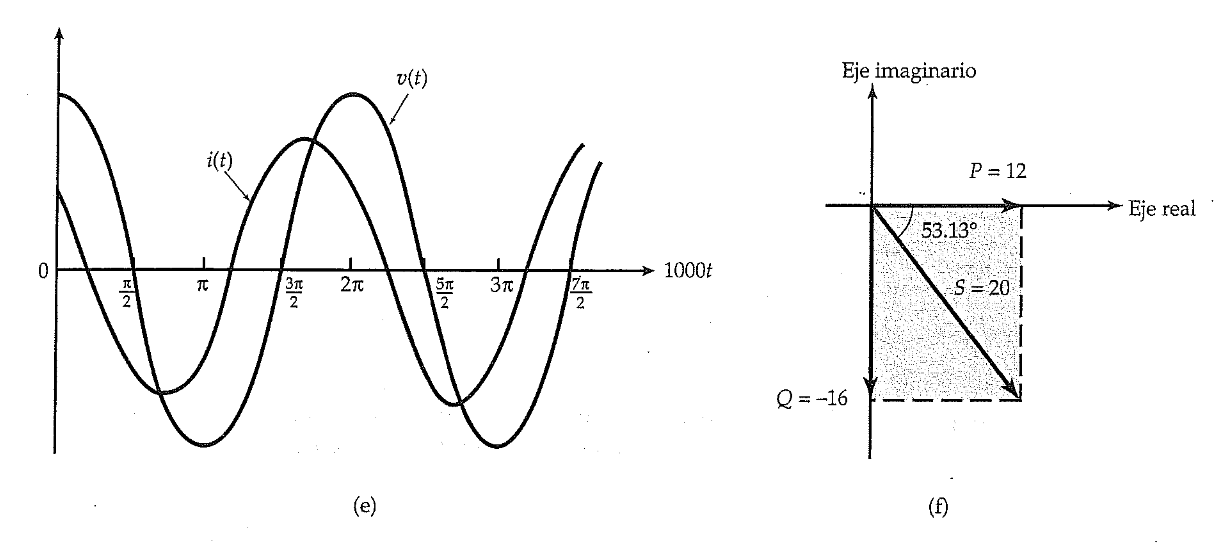


Figura 1.5. **(e)** Formas de las ondas del voltaje y la corriente. **(f)** Diagrama de potencia.

y

$$\tilde{Z}_C = -\frac{j}{1000 \times 200 \times 10^{-6}} = -j5\ \Omega$$

Ahora puede trazarse el circuito fasor equivalente, como se muestra en la figura 1.5*b*. La impedancia del circuito es

$$\hat{Z} = 3 + j1 - j5 = 3 - j4 = 5\underline{/-53.13^\circ}\ \Omega$$

Puede calcularse ahora la corriente en el circuito, que es

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{\hat{Z}} = \frac{10\underline{/0^\circ}}{5\underline{/-53.13^\circ}} = 2\underline{/53.13^\circ}\ \text{A}$$

La relación de fasor entre el voltaje aplicado y la corriente en el circuito se ilustra en la figura 1.5*c*. Observe que la corriente se adelanta al voltaje aplicado con un ángulo de 53.13°.

Las caídas del voltaje en términos de fasores en el circuito son

$$\tilde{V}_R = \tilde{I}R = 6\underline{/53.13^\circ}\ \text{V}$$

$$\tilde{V}_L = \tilde{I}\hat{Z}_L = j2\underline{/53.13^\circ} = 2\underline{/143.13^\circ}\ \text{V}$$

y

$$\tilde{V}_C = \tilde{I}\hat{Z}_C = -j10\underline{/53.13^\circ} = 10\underline{/-36.87^\circ}\ \text{V}$$

El diagrama de fasores correspondiente aparece en la figura 1.5*d*.

La expresión para la corriente en el dominio del tiempo es

$$i(t) = \text{Re}\left[\sqrt{2}\ 2e^{j53.13^\circ}e^{j1000t}\right] = 2.828\cos(1000\,t + 53.13^\circ)\ \text{A}$$

En la figura 1.5*e* se presenta el diagrama de las formas de la onda del voltaje y la corriente. Como puede apreciarse, la corriente se adelanta al voltaje con un ángulo de 53.13°.

La potencia compleja aportada por la fuente es

$$\hat{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = [10\underline{/0^\circ}][2\underline{/-53.13^\circ}] = 20\underline{/-53.13^\circ}$$

$$= 12 - j16\ \text{VA}$$

Por tanto, la potencia aparente S es de 20 VA, la potencia real P de 12 W y la potencia reactiva Q de –16 VAR. El triángulo de potencia se grafica en la figura 1.5*f*.

■

Corrección del factor de potencia

La mayor parte de las cargas activas, como los motores de inducción que operan con un suministro eléctrico de ca, tienen factores de potencia en atraso. Cualquier disminución del factor de potencia origina un incremento de la corriente para la misma salida de potencia. El incremento en la corriente se traduce en un incremento en la pérdida de potencia en la línea de transmisión. Conforme el factor de potencia cae debajo de cierto nivel, la compañía que suministra la energía establece una penalización al factor de potencia para compensar la pérdida adicional de potencia en la línea de transmisión.

Como la corriente en un condensador (o capacitor) se adelanta a la caída de voltaje que pasa por él podemos conectar los condensadores en paralelo con la carga inductiva para mejorar el factor conjunto de potencia. Los requerimientos de potencia de la carga permanecen iguales debido a que un condensador no disipa potencia. La mejora del factor de potencia por medio de condensadores se llama *control pasivo del factor de potencia*. Posteriormente nos ocuparemos del control activo del factor de potencia que utiliza máquinas síncronas.

Ejemplo 1.3

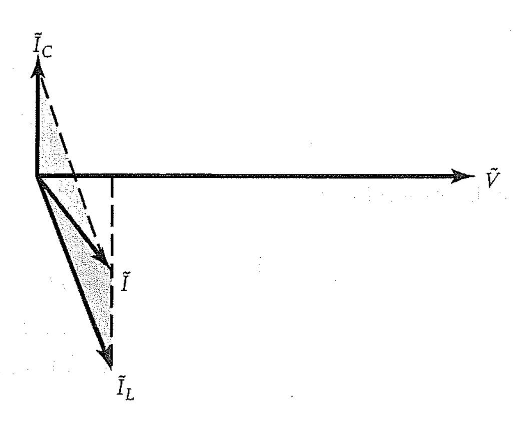
Cierta carga toma una corriente de 10 A con un factor de potencia de 0.5 en atraso desde una fuente de 120 V y 60 Hz. La compañía de suministro eléctrico impone un castigo si el factor de potencia cae por debajo de 0.8. ¿Cuál debe ser el tamaño del condensador para evitar la penalización?

• Solución

Si el voltaje del suministro es $\tilde{V} = 120 \underline{/0^\circ}$ V, la corriente a través de la carga es $\tilde{I}_L = 10\underline{/-60^\circ}$ A. En la figura 1.6*a* se muestra el diagrama de fasores para el voltaje y la corriente. La potencia compleja absorbida por la carga es

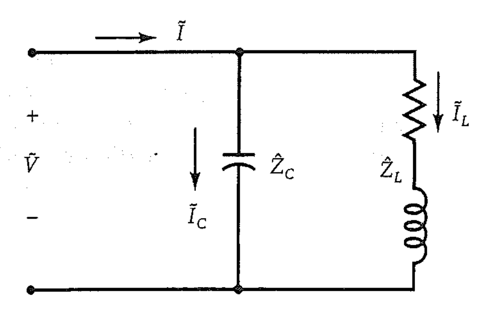
$$\hat{S} = \tilde{V}\tilde{I}_L^* = 1200\underline{/60^\circ} = 600 + j1039.23 \text{ VA}$$

La potencia promedio requerida por la carga es de 600 W, y la componente reactiva asociada de la potencia con un factor de potencia de 0.5 en atraso es de 1039.23 VAR.



(a) Diagrama de fasores para el voltaje y la corriente, para el ejemplo 1.3.

Figura 1.6. (a) Corrección del factor de potencia.



(b) Condensador conectado en paralelo con la impedancia de la carga.

Figura 1.6. (b) Corrección del factor de potencia.

Conectamos ahora un condensador en paralelo con la carga, como se muestra la figura 1.6*b*. Sea $\tilde{I}_C$ la corriente a través del condensador; entonces la entrada total de corriente desde la fuente $\tilde{I}$ debe tener un factor de potencia de 0.8 en atraso sólo para evitar la penalización. Es decir,

$$\tilde{I} = \tilde{I}_L + \tilde{I}_C = I\,\underline{/-36.87^\circ}$$

Como la potencia promedio requerida desde la fuente debe seguir siendo de 600 W, la corriente suministrada por la fuente es

$$I = \frac{600}{120 \times 0.8} = 6.25 \text{ A}$$

La corriente a través del condensador es

$$\tilde{I}_C = \tilde{I} - \tilde{I}_L = 6.25\,\underline{/-36.87^\circ} - 10\,\underline{/-60^\circ} = j4.91 \text{ A}$$

Así, la impedancia capacitiva es

$$\hat{Z}_C = \frac{120}{j4.91} = -\,j24.44\ \Omega \qquad \text{o} \qquad X_C = 24.44\ \Omega$$

Por tanto, el valor que se requiere para el condensador es

$$C = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 24.44} = 108.53\ \mu\text{F}$$

■

Ejercicios

1.4. Una fuente de voltaje de $v(t)$ = 169.7 sen(200t + 30°)V se aplica a través de una combinación en serie de una resistencia de 10 Ω, una inductancia de 10 mH y una capacitancia de 500 μF. Grafique el circuito fasor equivalente y determine la corriente en el circuito, la potencia aparente, la potencia real y la potencia reactiva que suministra la fuente. Trace las formas de las ondas del voltaje y la corriente.

1.5. Una forma de onda de voltaje de $v(t)$ = 325.27 cos(100t) se aplica a través de un circuito en serie que consiste en 1. una resistencia de 50 Ω y una capacitancia de 100 μF, y 2. una resistencia de 50 Ω y una inductancia de 200 mH. Para cada circuito, trace el circuito fasor equivalente, el diagrama de fasores, el triángulo de potencia y la forma de las ondas del voltaje y la corriente en el dominio del tiempo. ¿Cuál es el circuito equivalente paralelo en cada caso?

1.6. En la figura E1.6 se muestra un circuito fasor equivalente. Determine el voltaje en el nodo c respecto al nodo b utilizando el método de nodo de voltaje. Calcule la corriente en cada rama con el método de malla de corriente. ¿Cuál es la potencia que proporciona cada fuente? ¿Cuál es la potencia total disipada en el circuito? ¿Es igual la potencia total suministrada a la potencia total que se disipa?

1.7. En el ejemplo 1.3, ¿cuál debe ser el tamaño del condensador con objeto de que el factor conjunto de potencia sea igual a la unidad?

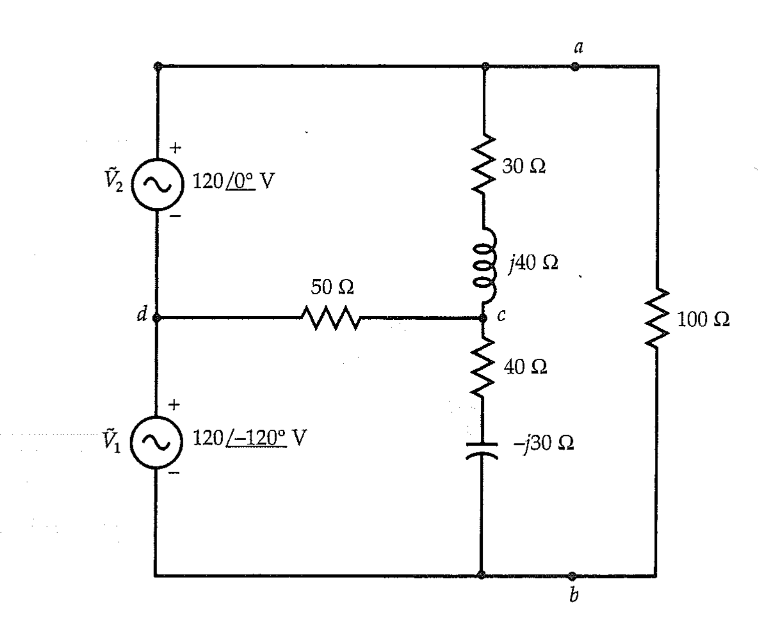


Figura E1.6. Circuito para el ejercicio 1.6.

1.4. Circuitos trifásicos

En esta sección se analiza brevemente una fuente trifásica equilibrada que suministra potencia a una carga trifásica equilibrada. En la práctica, la energía se distribuye a una carga por medio de una línea de tres hilos a partir de una estación generadora trifásica remota. Un generador trifásico siempre se diseña para actuar como una fuente trifásica equilibrada. No hay razón para creer que la línea de transmisión de tres hilos del generador a la carga no esté equilibrada. Para las cargas desequilibradas (cargas con distintas impedancias de fase) el modo de análisis es el mismo que el utilizado en la sección precedente. Sólo cuando la carga está equilibrada es posible simplificar el análisis de un sistema trifásico representando el circuito trifásico con un circuito equivalente por fase, como se explica en seguida.

Fuente trifásica

Una fuente trifásica equilibrada puede considerarse compuesta por tres fuentes monofásicas tales que *a*) la amplitud de cada fuente de voltaje es la misma y *b*) cada una de las fuentes de voltaje está a 120° fuera de fase respecto de las otras dos. Se dice entonces que cada fuente representa a una de las tres fases de la fuente trifásica. Las tres fuentes pueden conectarse para formar una conexión en Y (fig. 1.7) o una conexión en delta Δ (fig. 1.8). Los voltajes trifásicos para la conexión en Y, en dominio del tiempo y en forma de fasor, en términos de sus valores medios cuadráticos, son

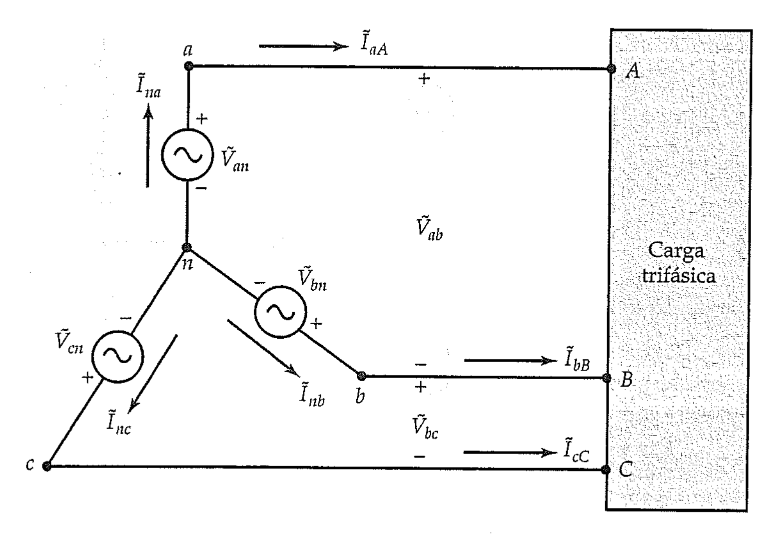


Figura 1.7. Fuente trifásica conectada en Y.

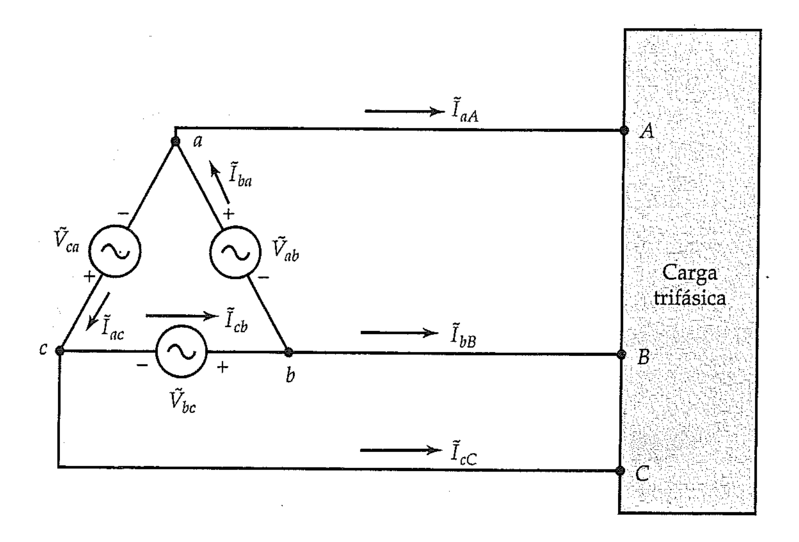


Figura 1.8. Fuente trifásica conectada en Δ.

Dominio del tiempo		*Forma de fasor*	
$v_{an} = \sqrt{2}V \cos \omega t$	<=>	$\tilde{V}_{an} = V\underline{/0^\circ}$	(1.16*a*)
$v_{bn} = \sqrt{2}V \cos(\omega t - 120^\circ)$	<=>	$\tilde{V}_{bn} = V\underline{/-120^\circ}$	(1.16*b*)
$v_{cn} = \sqrt{2}V \cos(\omega t + 120^\circ)$	<=>	$\tilde{V}_{cn} = V\underline{/120^\circ}$	(1.16*c*)

donde V es el valor medio cuadrático del voltaje en cada fase y ω es la frecuencia angular. El subíndice n indica que los voltajes en las fases se entienden respecto a la terminal n común (neutral). En la figura 1.9 se diagraman las formas de las ondas del voltaje. Observe que el voltaje de la fase b se atrasa, mientras que el voltaje de la fase c se adelanta respecto al voltaje de la fase a. Esto se denomina *secuencia de fase positiva o en el sentido de las manecillas del reloj.* Se dice que la secuencia de fase es *negativa o en sentido contrario al de las manecillas del reloj* si el voltaje de la fase b se adelanta, en tanto que el de la fase c se atrasa respecto al voltaje de la fase a.

Los *voltajes de línea* para la secuencia de fase positiva son

$$\tilde{V}_{ab} = \tilde{V}_{an} - \tilde{V}_{bn} = \sqrt{3}V\underline{/30^\circ} = V_\ell\underline{/30^\circ} \qquad (1.17a)$$

$$\tilde{V}_{bc} = \tilde{V}_{bn} - \tilde{V}_{cn} = \sqrt{3}V\underline{/-90^\circ} = V_\ell\underline{/-90^\circ} \qquad (1.17b)$$

$$\tilde{V}_{ca} = \tilde{V}_{cn} - \tilde{V}_{an} = \sqrt{3}V\underline{/150^\circ} = V_\ell\underline{/150^\circ} \qquad (1.17c)$$

donde $V_\ell = \sqrt{3}V$ es la magnitud del voltaje de línea (o voltaje entre líneas). Así, *en un sistema trifásico equilibrado con conexión en* Y, *la magnitud del voltaje de línea es*

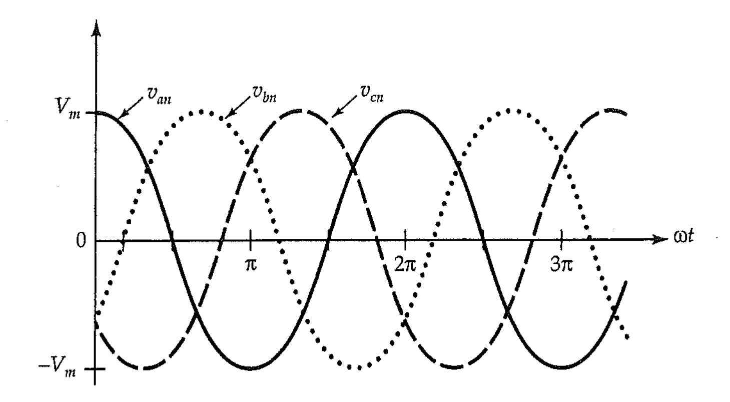


Figura 1.9. Formas de onda del voltaje para la secuencia de fase positiva.

$\sqrt{3}$ *veces el voltaje de la fase.* Para la secuencia de fase positiva, el voltaje de línea se adelanta al voltaje de la fase en 30°, como se ilustra en el diagrama de fasores de la figura 1.10.

De forma similar, es posible verificar que para una fuente conectada en Y, el voltaje de línea se atrasa respecto del voltaje de la fase en 30° cuando la secuencia de fase es negativa.

Como se aprecia en la figura 1.7, la corriente de línea en una fuente conectada en Y es la misma que la corriente de la fase. En el nodo *n*, la suma algebraica de las corrientes debe ser cero. Por tanto,

$$\tilde{I}_{na} + \tilde{I}_{nb} + \tilde{I}_{nc} = 0 \tag{1.17d}$$

Para una fuente conectada en Δ, el voltaje de la fase es el mismo que el voltaje de línea. Para una secuencia de fase positiva, los voltajes de línea o de la fase son

$$\tilde{V}_{ab} = V\underline{/0^\circ} \tag{1.18a}$$

$$\tilde{V}_{bc} = V\underline{/-120^\circ} \tag{1.18b}$$

y

$$\tilde{V}_{ca} = V\underline{/120^\circ} \tag{1.18c}$$

Puesto que las fuentes forman un lazo cerrado, la suma algebraica de los voltajes debe ser cero, de acuerdo con la ley del voltaje de Kirchhoff. Es decir,

$$\tilde{V}_{ab} + \tilde{V}_{bc} + \tilde{V}_{ca} = 0 \tag{1.18d}$$

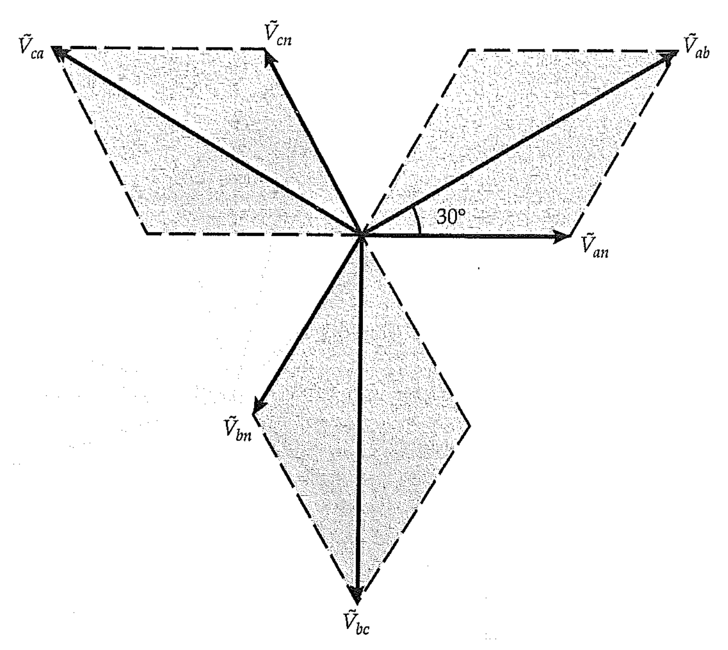


Figura 1.10. Voltajes de línea y de fase para una fuente conectada en Y con la secuencia de fase positiva.

De la figura 1.8 se desprende que las corrientes de línea son

$$\tilde{I}_{aA} = \tilde{I}_{ba} - \tilde{I}_{ac} = \sqrt{3}\tilde{I}_{ba}\underline{/-30^\circ} = \sqrt{3}I\underline{/\phi - 30^\circ} = I_\ell\underline{/\phi - 30^\circ} \quad (1.19a)$$

donde se ha supuesto que $\tilde{I}_{ba} = I_\ell\underline{/\phi}$, es el valor medio cuadrático de la corriente de la fase, e $I_\ell = \sqrt{3}I$ es la magnitud de la corriente de línea. Entonces, *para una fuente conectada en Δ, la corriente de línea es $\sqrt{3}$ veces la corriente de la fase y se atrasa respecto de ésta en 30° para la secuencia de fase positiva*, como se muestra en la figura 1.11. Las otras dos corrientes de línea son

$$\tilde{I}_{bB} = I_\ell\underline{/\phi - 150^\circ} \quad (1.19b)$$

$$\tilde{I}_{cC} = I_\ell\underline{/\phi + 90^\circ} \quad (1.19c)$$

Del mismo modo, puede observarse que la corriente de línea se adelanta a la corriente de la fase en 30° cuando la secuencia de fase es negativa.

Carga trifásica

Se dice que una carga trifásica está equilibrada si la impedancia de la carga de cada fase es la misma. Al igual que los voltajes de la fuente, las impedancias de la carga

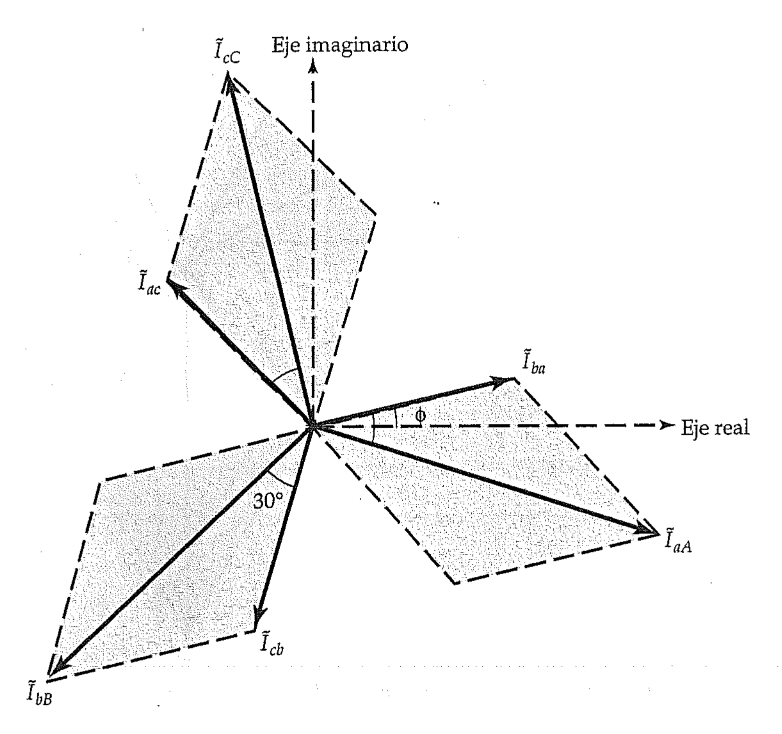


Figura 1.11. Relaciones entre las corrientes de fase y de línea para una fuente conectada en Δ con la secuencia de fase positiva.

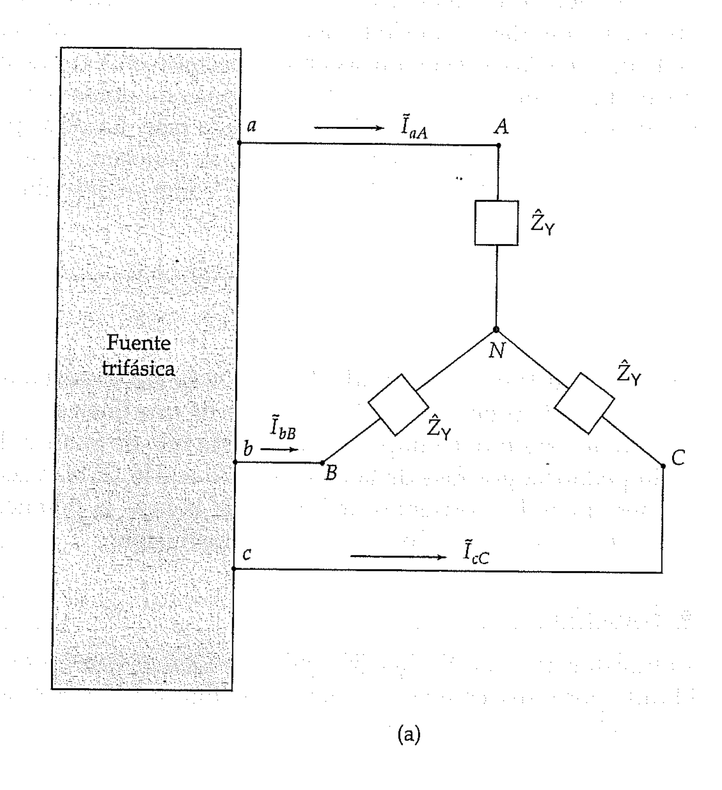
pueden estar conectadas en Y o en Δ, como se ilustra en la figura 1.12. Esto da lugar a cuatro posibles conexiones de la fuente a la carga: Y-Y, Y-Δ, Δ-Y y Δ-Δ. Si se domina el análisis de una conexión Y-Y, podemos analizarlas todas haciendo transformaciones Δ-Y donde sea necesario.

Transformación de Δ en Y

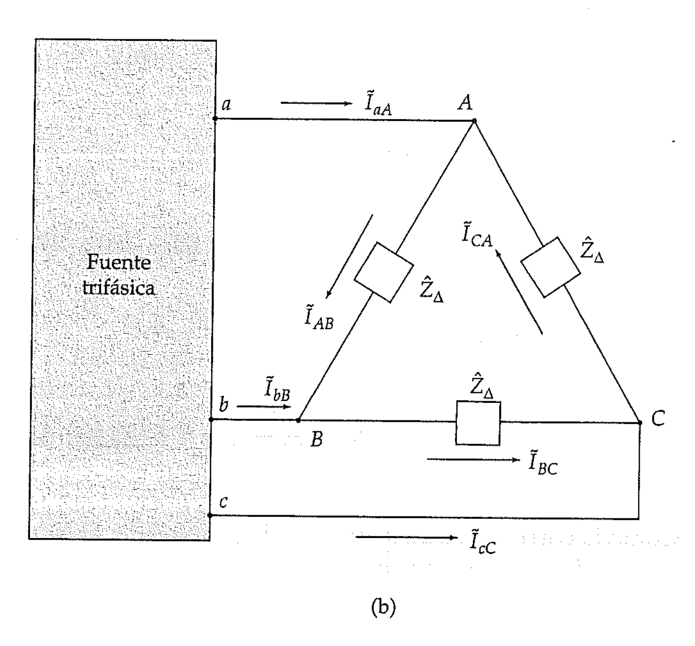
Una carga equilibrada conectada en Δ con una impedancia de fase $\hat{Z}_{\Delta}$ puede transformarse en una carga equilibrada conectada en Y con una impedancia de fase $\hat{Z}_{Y}$ mediante la ecuación siguiente:

$$\hat{Z}_{Y} = \frac{\hat{Z}_{\Delta}}{3}$$

En una carga conectada en Y, la corriente de línea es la misma que la corriente de la fase. Sin embargo, cuando la carga está conectada en Δ, la magnitud de la corriente de línea es $\sqrt{3}$ veces la magnitud de la corriente de la fase. La corriente de línea se adelanta o se atrasa respecto de la corriente de la fase en un ángulo de 30°, según sea la secuencia de fase, negativa o positiva.



(a)



(b)

Figura 1.12. **(a)** Carga trifásica conectada en Y, y **(b)** conectada en Δ.

Si se tiene una fuente trifásica equilibrada, cargas equilibradas e impedancias de línea equilibradas es posible visualizar un cortocircuito entre los nodos neutrales de la fuente y la carga en un sistema conectado en Y-Y. Tal consideración permite reducir el problema trifásico a tres problemas monofásicos, todos idénticos salvo por la diferencia consistente en el ángulo de la fase. En otras palabras, una vez resuelto uno de los tres problemas monofásicos, se conocen las soluciones de los otros dos. Por tanto, se trabaja el problema *por fase*, como se describe en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.4

Una fuente trifásica equilibrada de 866 V y 60 Hz, conectada en Y, alimenta a una carga equilibrada conectada en Δ por medio de una línea de transmisión de tres hilos de 100 km de longitud. La impedancia de cada hilo de la línea de transmisión es $1 + j2\ \Omega$. La impedancia por fase de la carga es $177 - j246\ \Omega$. Si la secuencia de fase es positiva, determine las corrientes de línea y de la fase, la potencia absorbida por la carga y la potencia disipada por la línea de transmisión.

- Solución

Al transformar Δ en Y, $\hat{Z}_Y = 59 - j82\ \Omega$, podemos considerar el circuito trifásico equilibrado por fases, como se muestra en la figura 1.13*a*. Si se adopta como referencia la fase *a*, el voltaje por fase es

$$\tilde{V} = \frac{866}{\sqrt{3}} \approx 500\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

La impedancia total por fase es

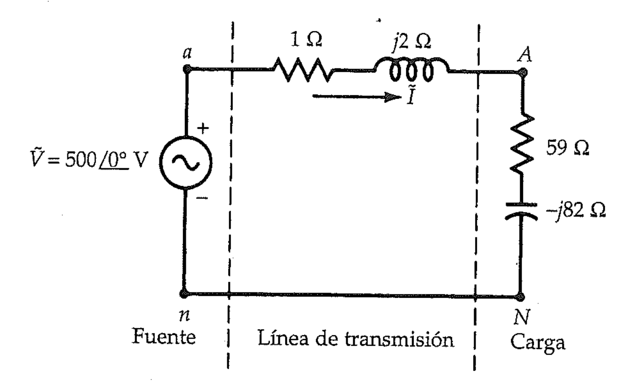
$$\hat{Z} = 1 + j2 + 59 - j82 = 60 - j80 = 100\underline{/-53.13^\circ}\ \Omega$$

La corriente en el circuito es

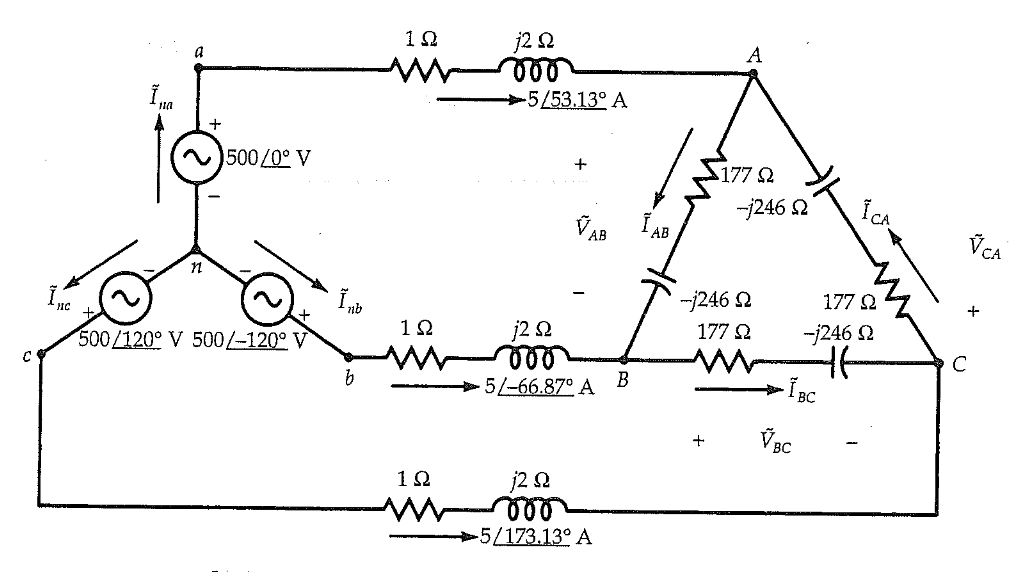
$$\tilde{I} = \frac{500}{60 - j80} = 5\underline{/53.13^\circ}\ \text{A}$$

Como la corriente se adelanta al voltaje aplicado, el factor de potencia (fp) es en adelanto y tiene una magnitud de

$$\text{fp} = \cos(53.13^\circ) = 0.6 \text{ (en adelanto)}$$



(a) Circuito equivalente por fase.



(b) Corrientes y voltajes en un circuito trifásico.

Figura 1.13.

Puesto que la fuente está conectada en Y, la corriente de línea y la corriente de la fase para la fuente son iguales. Así, para una secuencia de fase positiva, las corrientes de la fuente son

$$\tilde{I}_{na} = 5\underline{/53.13^\circ}\ \text{A}$$

$$\tilde{I}_{nb} = 5\underline{/-66.87^\circ}\text{A}$$

e

$$\tilde{I}_{nc} = 5\underline{/173.13^\circ}\ \text{A}$$

como se muestra en la figura 1.13*b*. Para una carga conectada en Δ, la corriente de carga $\tilde{I}_{AB}$ es

$$\tilde{I}_{AB} = \frac{\tilde{I}}{\sqrt{3}\underline{/-30^\circ}} = 2.887\underline{/83.13^\circ}\text{ A}$$

De forma similar, las otras corrientes de fase a través de la carga son

$$\tilde{I}_{BC} = 2.887\underline{/-36.87^\circ}\text{ A}$$

e

$$\tilde{I}_{CA} = 2.887\underline{/-156.87^\circ}\text{ A}$$

Los voltajes de línea o de la fase en el extremo de la carga son

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{AB} &= \tilde{I}_{AB}\hat{Z}_{AB} = 2.887\underline{/83.13^\circ} \times [177 - j246] \\ &= 874.93\underline{/28.87^\circ}\text{ V}\end{aligned}$$

Igualmente, los otros voltajes de línea o de la fase son

$$\tilde{V}_{BC} = 874.93\underline{/-91.13^\circ}\text{ V}$$

y

$$\tilde{V}_{CA} = 874.93\underline{/148.87}\text{ V}$$

La potencia promedio disipada en la fase *AB* de la carga es

$$P_{AB} = I_{AB}^2 \times 177 = 1475.25\text{ W}$$

La potencia disipada por cada una de las otras dos fases también es 1475.25 W. Por tanto, la potencia total disipada por la carga es

$$P_{\text{Carga}} = 3 \times 1475.25 = 4425.75\text{ W}$$

La potencia total disipada por la línea de transmisión de tres hilos es

$$P_{\text{Línea}} = 3 \times 5^2 \times 1 = 75\text{ W}$$

Así, la potencia total que suministra la fuente trifásica es

$$\begin{aligned}P_{\text{Fuente}} &= P_{\text{Carga}} + P_{\text{Línea}} \\ &= 4425.75 + 75 = 4500.75\text{ W}\end{aligned}$$

■

Ejercicios

1.8. Una fuente trifásica equilibrada conectada en Y tiene un voltaje de línea de 208 V y alimenta a dos cargas equilibradas conectadas en Y. Las impedancias por fase de las dos cargas son $20 + j70\ \Omega$ y $50 + j30\ \Omega$. Calcule la potencia suministrada a cada carga por la fuente. ¿Cuál es el factor de potencia de cada carga? ¿Cuál es el factor de potencia conjunto?

1.9. En el ejercicio 1.8 se conectaron en paralelo tres condensadores conectados en Δ, con las dos cargas a fin de mejorar el factor de potencia en atraso a 0.8. ¿Cuál debe ser la impedancia de cada condensador? ¿Cuál es el tamaño de cada condensador si la frecuencia de la línea es 60 Hz?

1.10. Una fuente trifásica equilibrada conectada en Δ tiene un voltaje de línea de 120 V. Se conecta a una carga por medio de una línea de transmisión de tres hilos. La impedancia por fase de la carga conectada en Δ es igual a $30 + j120\ \Omega$. La impedancia de cada hilo de la línea de transmisión es $2 + j4\ \Omega$. ¿Cuánta potencia se disipa por la carga? ¿Y por la línea de transmisión? ¿Cuál es el factor de potencia de la carga? ¿Cuál es el factor de potencia conjunto?

1.5. Medición de la potencia y la impedancia

Para concluir repasaremos el tema de la medición de la potencia en circuitos de cc, circuitos monofásicos y circuitos trifásicos. Examinemos cada caso por separado.

Potencia en un circuito de corriente continua

Tanto el voltaje como la corriente en un circuito de cc son constantes, por lo que la potencia suministrada por la fuente o disipada por la carga también lo es. Si una fuente de V volts suministra una corriente de I amperes a una carga, la potencia suministrada por la fuente es igual al producto VI. Así, puede determinarse la potencia en un circuito de cc midiendo el voltaje y la corriente con un voltímetro y un amperímetro, respectivamente. El ejemplo siguiente muestra cómo calcular la potencia en un circuito de cc.

Ejemplo 1.5

Considere el circuito que se ilustra en la figura 1.14*a*. Calcule la potencia que disipa una resistencia de $25\ \Omega$. Trace un esquema que le permita medir la potencia. ¿Cuáles son las lecturas en el voltímetro y el amperímetro?

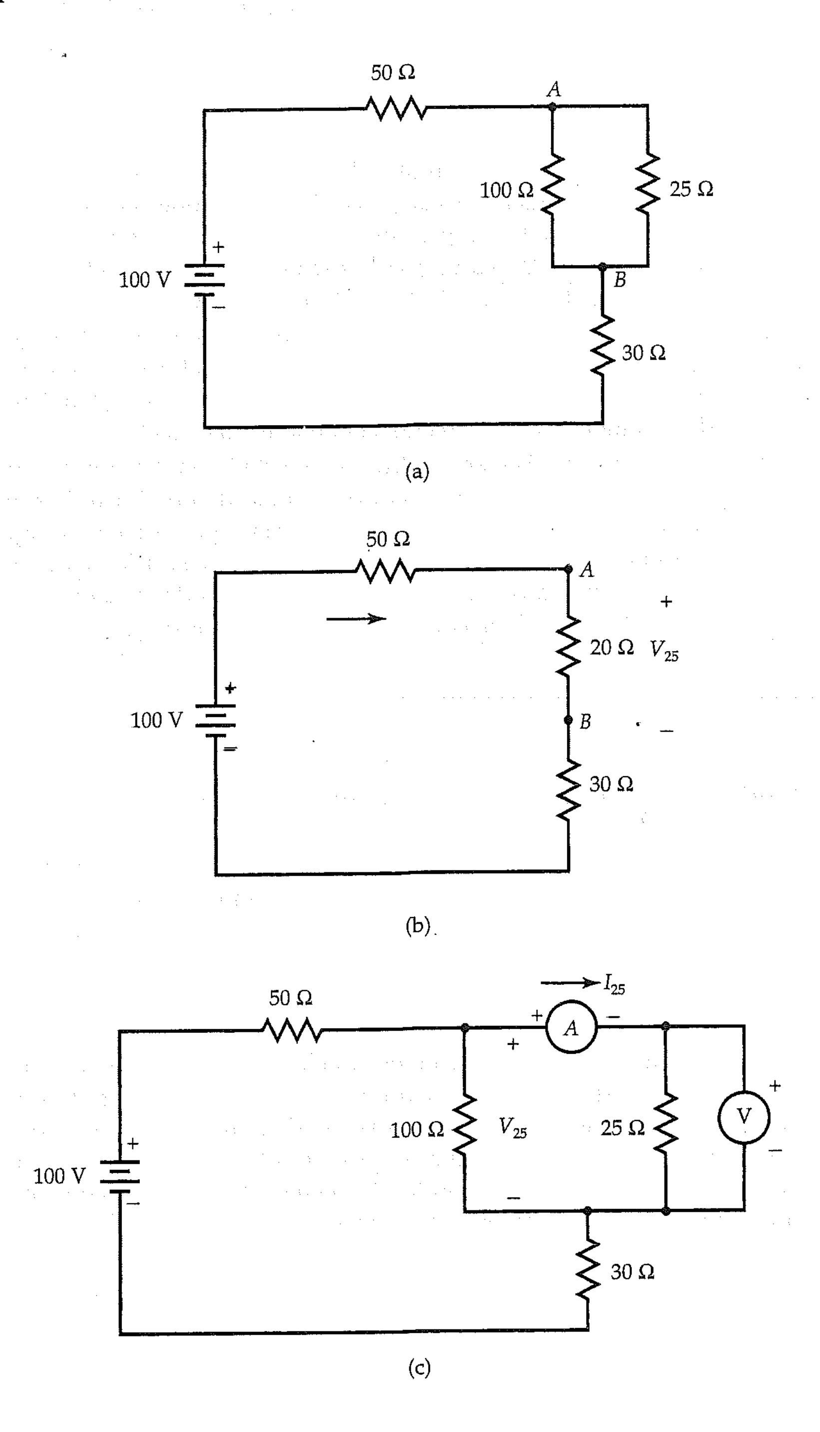


Figura 1.14. (a) Circuito para el ejemplo 1.5. **(b)** Un circuito equivalente. **(c)** Medidas de la corriente y de la caída del voltaje a través del resistor de 25 Ω.

• Solución

Como la resistencia de 25 Ω está en paralelo con la resistencia de 100 Ω, se combinan para obtener una resistencia equivalente de 20 Ω, como se presenta en la figura 1.14*b*. La resistencia total en el circuito es de 100 Ω. Así, la corriente que suministra la fuente es 1 A.

El esquema que permite medir la potencia disipada por la resistenca de 25 Ω se encuentra en la figura 1.14*c*. La caída de voltaje a través de la resistencia de 25 Ω es la misma que la del voltaje a través de la resistencia equivalente de 20 Ω. Es decir, $V_{25} = 1 \times 20 = 20$ V. Por tanto, la lectura del voltímetro es 20 V.

La corriente que pasa por la resistencia de 25 Ω es $I_{25} = (1 \times 20)/25 = 0.8$ A. Por tanto, en el amperímetro se lee 0.8 A.

Al ser el producto de los valores medidos del voltaje y la corriente, la potencia es $P_{25} = 20 \times 0.8 = 16$ W. Así, la potencia disipada por la resistencia de 25 Ω es 16 W.

■

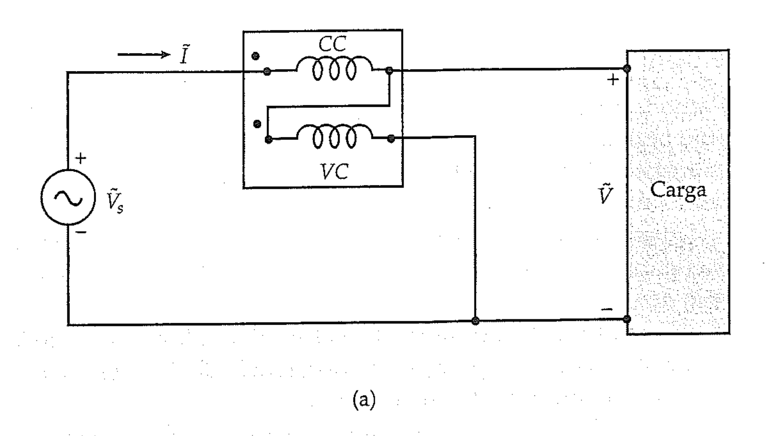
El vatímetro

El vatímetro es un instrumento individual que realiza las funciones combinadas de un amperímetro y un voltímetro. Está calibrado para medir la potencia promedio directamente. Se utiliza para medir la potencia promedio en circuitos de ca. La bobina que mide la corriente se llama *bobina de corriente* y la que mide el voltaje se conoce como *bobina de potencial* o *bobina de voltaje*. Las terminales de polaridad igual que las bobinas de corriente y de voltaje se marcan con puntos (•) o con signos ±. El significado de estas marcas es que la corriente debe entrar o salir de las terminales de polaridad igual en cualquier momento.

En la figura 1.15 se muestran dos maneras posibles de conectar en forma apropiada el vatímetro a un circuito. En la práctica, la bobina de corriente tiene una resistencia muy pequeña y la bobina de potencial conduce una corriente muy pequeña. Por tanto, cada bobina disipa algo de potencia, no importa cuán pequeña sea. Si el vatímetro se conecta como se ilustra en la figura 1.15*a*, la medición del aparato también incluye la potencia disipada por la bobina de potencial. En consecuencia, aun cuando la carga esté desconectada por completo, el vatímetro mide la potencia que disipa su bobina de potencial. A fin de medir de manera correcta la pequeña porción de potencia suministrada a la carga, debe restarse la pérdida de potencia en su bobina de potencial. Si se usa la conexión que se presenta en la figura 1.15*b*, la medición de la potencia incluye la pérdida de potencia en la bobina de corriente. Sin embargo, en los cálculos siempre se presupone que el vatímetro es ideal, es decir, que la resistencia de la bobina de corriente es cero y que la corriente a través de la bobina de potencial es sumamente pequeña.

La potencia en un circuito monofásico

En un circuito de ca, tanto el voltaje $v(t)$ como la corriente $i(t)$ pulsan con el tiempo, como se describe en la figura 1.3, donde $i(t)$ se muestra en atraso respecto de $v(t)$ con



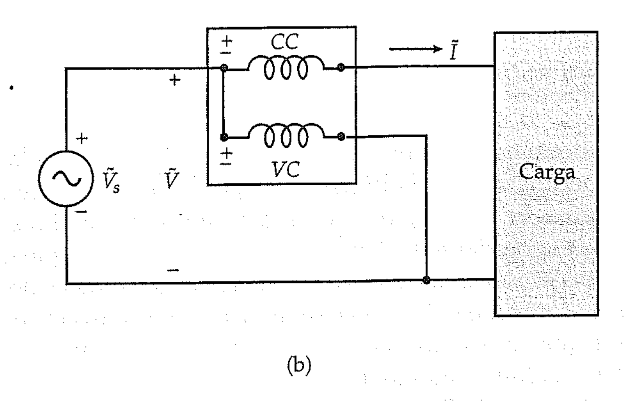


Figura 1.15. Conexiones del vatímetro.

un ángulo θ. Como la potencia instantánea es $p(t) = v(t)i(t)$, pulsa dos veces más rápido. Observe que la potencia instantánea es positiva cuando $v(t)$ e $i(t)$ son positivos o negativos. La potencia instantánea sólo es negativa cuando uno de los dos (voltaje o corriente) es positivo y el otro negativo. Por tanto, la potencia se vuelve negativa dos veces en cada ciclo, como se aprecia en la figura 1.3.

El vatímetro se calibra para leer el valor promedio de la potencia. Si V es el valor medio cuadrático del voltaje a través de la bobina de potencial del vatímetro, I es el valor medio cuadrático de la corriente a través de la bobina de corriente y θ es el desplazamiento de fase entre las dos, la lectura del vatímetro es

$$P = VI \cos \theta \tag{1.20a}$$

En términos de fasores la ecuación (1.20*a*) puede expresarse como

$$P = \text{Re}[\tilde{V}\tilde{I}^*] \tag{1.20b}$$

La ecuación (1.20*b*) permite determinar la potencia promedio que suministra la fuente o disipa la carga en términos de las cantidades en fasores. Sin embargo, con la ecuación (1.20*a*) se puede medir el factor de potencia (pf = cos θ) del circuito por medio del vatímetro, voltímetro y amperímetro. En el ejemplo siguiente se indica cómo hacerlo.

Ejemplo 1.6

Dos cargas están conectadas en paralelo por medio de una línea de transmisión a un generador de ca monofásico a 117 V, como se muestra en la figura 1.16. Se conectan en el sitio de la carga un vatímetro, un voltímetro y un amperímetro para obtener la potencia consumida por la carga y su factor de potencia. Determine *a*) las lecturas de los tres medidores y *b*) el factor de potencia de la carga.

• Solución

Las dos impedancias en paralelo pueden reemplazarse con una impedancia equivalente

$$\hat{Z}_L = \frac{40 \times j30}{40 + j30} = 24\underline{/53.13^\circ} = 14.4 + j19.2\ \Omega$$

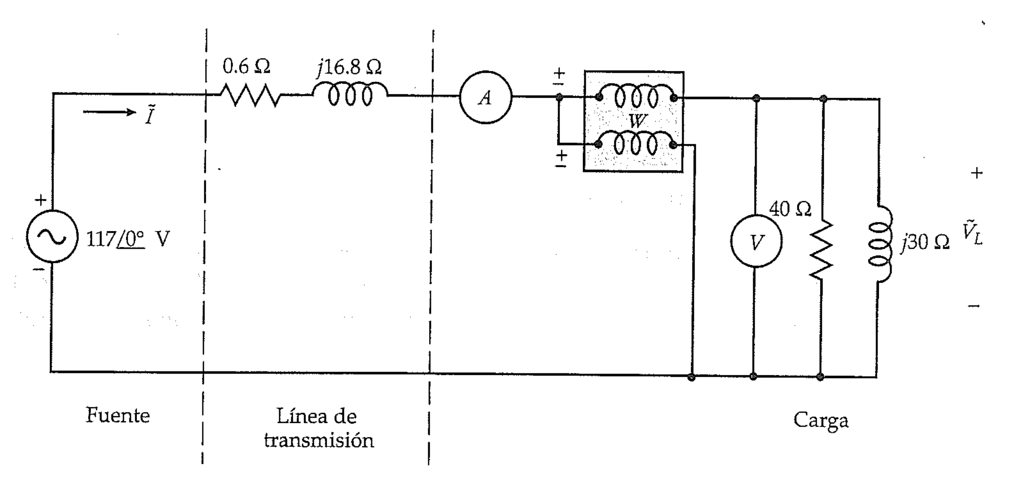


Figura 1.16. Dos cargas paralelas conectadas a una fuente por medio de una línea de transmisión.

La impedancia total en el circuito es

$$\tilde{Z} = 14.4 + j19.2 + 0.6 + j16.8 = 15 + j36\ \Omega$$

Por consiguiente, la corriente suministrada por la fuente es

$$\tilde{I} = \frac{117}{15 + j36} = 3\underline{/-67.38^\circ}\ \text{A}$$

La lectura del amperímetro es 3 A y la corriente que pasa por la bobina de corriente del vatímetro en forma de fasor es $3\underline{/-67.38^\circ}$ A. La caída de voltaje a través de la carga es

$$\tilde{V}_L = \tilde{I}\hat{Z}_L = [3\underline{/-67.38^\circ}][14.4 + j19.2] = 72\underline{/-14.25^\circ}\ \text{V}$$

La lectura del voltímetro es 72 V y el voltaje fasor entre las terminales de la bobina de potencial del vatímetro es $72\underline{/-14.25^\circ}$ V.

La lectura en el vatímetro es

$$P = \text{Re}[(72\underline{/-14.25^\circ})(3\underline{/67.38^\circ})]$$
$$= \text{Re}[216\underline{/53.13^\circ}] = 129.6\ \text{W}$$

Observe que P no tiene en cuenta la pérdida de potencia en la línea de transmisión. El factor de potencia de la carga es

$$\text{fp} = \cos\theta = \frac{P}{V_L I} = \frac{129.6}{72 \times 3} = 0.6 \text{ (en atraso)}$$

El ángulo del factor de potencia correspondiente es 53.13° (en atraso).

■

Potencia en un circuito trifásico

Cuando el punto neutral de la fuente está conectado al punto neutral de la carga por medio de un conductor que se conoce como *hilo neutro*, el circuito suele denominarse *sistema trifásico de cuatro hilos*. En este caso, la potencia en cada fase puede medirse si se conecta un vatímetro en dicha fase, como se muestra en la figura 1.17.

Las lecturas en los tres vatímetros (W_1, W_2 y W_3) son:

$$P_1 = \text{Re}[\tilde{V}_{an}\,\tilde{I}^*_{aA}] \tag{1.21a}$$

$$P_2 = \text{Re}[\tilde{V}_{bn}\,\tilde{I}^*_{bB}] \tag{1.21b}$$

y

$$P_3 = \text{Re}[\tilde{V}_{cn}\,\tilde{I}^*_{cC}] \tag{1.21c}$$

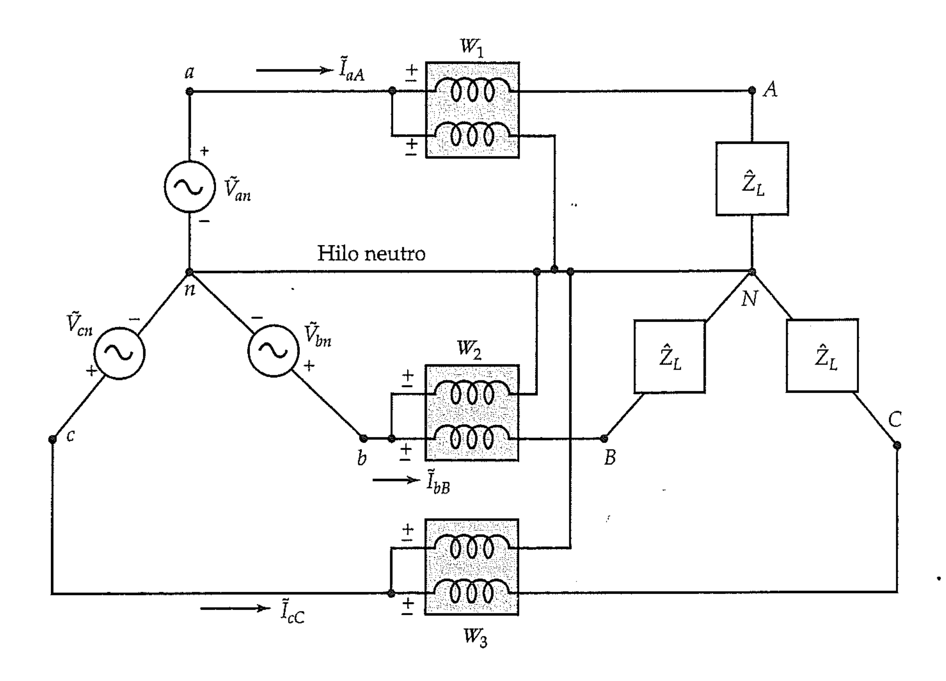


Figura 1.17. Sistema trifásico de cuatro hilos.

respectivamente. La potencia total es la suma de las lecturas de los tres vatímetros. En un sistema trifásico equilibrado, todos los vatímetros registran la misma lectura. Este método es apropiado sólo cuando la carga y la fuente están conectados en Y.

Método de los dos vatímetros

Cuando la fuente o la carga están conectadas en Δ o no se tiene acceso al hilo neutro, se dice que el circuito representa un sistema *trifásico de tres hilos* y la potencia se mide casi siempre con dos vatímetros, como se muestra en la figura 1.18*a*. En este caso, la potencia total es igual a la suma algebraica de las lecturas de los dos vatímetros, esté equilibrado o no el sistema trifásico. Para las conexiones que aparecen en la figura 1.18*a*, las lecturas en los vatímetros W_1 y W_2 son

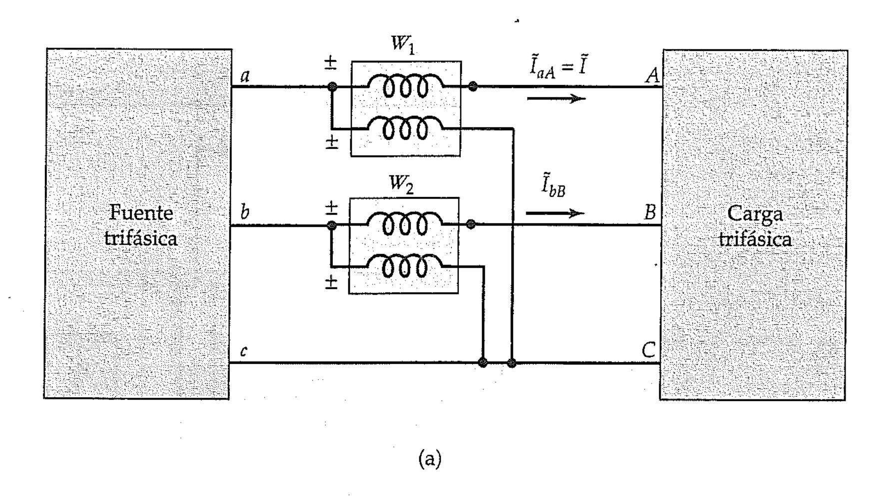
$$P_1 = \text{Re}[\tilde{V}_{ac}\, \tilde{I}^*_{aA}] \tag{1.22a}$$

y

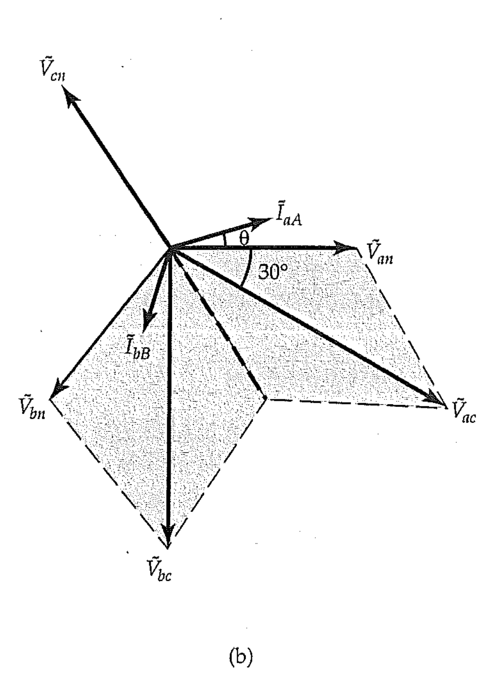
$$P_2 = \text{Re}[\tilde{V}_{bc}\, \tilde{I}^*_{bB}] \tag{1.22b}$$

respectivamente.

Consideremos ahora un sistema trifásico equilibrado con secuencia de fase positiva. El diagrama de fasores para los voltajes y las corrientes en el sistema se mues-



(a)



(b)

Figura 1.18. (a) Sistema trifásico de tres hilos. **(b)** Diagrama de fasores.

tra en la figura 1.18*b*, donde el voltaje de la fase $\tilde{V}_{an} = V\underline{/0°}$ se ha tomado como el voltaje de referencia. Las lecturas de los dos vatímetros son

$$P_1 = \text{Re}[(\sqrt{3}V\underline{/-30°})(I\underline{/-\theta})] = \sqrt{3}VI\ \cos(30° + \theta) \tag{1.23a}$$

$$P_2 = \text{Re}[(\sqrt{3}V\underline{/-90°})(I\underline{/-\theta + 120°})] = \sqrt{3}VI\ \cos(30° - \theta) \tag{1.23b}$$

Por tanto, la potencia total es

$$P = P_1 + P_2 = \sqrt{3}VI[\cos(30° + \theta) + \cos(30° - \theta)]$$

$$= 3VI\ \cos\theta \tag{1.24a}$$

$$= \sqrt{3}V_\ell I_\ell\ \cos\theta \tag{1.24b}$$

donde V_ℓ es la magnitud del voltaje de línea entre dos líneas e I_ℓ es la corriente de línea. Observe que $VI \cos\theta$ es la potencia en cada fase de un sistema trifásico equilibrado. La ecuación (1.24*b*) está dada en términos de las corrientes de línea y los voltajes de línea, y es válida para los sistemas conectados en Δ y en Y. En un sistema conectado en Y, $I_\ell = I$ y $V_\ell = \sqrt{3}V$. Por otro lado, en un sistema conectado en Δ, $I_\ell = \sqrt{3}I$ y $V_\ell = V$.

De las ecuaciones (1.23*a*) y (1.23*b*) se desprende lo siguiente:

a) Las lecturas de los dos vatímetros son iguales cuando $\theta = 0$ o el factor de potencia es la unidad. En este caso, la carga es puramente resistiva.

b) En el vatímetro W_1 se lee cero cuando $\theta = 60°$ o el factor de potencia es igual a 0.5 en adelanto. Para todos los factores de potencia en adelanto por debajo de 0.5, el vatímetro W_1 da una lectura negativa.

c) El vatímetro W_2 da una lectura de cero si $\theta = -60°$ o el factor de potencia es 0.5 en atraso. Para todos los factores de potencia en atraso que están por debajo de 0.5, el vatímetro W_2 da una lectura negativa.

d) Para factores de potencia tanto en adelanto como en atraso por arriba de 0.5 pero menores que la unidad, las lecturas en los dos vatímetros son positivas pero no iguales.

Con objeto de leer la potencia negativa utilizando vatímetros del tipo de deflexión, usualmente se invierten las conexiones hacia la bobina de corriente. Los vatímetros electrónicos están diseñados para mostrar el signo menos e indicar potencia negativa.

A partir de las ecuaciones (1.23*a*) y (1.23*b*) puede calcularse la potencia reactiva (o de cuadratura) Q y el ángulo θ del factor de potencia como

$$Q = \sqrt{3}(P_2 - P_1) \tag{1.25a}$$

y

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}(P_2 - P_1)}{P_2 + P_1}\right] \tag{1.25b}$$

Como los dos vatímetros pueden conectarse entre dos líneas cualesquiera de un sistema trifásico, la ecuación (1.25*b*) puede expresarse en forma general como

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}P_d}{P_s}\right| \tag{1.25c}$$

donde P_d es la diferencia algebraica de las lecturas de los dos vatímetros y P_s es la suma algebraica. El signo del ángulo θ del factor de potencia puede determinarse fácilmente a partir del tipo de carga. El ángulo θ del factor de potencia debe ser negativo para una carga inductiva ($R + jX$) y positivo para una carga capacitiva ($R - jX$).

Ejemplo 1.7

Una fuente trifásica equilibrada, conectada en Δ, de 1351 V y 60 Hz, con una secuencia de fase negativa, alimenta una carga equilibrada conectada en Y con una impedancia por fase de 360 + *j*150 Ω, como se muestra en la figura 1.19*a*. ¿Cuáles son las lecturas de los dos vatímetros? Calcule la potencia total y el factor de potencia de la carga.

- Solución

Al transformar una fuente conectada en Δ en su equivalente conectada en Y, se obtiene la magnitud del voltaje de la fase como

$$V = \frac{1351}{\sqrt{3}} = 780 \text{ V}$$

Si se supone el voltaje de la fase *a* como el fasor de referencia, puede trazarse un circuito equivalente por fase, como se ilustra en la figura 1.19*b*. La corriente en el circuito es

$$\tilde{I} = \frac{780}{360 + j150} = 2\underline{/-22.62^\circ} \text{ A}$$

Como la corriente se atrasa respecto del voltaje aplicado en –22.62°, el ángulo θ del factor de potencia es –22.62°.

El diagrama de fasores para los voltajes y corrientes de la fase y de línea aparece en la figura 1.19*c* para la secuencia de fase negativa. Observe que $\tilde{I}$ es igual a la corriente de línea $\tilde{I}_{aA}$.

La lectura del vatímetro W_1 es

$$P_1 = \text{Re}[\tilde{V}_{ab}\tilde{I}^*_{aA}] = \text{Re}[(1351\underline{/-30^\circ})(2\underline{/22.62^\circ})] = 2679.62 \text{ W}$$

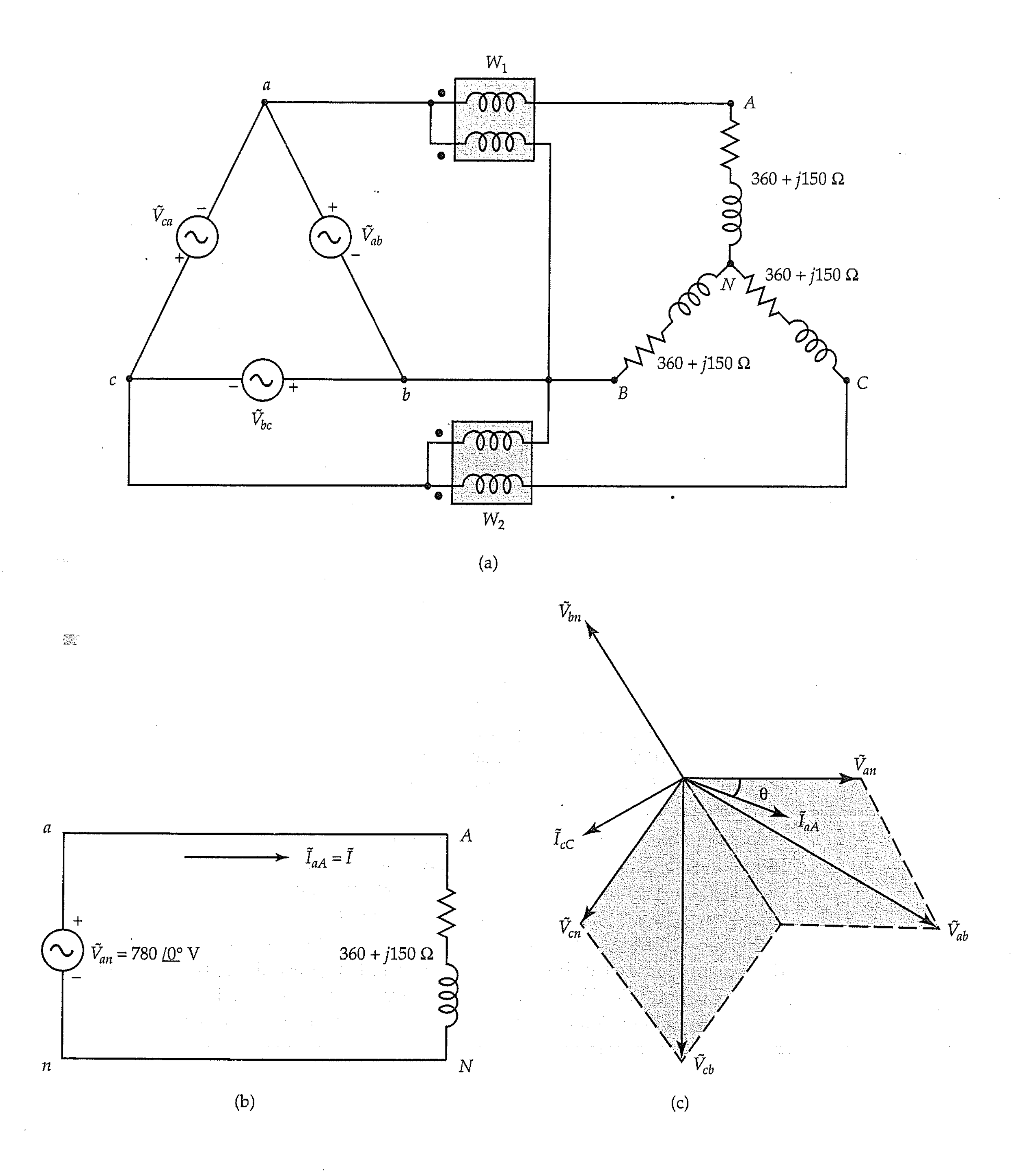


Figura 1.19. (a) Circuito para el ejemplo 1.7. **(b)** Circuito equivalente por fase. **(c)** Diagrama de fasores.

La lectura del vatímetro W_2 es

$$P_2 = \text{Re}[\tilde{V}_{cb}\tilde{I}^*_{cC}] = \text{Re}[(1351\underline{/-90^\circ})(2\underline{/142.62^\circ})] = 1640.38 \text{ W}$$

La potencia total suministrada a la carga es

$$P = 2679.62 + 1640.38 = 4320 \text{ W}$$

En virtud de que las lecturas en ambos vatímetros son positivas, el factor de potencia debe ser mayor que 0.5. Además, debe estar atrasado, puesto que la carga es inductiva.

El factor de potencia de la carga es

$$\text{fp} = \cos\theta = \cos(22.62^\circ) = 0.923 \text{ (en atraso)}$$

Puede verificarse la potencia total consumida por la carga con

$$P = 3I^2R = 3 \times 2^2 \times 360 = 4320 \text{ W}$$

■

Ejercicios

1.11. Considere el circuito de la figura E1.11. Calcule la potencia disipada por la resistencia de 10 Ω. Trace un esquema que le permita medir la potencia. ¿Cuáles son las lecturas del voltímetro y el amperímetro?

1.12. En la figura E1.12 se muestra un circuito equivalente de un motor de inducción monofásico que opera a 120 V y 60 Hz. Trace un circuito que le ayude a medir la potencia que entra en el motor, la corriente que toma éste y el factor de potencia del motor. Encuentre la lectura en cada medidor.

1.13. Tres impedancias idénticas de 2373 + j1500 Ω están conectadas en Δ a una fuente equilibrada conectada en Δ de 1732 V y 60 Hz, por medio de una línea de transmisión de tres hilos. Cada línea puede representarse por una resistencia equivalente de 75 Ω, como se muestra en la figura E1.14. ¿Cuáles deben ser las lecturas en los dos vatímetros, el voltímetro y el amperímetro? ¿Cuál es el factor de potencia de la carga? Suponga que la secuencia de fase es positiva.

Medición de la impedancia

Para determinar las características del desempeño de un dispositivo eléctrico —un transformador, un motor monofásico o un motor trifásico, por ejemplo— son nece-

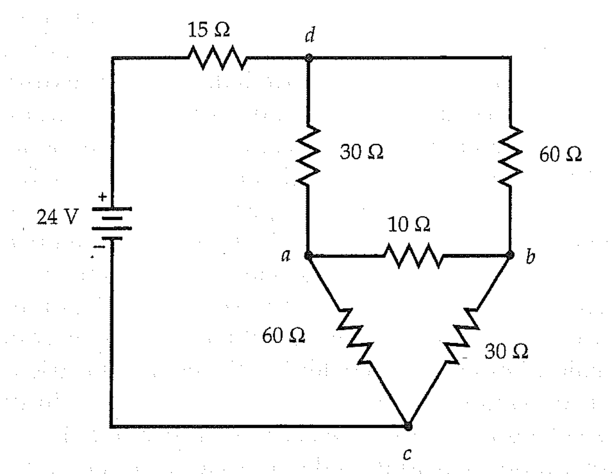


Figura E1.11

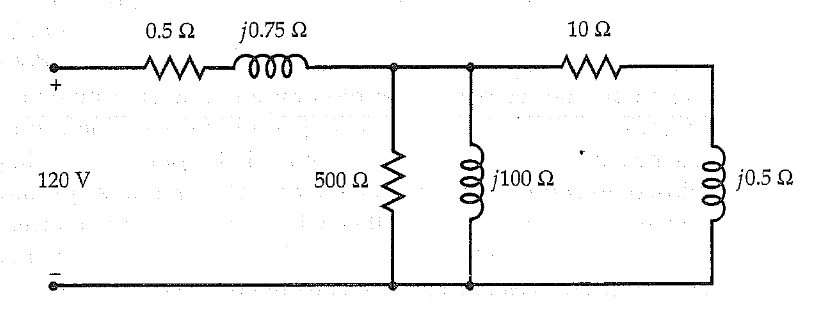


Figura E1.12

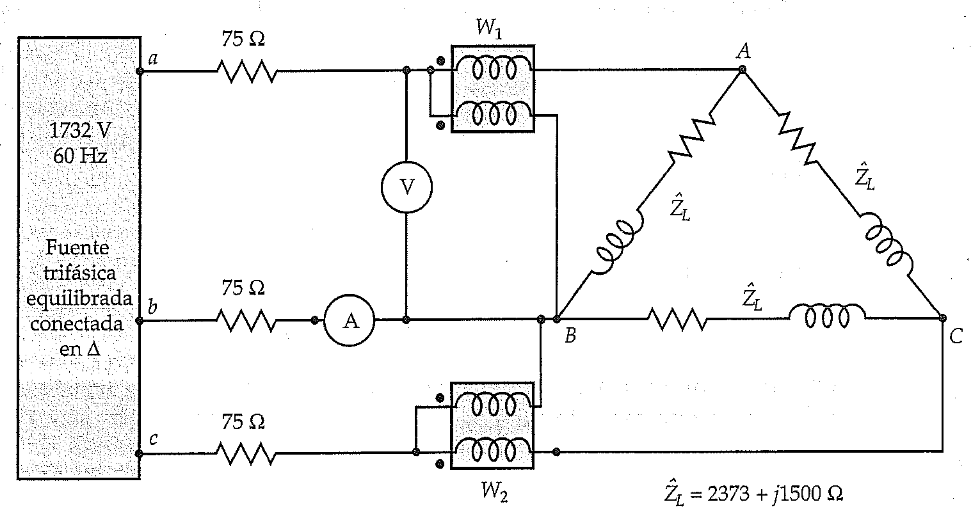


Figura E1.13

sarios los parámetros del circuito equivalente. Sobre una base exclusivamente teórica, los datos de diseño del dispositivo debieran proporcionar suficiente información acerca de esos parámetros. Por otro lado, cuando se dispone de un equipo físico, éste puede sujetarse a pruebas para determinar los parámetros de su circuito equivalente. En la presente sección se explica el procedimiento para obtener los circuitos equivalentes en serie y en paralelo de un dispositivo. En efecto, el procedimiento es tan general que puede aplicarse para modelar cualquier impedancia desconocida por medio de sus circuitos equivalentes en serie y en paralelo. A partir de ahora nos referiremos a la impedancia desconocida o al dispositivo físico como una *carga*.

Con gran frecuencia ya se sabe si una carga es puramente resistiva, inductiva (circuito *R-L*) o capacitiva (circuito *R-C*), y no hay necesidad de hacer verificaciones adicionales. Por ejemplo, cualquier dispositivo eléctrico que emplee la ley de la inducción de Faraday es inductivo por naturaleza. Un dispositivo así puede representarse con un circuito *R-L* en serie o en paralelo. Los circuitos equivalentes de los transformadores y máquinas de inducción pertenecen a esta categoría.

Por supuesto, hay situaciones en las que la naturaleza de la carga no es tan evidente. Por ejemplo, un circuito simple *R-L-C* en serie, puede comportarse como circuito puramente resistivo cuando $\omega L = 1/\omega C$, o bien como circuito inductivo si $\omega L > 1/\omega C$, o como circuito capacitivo si $\omega L < 1/\omega C$. En este caso debe determinarse su naturaleza de modo que sea posible representarla por su circuito equivalente apropiado. Para hacerlo puede aplicarse un voltaje senoidal variable a través del circuito con la frecuencia deseada y exhibir las formas de las ondas del voltaje y la corriente en un osciloscopio con pantalla de doble trazo. Un circuito es puramente resistivo cuando las formas de las ondas del voltaje y la corriente están en fase. Si la forma de la onda de la corriente se adelanta a la del voltaje, eso sugiere un circuito capacitivo. Finalmente, el circuito es inductivo si la forma de la onda de la corriente se atrasa respecto del voltaje. Observe que esta prueba se realiza simplemente para determinar la naturaleza de la carga y no pretende suministrar información precisa acerca del adelanto o del atraso.

Puede usarse un montaje experimental sencillo como el que se muestra en la figura 1.20 para determinar la impedancia desconocida $\hat{Z}$. Es posible aplicar el voltaje de operación a la frecuencia de operación a través de la carga y medir la corriente y la potencia. Si V, I y P representan las lecturas del voltímetro, amperímetro y vatímetro, respectivamente, entonces la potencia aparente que suministra la fuente y absorbe la carga es

$$S = VI$$

y el ángulo del factor de potencia es

$$\theta = \cos^{-1}(P/S)$$

Obsérvese que θ *i*) valdría cero para un circuito puramente resistivo; *ii*) estaría en atraso para una carga inductiva, y *iii*) estaría en adelanto para una carga capacitiva.

Cuando se toma el voltaje como el fasor de referencia, tal que

$$\tilde{V} = V\underline{/0^\circ}$$

la corriente puede expresarse en forma de fasor como

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= I\underline{/\pm\theta} \\ &= I\cos\theta \pm jI\,\text{sen}\,\theta \\ &= I_r \pm jI_x\end{aligned}$$

donde $I_r = I\cos\theta$ e $I_x = I\,\text{sen}\,\theta$ son las componentes real e imaginaria de la corriente $\tilde{I}$. Hay que usar el signo más (+) cuando la corriente se adelanta al voltaje y el signo menos (−) cuando se atrasa.

Si $\hat{Z}_S$ es la impedancia en serie de la carga, entonces

$$\hat{Z}_S = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = R_S \pm jX_S$$

donde el signo más denota la carga inductiva y el signo menos la carga capacitiva. En una carga puramente resistiva, X_S valdría cero.

También puede representarse la carga por su circuito equivalente paralelo, en el cual la componente resistiva de la carga se encuentra en paralelo con su componente reactiva. La corriente que pasa por la componente resistiva debe ser I_r porque está en fase con el voltaje aplicado. Por otro lado, la corriente a través de la componente reactiva debe ser I_x. Si R_p es la resistencia equivalente y X_p la reactancia equivalente del circuito en paralelo, entonces

$$R_p = \frac{V}{I_r}$$

$$X_p = \frac{V}{I_x}$$

donde

$$X_p = \omega L$$

para una carga inductiva, y

$$X_p = \frac{1}{\omega C}$$

para una carga capacitiva.

Una carga trifásica equilibrada puede probarse conectándola a una fuente trifásica equilibrada y midiendo el voltaje V_L de línea, la corriente de línea I_L y la poten-

cia total P. En la figura 1.21 se muestra el montaje experimental para medir la corriente, el voltaje y la potencia total utilizando el método de los dos vatímetros. La carga puede estar conectada en Y o en Δ. El análisis puede efectuarse por fase si se supone que la carga está conectada en Y, y luego puede usarse una transformación de Δ en Y para obtener un circuito conectado en Δ. Como el análisis por fase de un circuito trifásico no es distinto del que se hace para un circuito monofásico, no es necesario repetirlo.

En los ejemplos siguientes se indica cómo se determinan circuitos equivalentes para cargas monofásicas y trifásicas.

Ejemplo 1.8

Un circuito consta de combinaciones en serie y paralelo de resistencias, inductores y condensadores desconocidos. Al aplicarle un voltaje de 60 Hz, las lecturas del voltímetro, amperímetro y vatímetro fueron de 120 V, 5 A y 480 W, respectivamente. Con un osciloscopio de doble trazo se observó que la corriente se adelantaba al voltaje aplicado. Represente el circuito desconocido por medio de sus circuitos equivalentes en serie y en paralelo.

- **Solución**

Como la corriente se adelanta al voltaje aplicado, el circuito tiene un factor de potencia en adelanto y puede representarse con un circuito $R-C$ en serie o en paralelo. La potencia aparente que suministra la fuente y absorbe el circuito es

$$S = 120 \times 5 = 600 \text{ VA}$$

Por tanto, el ángulo del factor de potencia es

$$\theta = \cos^{-1}(480/600) = 36.87° \text{ (en adelanto)}$$

Al definir voltajes y corrientes como fasores en un circuito es necesario escoger uno de los fasores como una fase de referencia cero. Por tanto, al elegir el voltaje aplicado como la fase de referencia cero, el voltaje y la corriente aplicados en forma de fasor pueden expresarse como

$$\tilde{V} = 120\underline{/0°} \text{ V}$$

e

$$\tilde{I} = 5\underline{/36.87°} \text{ A}$$

a) CIRCUITO EN SERIE

La impedancia del circuito equivalente en serie es

$$\hat{Z}_S = \frac{120\angle 0^\circ}{5\angle 36.87^\circ} = 24\angle -36.87^\circ \ \Omega$$

$$= 19.2 - j14.4 \ \Omega$$

La capacitancia equivalente del circuito en serie es

$$C = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 14.4} = 184.21 \ \mu\text{F}$$

Por consiguiente, el circuito desconocido puede representarse con un circuito equivalente que consta de una resistencia de 19.2 Ω en serie con un condensador de 184.21 μF, como se indica en la figura 1.22*a*.

b) CIRCUITO EN PARALELO

Las componentes real e imaginaria de la corriente son

$$I_r = 5 \cos (36.87^\circ) = 4 \text{ A}$$

e

$$I_x = 5 \text{ sen } (36.87^\circ) = 3 \text{ A}$$

En consecuencia,

$$R_p = \frac{120}{4} = 30 \ \Omega$$

$$X_p = \frac{120}{3} = 40 \ \Omega$$

y la capacitancia del circuito es

$$C_p = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 40} = 66.3\ \mu\text{F}$$

Así, el circuito equivalente en paralelo consta de una resistencia de 30 Ω en paralelo con un condensador de 66.3 μF, como se muestra en la figura 1.22*b*.

■

Ejemplo 1.9

Un motor de inducción trifásico equilibrado consume 3246 W cuando el voltaje de línea es de 208 V y la corriente de línea es de 10.6 A. Represente el motor por sus cuatro circuitos equivalentes.

● **Solución**

a) Conexión en Y

Si se supone que el motor está conectado en Y, puede extraerse la información siguiente por fase a partir de los datos de prueba que se proporcionan.

Voltaje por fase:	$V_\phi = 208/\sqrt{3} \approx 120$ V
Corriente por fase:	$I_\phi = 10.6$ A
Potencia por fase:	$P_\phi = 3246/3 = 1082$ W
Potencia aparente por fase:	$S_\phi = 120 \times 10.6 = 1272$ VA

Como un motor de inducción tiene un factor de potencia de atraso, el ángulo del factor de potencia es

$$\theta = \cos^{-1}(1082/1272) \approx 31.72° \text{ (en atraso)}$$

Utilizando el voltaje de la fase *a* como la fase de referencia cero, el voltaje de fase y la corriente de fase pueden expresarse en sus formas fasoras como

$$\tilde{V}_{AN} = 120\underline{/0°}\ \text{V}$$

$$\tilde{I}_{AN} = 10.6\underline{/-31.72°}\ \text{A}$$

Por tanto, la impedancia en serie por fase del motor es

$$\hat{Z}_Y = \frac{120\underline{/0°}}{10.6\underline{/-31.72°}} = 11.32\underline{/31.72°}\ \Omega$$

$$= 9.63 + j5.95\ \Omega$$

En la figura 1.23*a* se muestra el circuito equivalente conectado en Y de un motor de inducción trifásico.

Las componentes real e imaginaria de la corriente son

$$I_r = 10.6 \cos (31.72°) = 9.017 \text{ A}$$

$$I_x = 10.6 \text{ sen } (31.72°) = 5.573 \text{ A}$$

Consideradas por fase, las componentes del circuito en paralelo equivalente son

$$R_p = \frac{120}{9.017} = 13.31 \ \Omega$$

y

$$X_p = \frac{120}{5.573} = 21.53 \ \Omega$$

El circuito equivalente en paralelo conectado en Y del motor de inducción trifásica se ilustra en la figura 1.23*b*.

b) CONEXIÓN EN Δ

Puesto que

$$\hat{Z}\Delta = 3\hat{Z}_Y$$

sencillamente puede multiplicarse por 3 las impedancias por fase conectadas en Y para obtener las impedancias conectadas en Δ tanto para las conexiones en serie como en paralelo. En las figuras 1.24*a* y 1.24*b* se ilustran los circuitos equivalentes en serie y en paralelo conectados en Δ, respectivamente. Invitamos a los estudiantes a comprobar estos circuitos equivalentes con las lecturas de voltaje, corriente y potencia.

■

Ejercicios

1.14. Se miden la corriente, el voltaje y la potencia en un circuito capacitivo y las lecturas son de 3 A, 450 V y 810 W, respectivamente. Defina *a*) el circuito equivalente en serie y *b*) el circuito equivalente en paralelo.

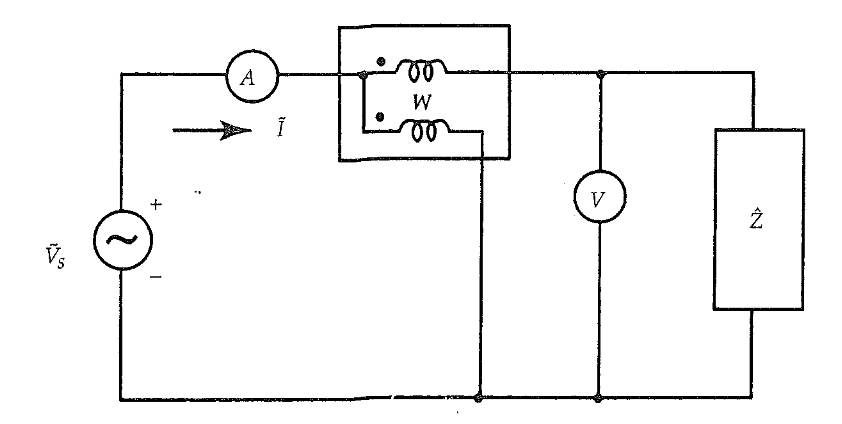


Figura 1.20. Montaje experimental para determinar la impedancia desconocida $\hat{Z}$.

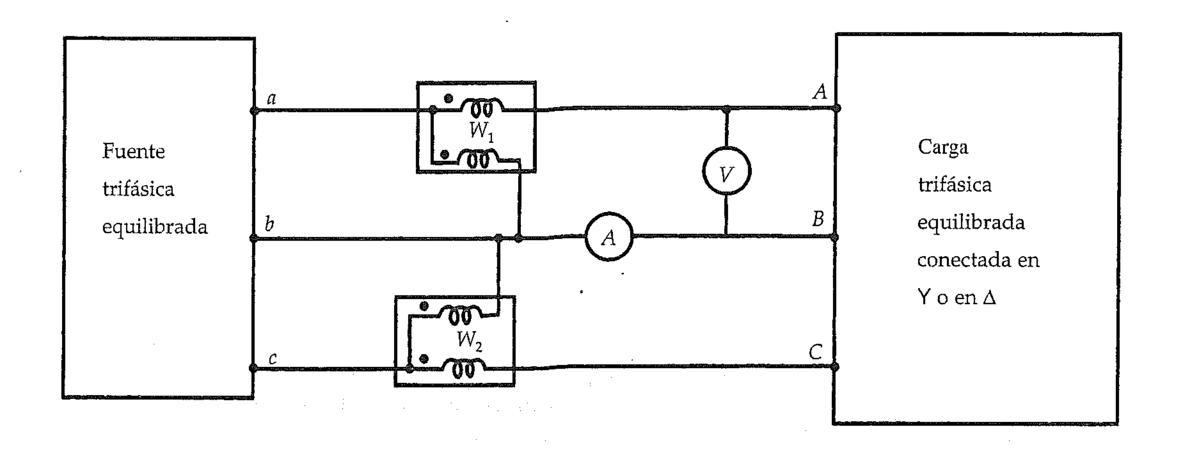


Figura 1.21. Montaje experimental para determinar el circuito equivalente de una carga trifásica.

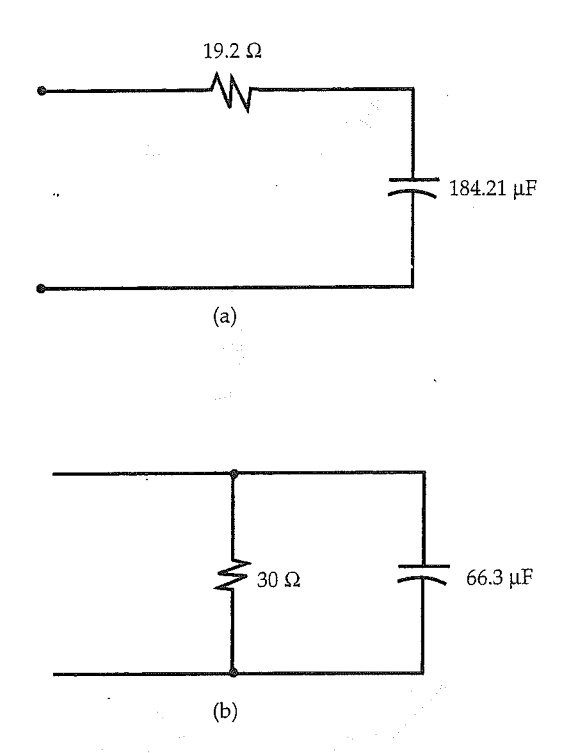


Figura 1.22. Circuitos equivalentes para el ejemplo 1.8, **(a)** en serie y **(b)** en paralelo.

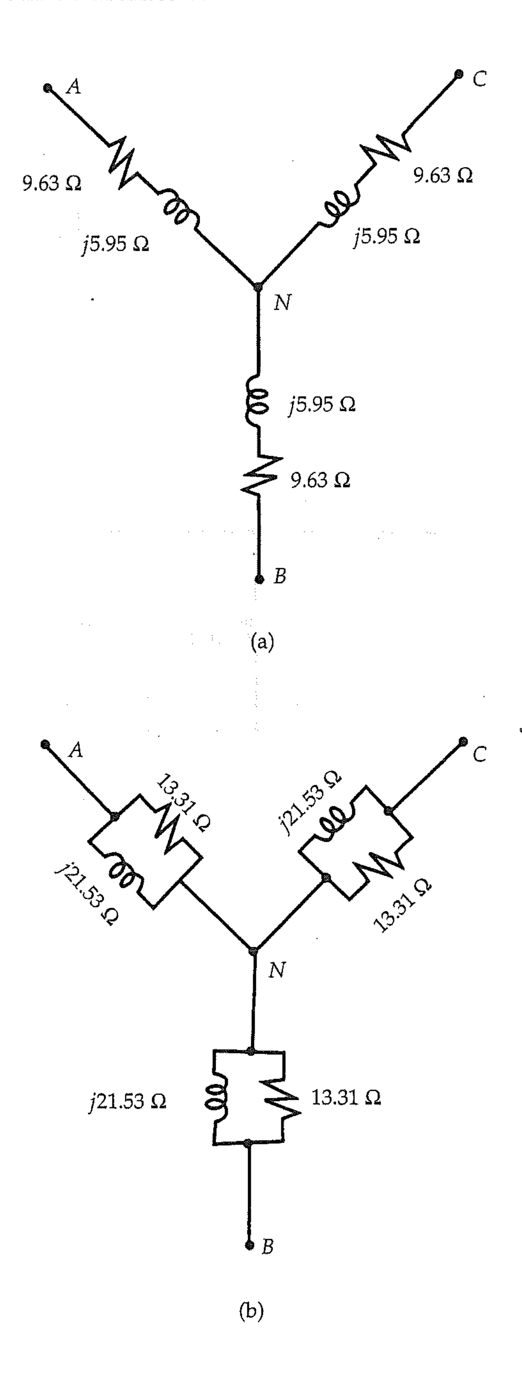
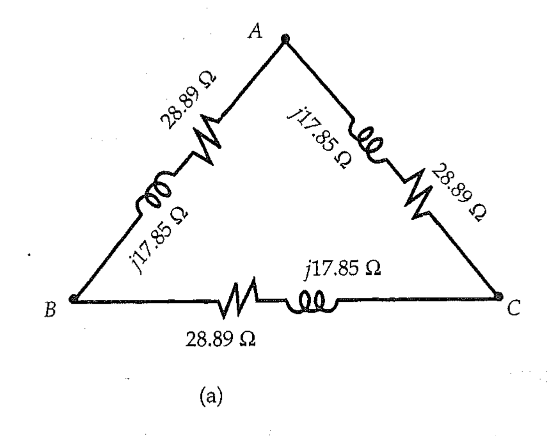


Figura 1.23. Circuitos equivalentes conectados en Y para el ejemplo 1.9, **(a)** en serie y **(b)** en paralelo.



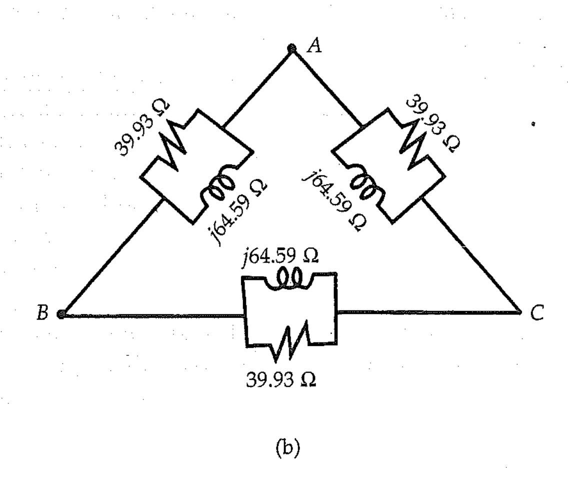


Figura 1.24. Circuitos equivalentes conectados en Δ para el ejemplo 1.9, **(a)** en serie y **(b)** en paralelo.

1.15. Se miden la corriente, el voltaje y el factor de potencia de una carga trifásica equilibrada y resultan ser de 8.66 A, 208 V y 0.8 en atraso, respectivamente. Si la carga está conectada en Y, encuentre *a*) el circuito equivalente en serie y *b*) el circuito equivalente en paralelo.

1.16. Repita el ejercicio 1.15 para una carga conectada en Δ.

Resumen

En este capítulo se repasaron algunas de las técnicas usadas para analizar circuitos eléctricos. En primer lugar se enunciaron las leyes experimentales de la teoría de circuitos eléctricos y luego se explicó su aplicación a fin de resolver circuitos de cc, circuitos monofásicos y circuitos trifásicos.

También se enunciaron y aplicaron dos teoremas importantes, el de Thévenin y el de máxima transferencia de potencia.

Se repasó el concepto de fasores y se explicó cómo representar en forma de fasor un voltaje y una corriente. Al elegir como referencia un fasor, se mostró cómo puede trazarse y usarse un diagrama de fasores. También se revisaron los conceptos de potencia compleja, potencia real y potencia reactiva. Se destacó la técnica pasiva de corrección del factor de potencia por medio de condensadores.

Generalmente, los estudiantes se ven abrumados por los circuitos trifásicos. Parece haber algo en éstos que los desconcierta. Se intentó evitar el misterio de tales circuitos explicando las secuencias de fase positiva y negativa, las diferencias entre los circuitos con conexión en Y y en Δ, y las transformaciones de Δ en Y.

Nuestra experiencia de varios años nos indica que los estudiantes tienden a quedar perplejos cuando se requiere conectar un vatímetro en el circuito. Nos dedicamos a calmar su recelo explicándoles cómo funciona ese instrumento. También explicamos el método de los dos vatímetros para medir la potencia total en un circuito trifásico.

A fin de que puedan consultarse rápidamente, a continuación se resumen algunas de las ecuaciones más importantes que se presentaron en el capítulo:

Ley de Ohm: $\tilde{V} = \tilde{I}\hat{Z}$

Ley de la corriente de Kirchhoff: $\sum_{i=1}^{n} \tilde{I}_i = 0$

Ley del voltaje de Kirchhoff: $\sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i = 0$

Potencia compleja: $\hat{S} = \tilde{V}\tilde{I}^* = P + jQ$

Teorema de la máxima transferencia de potencia: $\hat{Z}_L = \hat{Z}_T^*$

Sistema trifásico equilibrado

Secuencia de fase positiva: $\tilde{V}_{an} = V\underline{/\theta}$, $\tilde{V}_{bn} = V\underline{/\theta - 120°}$, $\tilde{V}_{cn} = V\underline{/\theta + 120°}$

Secuencia de fase negativa: $\tilde{V}_{an} = V\underline{/\theta}$, $\tilde{V}_{bn} = V\underline{/\theta + 120°}$, $\tilde{V}_{cn} = V\underline{/\theta - 120°}$

Fuente conectada en Y: $\tilde{V}_\ell = \sqrt{3}\tilde{V}\underline{/\pm 30°}$ (+ para secuencia de fase positiva)

$\tilde{I}_\ell = \tilde{I}$

Fuente conectada en Δ: $\tilde{V}_\ell = \tilde{V}$

$\tilde{I}_\ell = \sqrt{3}\tilde{I}\underline{/\pm 30°}$ (− para secuencia de fase negativa)

Potencia trifásica: $P = 3VI\cos\theta = \sqrt{3}V_\ell I_\ell \cos\theta$

Preguntas de repaso

1.1. Por un punto de referencia en un conductor pasan electrones a una tasa de 3×10^{23} por hora. ¿Cuál es la corriente en amperes?

1.2. Una lámpara de 60 W porta una corriente de 0.5 A cuando se conecta a una fuente de cc. ¿Cuál es el voltaje de la fuente? ¿Cuál es la carga total que pasa a través de su filamento durante dos horas?

1.3. Una resistencia de 100 Ω está especificada para 0.5 W. ¿Cuál es el voltaje máximo que puede soportar con seguridad? ¿Cuál es la corriente máxima que puede fluir por ella en forma segura? ¿Podría soportar sin riesgo la corriente máxima cuando se aplique el máximo voltaje a través de ella?

1.4. Si se gasta 1 joule de energía al mover una carga de 1 coulomb de un punto a otro de un circuito, la diferencia de potencial entre los dos puntos es de ___ .

1.5. Exponga las diferencias entre un circuito lineal y otro no lineal.

1.6. ¿Puede aplicarse la ley de Ohm a circuitos no lineales? Explique por qué.

1.7. Enuncie las leyes de Kirchhoff de la corriente y del voltaje. ¿Qué significa el término *suma algebraica*?

1.8. Al conectarse una resistencia a una batería de 24 V, la corriente que pasa a través de ella es de 1.2 A. Calcule la resistencia que debe insertarse en serie para reducir la corriente a 0.8 A.

1.9. Un generador de cc puede representarse con una fuente de voltaje en serie con una resistencia. El voltaje de circuito abierto (sin carga) del generador es

124 V. Una resistencia de carga de 24 Ω toma una corriente de 5 A. ¿Cuál es la resistencia interna del generador?

1.10. Un generador de cc alimenta energía a una carga por medio de una línea de transmisión de 1.25 Ω. El voltaje de la carga es de 220 V. Si la caída del voltaje en la línea no debe exceder 10% del voltaje de la carga, ¿cuál es la máxima potencia que puede alimentarse a la carga?

1.11. Por dos resistencias en paralelo circulan corrientes de 2 y 5 A. Si una resistencia es de 100 Ω, ¿cuál es el valor de la otra?

1.12. ¿Cuántos valores de resistencias pueden obtenerse con tres resistencias de 1 kΩ, 5 kΩ y 200 Ω?

1.13. Un calentador eléctrico de 1200 W opera con un suministro de 120 V y 60 Hz. ¿Cuál es la corriente rms a través del calentador? ¿Cuál es la corriente instantánea máxima? ¿Cuál es la resistencia del calentador? Trace las curvas de $v(t)$ e $i(t)$ en función del tiempo.

1.14. Un circuito en serie consta de una resistencia de 10 Ω, una inductancia de 0.5 mH y una capacitancia de 200 μF. ¿Cuál es la impedancia del circuito a una frecuencia de 60 Hz? La impedancia, ¿es inductiva o capacitiva?

1.15. Una fuente de voltaje de $120\underline{/-30^\circ}$ V suministra una corriente de $2\underline{/-20^\circ}$ A a una carga. La carga, ¿es inductiva o capacitiva? ¿Cuál es el factor de potencia de la carga? Calcule las potencias promedio, reactiva y aparente que se alimentan a la carga.

1.16. Un circuito de ca puede representarse por una fuente de voltaje de $25\underline{/45^\circ}$ V en serie con una impedancia de $15 + j20$ Ω. Con objeto de transferir la potencia máxima a la carga, ¿cuál debe ser la impedancia de esta última? ¿Cuál es la corriente en el circuito? ¿Cuánta potencia se transfiere a la carga?

1.17. El voltaje de la fase b de una fuente trifásica equilibrada es de $\tilde{V}_{bn} = 120\underline{/-60^\circ}$ V. ¿Cuáles son los otros voltajes de fase para a) secuencia de fase positiva y b) secuencia de fase negativa?

1.18. El voltaje de línea de una fuente trifásica equilibrada es de $\hat{V}_{cb} = 17.32\underline{/-30^\circ}$ kV. ¿Cuáles son los voltajes de fase y de línea si la secuencia de fase es positiva?

1.19. ¿Cuáles son las diferencias entre la potencia aparente, la potencia real y la potencia reactiva?

1.20. ¿Por qué la potencia aparente se expresa en VA, la potencia real en W y la potencia reactiva en VAR?

1.21. Una estudiante sugirió que puede mejorarse el factor de potencia si se conecta una resistencia en lugar de un condensador en paralelo con una carga inductiva. ¿Qué opina usted? ¿Cuáles son sus implicaciones?

1.22. En las técnicas de corrección del factor de potencia siempre se usan condensadores en paralelo con la carga. ¿Por qué no pueden usarse condensadores en serie con la carga?

1.23. ¿Por qué es necesaria la corrección del factor de potencia?

1.24. ¿Es más económico utilizar un banco de condensadores conectados en Δ en lugar de otro banco de condensadores conectados en Y para la corrección del factor de potencia en circuitos trifásicos?

1.25. Un estudiante sugiere que el factor de potencia de una carga puede determinarse por medio de las lecturas de dos vatímetros, con la fórmula siguiente

$$\cos\theta = \left[\frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}\, V_\ell I_\ell}\right]$$

¿En qué condiciones proporciona esta ecuación el factor de potencia exacto?

Problemas

1.1. Un calentador eléctrico toma 576 W cuando se conecta a una fuente de cc de cierto voltaje. Si éste aumenta 10%, la corriente que pasa por el calentador es de 5.28 A. Calcule *a*) el voltaje original y *b*) la resistencia del calentador.

1.2. Un motor de cc toma 20 A de una fuente de cc de 120 V. El motor opera 10 horas cada día. Si el costo de la energía es de 10 centavos por kilowatt–hora (kWh), ¿de cuánto es el importe mensual por operar este motor? Suponga un mes de 30 días.

1.3. Un generador remoto de cc (el extremo que envía) transmite potencia por medio de una línea de transmisión que tiene una resistencia de 0.2 Ω a una carga de 10 kW (extremo que recibe). El voltaje de la carga es 125 V. ¿Cuál es el voltaje en el extremo que envía? ¿Cuánta potencia se pierde debido a la línea de transmisión?

1.4. Obtenga la corriente en cada rama del circuito que se muestra en la figura P1.4 aplicando *a*) el método del nodo de voltaje y *b*) el método de la malla de corriente.

1.5. En el circuito de la figura P1.5, ¿qué valor de R_L disipa la potencia máxima del circuito? ¿Cuál es la potencia máxima disipada por ella?

1.6. ¿Cuál es la potencia disipada por cada resistencia de la figura P1.6? ¿Cuánta potencia suministra cada fuente?

1.7. Aplique el teorema de superposición para encontrar la corriente en la resistencia de 10 Ω del circuito descrito en la figura P1.7.

1.8. Encuentre la corriente y la caída del voltaje a través de cada elemento del circuito delineado en la figura P1.8 aplicando *a*) el método del nodo de voltaje y *b*) el método de la malla de corriente. ¿Cuál debe ser la especificación de potencia de cada resistencia?

1.9. Aplique el teorema de superposición para encontrar la corriente que pasa por la resistencia de 200 Ω en el circuito de la figura P1.8. ¿Cuánta potencia se disipa en la resistencia?

1.10. En la figura P1.10 se muestra un circuito equivalente de un transformador. Si la impedancia de la carga es $200 + j300$ Ω y el voltaje de la carga es de 120 V, encuentre el voltaje aplicado $\tilde{V}_s$. Calcule la potencia de salida hacia la carga y

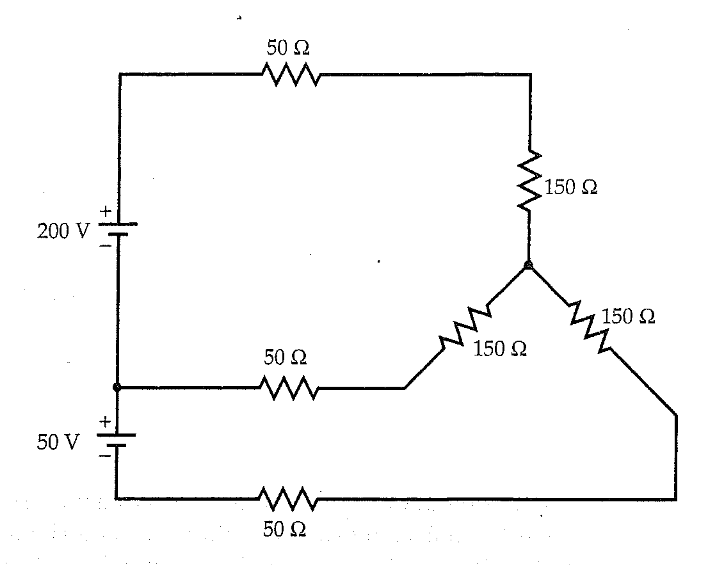


Figura P1.4

la potencia que suministra la fuente. ¿Cuál es la eficiencia del transformador? [*Observación:* la eficiencia se define como la razón de la potencia de salida entre la potencia de entrada.]

1.11. Se aplica una fuente de 120 V y 60 Hz a través de una carga inductiva de 100 + *j*700 Ω. ¿Cuál es el factor de potencia de la carga? ¿Cuál debe ser el tamaño del condensador que puede colocarse en paralelo con la carga a fin de mejorar el factor de potencia hasta 0.95 en atraso? Trace el diagrama de fasores para ilustrar la mejora en el factor de potencia.

1.12. Cierta carga toma 10 kW con un factor de potencia de 0.5 en atraso cuando se conecta a una fuente de 230 V y 60 Hz. Si el factor de potencia baja de 0.8 la compañía aplica una penalización. ¿De qué tamaño debe ser el condensador que se use con objeto de evitarla?

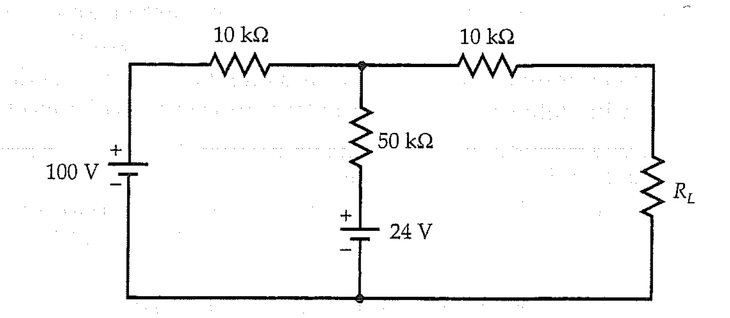


Figura P1.5

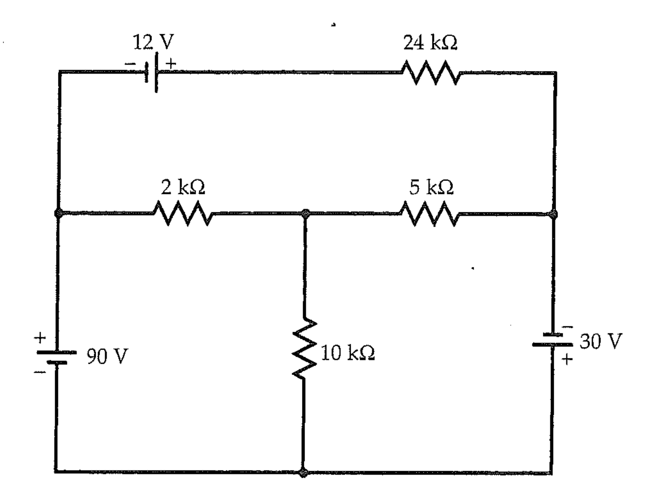


Figura P1.6

1.13. Un calentador eléctrico toma 1000 W con un factor de potencia igual a 1 a partir de un suministro de 120 V y 60 Hz. Cuando se conecta un motor de inducción monofásico al suministro, el factor de potencia de la carga total se convierte en 0.8 en atraso. Si la exigencia de potencia del motor es de 1750 W, ¿cuál es su factor de potencia? ¿De qué tamaño debe ser el condensador que debe conectarse para mejorar el factor de potencia a 0.9 en atraso? Trace el diagrama de fasores para cada caso.

1.14. Un generador monofásico se encuentra a 10 km de la carga. La impedancia de la línea de transmisión es de 2 + *j*4 mΩ por kilómetro. La carga requiere 10 kW a 860 V. Encuentre el voltaje del generador y la pérdida de potencia en la línea si el factor de potencia de la carga es *a*) uno; *b*) 0.8 en atraso, y *c*) 0.8 en adelanto. Trace el diagrama de fasores para cada caso.

1.15. Se miden la corriente, el voltaje y la potencia a una carga inductiva y se encuentra que son 10 A, 120 V y 800 W, respectivamente. Represente la carga por *a*) un circuito equivalente en serie y *b*) un circuito equivalente en paralelo.

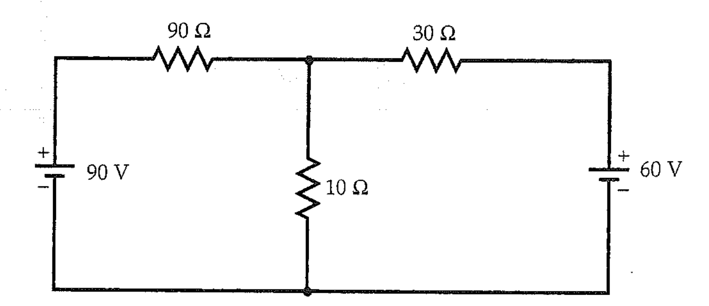


Figura P1.7

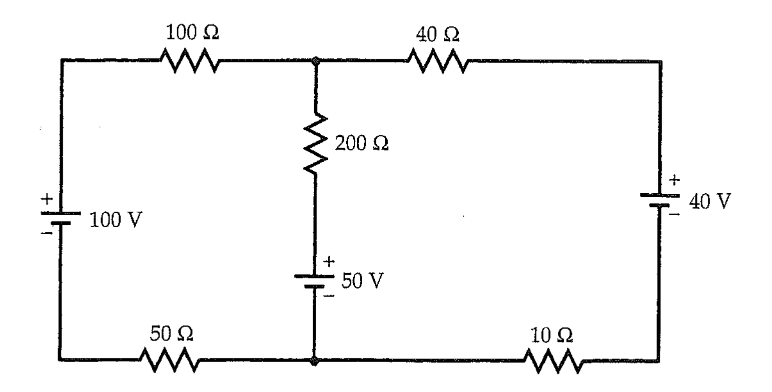


Figura P1.8

1.16. Se miden la corriente, el voltaje y el factor de potencia de una carga y resultan ser de 5 A, 230 V y 0.8 en adelanto. Represente la carga por *a*) un circuito equivalente en serie y *b*) un circuito equivalente en paralelo.

1.17. Se conecta un vatímetro en un circuito, como se muestra en la figura P1.17. ¿Cuál debe ser la lectura en el instrumento?

1.18. Una fuente trifásica equilibrada de 220 V y 60 Hz conectada en Y, con una secuencia de fase positiva, alimenta una carga no equilibrada, como aparece en la figura P1.18. ¿Cuál es la corriente en el hilo neutro? ¿Cuál es la potencia total disipada por la carga? Trace un esquema que ayude a medir la necesidad de potencia de cada fase.

1.19. En la figura P1.18, si el hilo neutro se desconecta, ¿cuál debe ser la corriente en cada fase? ¿Cuáles son los voltajes trifásicos? Trace un esquema que per-

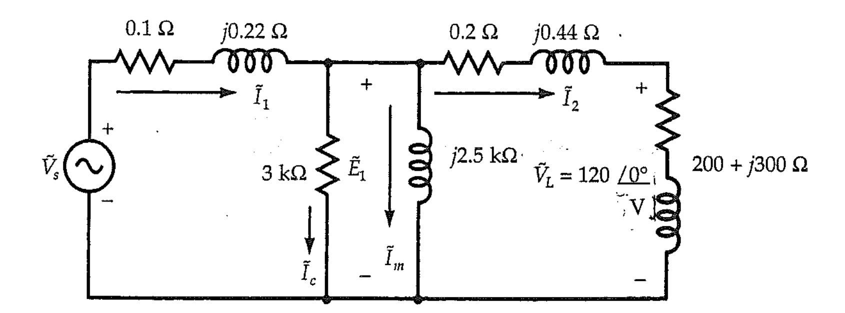


Figura P1.10

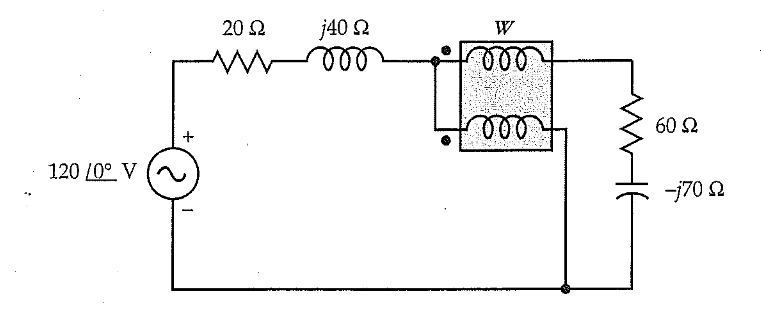


Figura P1.17

mita medir la necesidad total de potencia. ¿Hay algún cambio en la potencia total que necesita la carga?

1.20. Una carga trifásica equilibrada disipa 12 kW con un factor de potencia de 0.8 en atraso, a partir de un suministro trifásico equilibrado de 460 V, 60 Hz y conectado en Y. Para una carga conectada en Y, obtenga un circuito equivalente *a*) en serie y *b*) en paralelo.

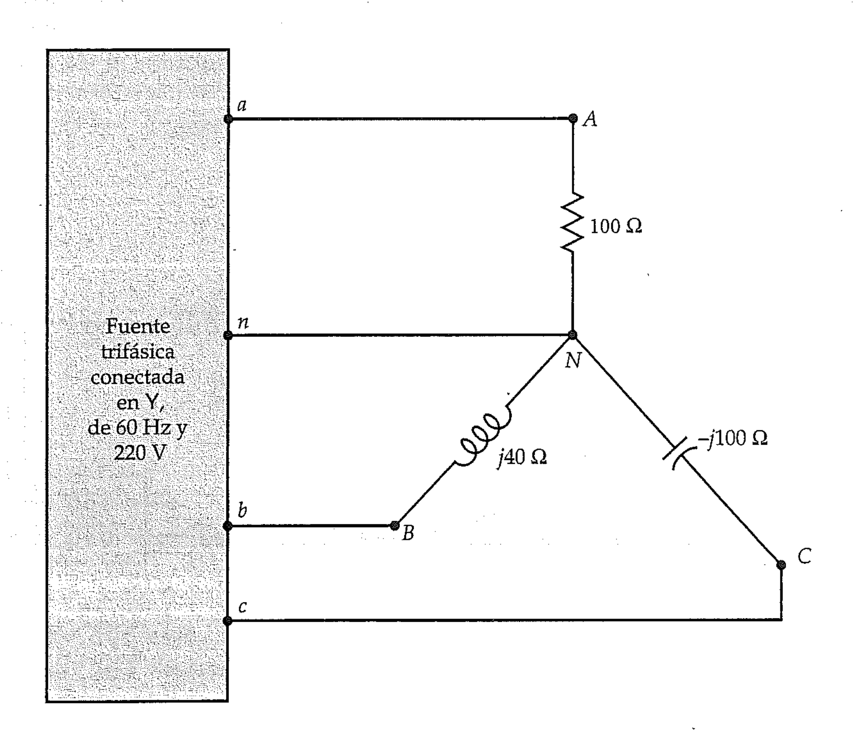


Figura P1.18

1.21. Una carga trifásica equilibrada disipa 15 kW con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, a partir de una fuente equilibrada de 208 V y 50 Hz, conectada en Δ. Para una carga conectada en Δ, obtenga un circuito equivalente *a*) en serie y *b*) en paralelo.

1.22. Se conecta una carga trifásica equilibrada a un suministro trifásico equilibrado por medio de una línea de transmisión, como se muestra en la figura P1.22. ¿Cuáles deben ser las lecturas en los dos vatímetros, el amperímetro y el voltímetro? ¿Cuál es la potencia total que se suministra a la carga?

1.23. Un estudiante ingenioso le juega una broma a un compañero: conecta un vatímetro según se ilustra en la figura P1.23. ¿Qué lectura debe dar el instrumento?

1.24. La carga en una fuente trifásica equilibrada de 460 V y 60 Hz, conectada en Y, consta de tres impedancias iguales, conectadas en Y, de $100 + j100\ \Omega$, y tres impedancias iguales conectadas en Δ de $300 + j300\ \Omega$. Calcule la corriente de línea, la potencia y el factor de potencia para la carga total.

1.25. Una fuente trifásica equilibrada, conectada en Y, de 230 V y 60 Hz, suministra 600 W a una carga conectada en Y con un factor de potencia de 0.7 en atraso. Para mejorar el factor de potencia a 0.85 en atraso, se colocan en paralelo con la carga tres condensadores iguales conectados en Y. ¿Cuál debe ser el tamaño de cada condensador? ¿Cuál debe ser el tamaño de cada condensador si se conectan en Δ?

1.26. Una carga conectada en Y, con una impedancia de $12 - j15\ \Omega$ por fase, se conecta a un suministro trifásico equilibrado con secuencia de fase positiva, conectado en Δ, de 208 V y 60 Hz. Determine *a*) los voltajes de línea y de fase; *b*) las corrientes de línea y de fase, y *c*) las potencias aparente, activa y reactiva en la carga. Trace el diagrama de fasores y el diagrama de potencia.

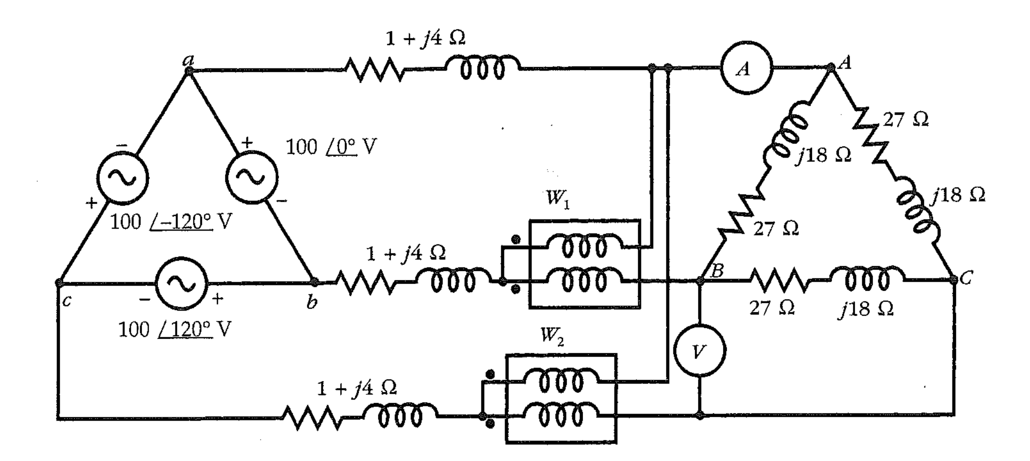


Figura P1.22

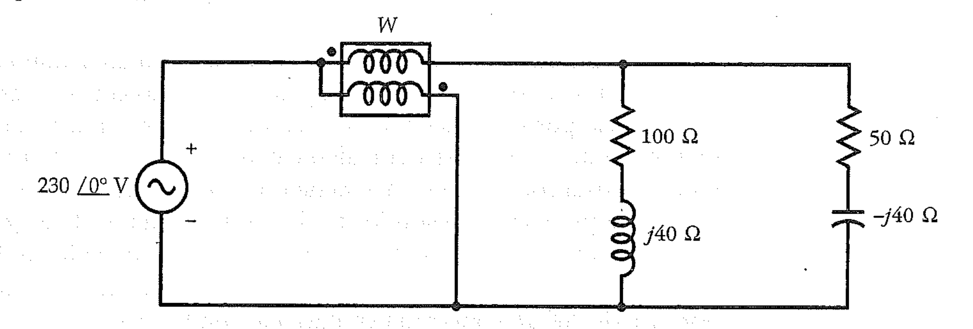


Figura P1.23

1.27. La potencia total alimentada a una carga trifásica equilibrada, conectada en Y, es de 720 kW con un factor de potencia de 0.8 en atraso. El voltaje de línea en la carga es 3464 V. La impedancia de la línea de transmisión es de 2.5 + j10.2 Ω. ¿Cuál es el voltaje de línea en el extremo de la línea de transmisión que envía? ¿Cuánta potencia se disipa por la línea de transmisión? ¿Cuál es la potencia total que suministra la fuente? Calcule la impedancia de carga por fase.

1.28. Una fuente trifásica equilibrada, conectada en Y, proporciona potencia a una carga desequilibrada conectada en Δ. Las impedancias de la carga por fase son $\hat{Z}_{AB} = 40 + j30$ Ω, $\hat{Z}_{BC} = 20$ Ω y $\hat{Z}_{CA} = 10 + j10$ Ω. El voltaje de línea es de 173.21 V y la secuencia de fase es positiva. Calcule *a*) las corrientes de fase; *b*) las corrientes de línea; *c*) la potencia disipada en cada fase, y *d*) la potencia total que suministra la fuente. Si las bobinas de corriente de dos vatímetros se conectan a las líneas *a* y *b*, y las bobinas de potencial se conectan a la línea *c*, ¿cuál debe ser la lectura en cada vatímetro? ¿La potencia que miden los dos vatímetros es la misma potencia consumida por la carga desequilibrada?

1.29. La impedancia por fase de una carga conectada en Δ es de 150 + j90 Ω. La potencia a la carga se suministra de una fuente conectada en Y mediante una línea de transmisión. La impedancia por línea es 5 + j10 Ω. El voltaje de línea en la carga es de 600 V. ¿Cuál es el voltaje de línea de la fuente? ¿Cuál es la potencia total que suministra la fuente? Si las bobinas de corriente de dos vatímetros se conectan en las líneas *a* y *c* y las bobinas de potencial se conectan a la línea *b*, ¿cuál debe ser la lectura en cada vatímetro? Suponga una secuencia de fase positiva.

1.30. Una carga trifásica equilibrada disipa 48 kW con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. El voltaje de línea en la carga es de 240 V. Represente la impedancia de la carga mediante cuatro circuitos equivalentes.

1.31. Una fuente trifásica de 1732 V, conectada en Y, alimenta energía a dos máquinas trifásicas conectadas en paralelo. Una máquina absorbe 240 kVA con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, y la otra requiere de 150 kW con un factor de potencia de 0.707 en atraso. ¿Cuál es la corriente que suministra la fuente? ¿Cuál es la potencia que suministra la fuente? ¿Cuál es el factor de po-

tencia conjunto? Represente cada máquina por medio de un circuito equivalente conectado en Y.

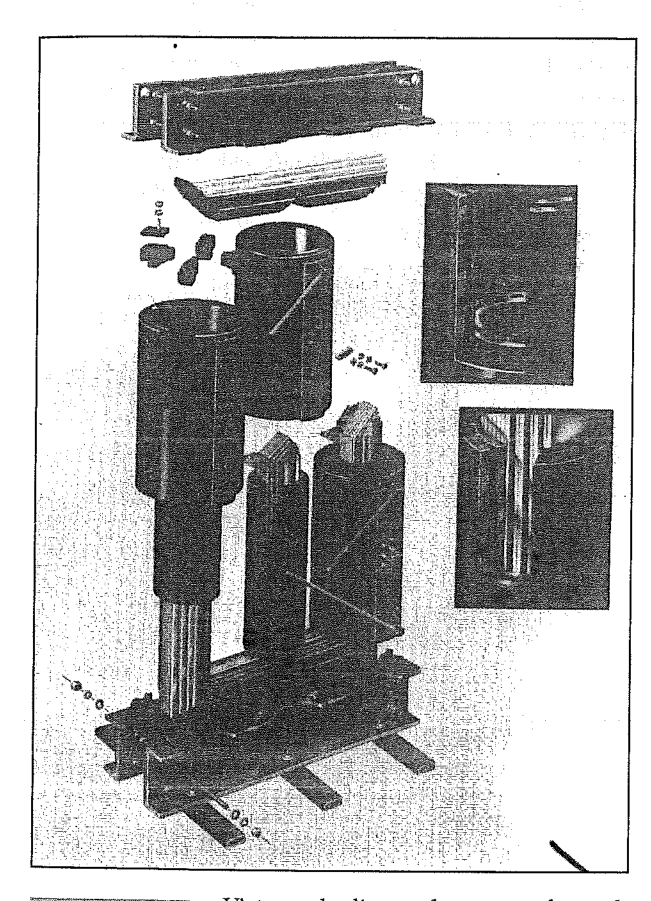
1.32. Una fuente trifásica de 1732 V y 60 Hz conectada en Y alimenta energía por medio de una línea de transmisión a dos máquinas conectadas en paralelo. La impedancia por línea es de $0.5 + j5\ \Omega$. Puede representarse una máquina con una impedancia por fase equivalente conectada en Δ de $150 + j450\ \Omega$. La otra máquina está conectada en Y y tiene una impedancia por fase de $40 - j320\ \Omega$. Calcule la potencia que suministra la fuente. ¿Cuál es la exigencia de potencia de cada máquina? ¿Cuánta potencia se disipa en la línea de transmisión?

1.33. Repita el problema 1.32 con una carga conectada en Δ con una impedancia por fase de $300\ \Omega$, conectada en paralelo con las máquinas.

1.34. Repita el problema 1.32 para un banco de condensadores conectado en Δ, con una impedancia de $-j1023\ \Omega$ por fase, conectado en paralelo con las máquinas. ¿Cuál es el tamaño de cada capacitancia?

2

Repaso de las leyes básicas del electromagnetismo



Vista en despliegue de un transformador de potencia en la que se resalta su núcleo magnético y devanados con aislante moldeado. (*Cortesía de Square D Company.*)

2.1. Introducción

El comportamiento y las características de una máquina eléctrica se entienden y predicen mejor si se comprende no sólo su construcción física, sino también la función que desempeña el campo magnético en esa máquina, ya que casi todos los equipos prácticos para conversión de la energía utilizan tal campo como medio. El campo magnético puede generarse mediante un devanado (bobina) o un imán permanente. Si el campo magnético se produce con un devanado, puede ser de magnitud constante (cc) o estar en función del tiempo (ca).

En los transformadores, el campo magnético de ca ayuda a transferir energía del lado primario (entrada) al lado secundario (salida). No se necesita conexión eléctrica entre los dos lados del transformador. El proceso de transferencia de energía se basa en el principio de inducción.

Sin embargo, en las máquinas de cc y síncronas, es el campo magnético uniforme (constante) el que facilita la conversión de energía eléctrica en mecánica (acción de un motor), o de energía mecánica en eléctrica (acción de un generador). Descubriremos que ambas acciones, la del motor y la del generador, existen en forma simultánea en todo dispositivo de conversión de energía electromecánica. En otras palabras, no puede haber una acción sin la otra.

Por tanto, es evidente que el estudio de las máquinas eléctricas requiere una comprensión básica de los campos electromagnéticos. El propósito de este capítulo es repasar las leyes fundamentales del electromagnetismo, las cuales usted debe conocer (en cualquier libro sobre la teoría del campo electromagnético puede consultarlas).

2.2. Ecuaciones de Maxwell

La teoría fundamental de los campos electromagnéticos se basa en las cuatro ecuaciones de Maxwell, que no son sino generalizaciones de leyes que se basan en experimentos. Nuestro objetivo en este capítulo no es esbozar la historia de esos experimentos, sino presentarlos en la forma que sea más útil desde el punto de vista de su aplicación. Las cuatro ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{o} \quad \oint_c \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \tag{2.1a}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{o} \quad \oint_c \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = \oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \tag{2.1b}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{o} \quad \oint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \tag{2.1c}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{o} \quad \oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_v \rho\, dv \tag{2.1d}$$

donde $\vec{E}$ es la intensidad del campo eléctrico medida en volts/metro (V/m)
$\vec{H}$ es la intensidad del campo magnético, en amperes/metro (A/m)
$\vec{B}$ es la densidad del flujo magnético, en teslas (T) o webers/metro^2 (Wb/m^2)
$\vec{D}$ es la densidad del flujo eléctrico, en coulombs/metro^2 (C/m^2)
$\vec{J}$ es el volumen de la densidad de corriente, en amperes/metro^2 (A/m^2)
ρ es el volumen de la densidad de carga, en coulombs/metro^3 (C/m^3).

En las ecuaciones (2.1*a*) y (2.1*b*) s es la superficie abierta limitada por un contorno cerrado c. Sin embargo, en las ecuaciones (2.1*c*) y (2.1*d*) v es el volumen limitado por una superficie cerrada s.

Las ecuaciones citadas se relacionan entre sí por la ley de conservación de la carga, la cual también se conoce como la *ecuación de continuidad*. Es decir,

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.2}$$

Además de las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de continuidad, debemos incluir la *ecuación de fuerza de Lorentz*

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \tag{2.3}$$

que define la fuerza que experimenta una carga q que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ a través de un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$.

Aquí cabe mencionar que $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son los campos fundamentales y $\vec{D}$ y $\vec{B}$ son los campos derivados. Los campos derivados se vinculan con los fundamentales por medio de las relaciones constitutivas siguientes:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \tag{2.4a}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \tag{2.4b}$$

donde ϵ es la permitividad, μ es la permeabilidad, ϵ_r es la constante diélectrica y μ_r es la permeabilidad relativa del medio. ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y la permeabilidad del espacio libre, respectivamente.

En el sistema internacional (SI) de unidades,

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ farad/metro (F/m)} \tag{2.5a}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ henry/metro (H/m)} \tag{2.5b}$$

Fuerza electromotriz inducida

La ecuación (2.1*a*) es un caso especial de la ley de inducción de Faraday. Representa la fuerza electromotriz inducida (fem) en una espira cerrada *estacionaria* debida a una tasa de cambio de la densidad del flujo magnético respecto al tiempo. Es decir,

$$e_t = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \tag{2.6}$$

Como la trayectoria cerrada es estacionaria, la fem inducida también se conoce como *fem de transformación*. Por ello, la ecuación (2.6) se llama *ecuación de transformación* en forma de integral.

Si un conductor también se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$, se inducirá una fem adicional en aquél, la cual está dada por

$$e_m = \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{2.7}$$

y se conoce como *fem de movimiento*, o *voltaje de velocidad*. Como esta fem se induce por el movimiento de un conductor en un campo magnético, también se dice que es la fem inducida por una *acción de corte del flujo*.

Para una espira cerrada que se mueve en un campo magnético, la fem total inducida debe ser igual a la suma de la fem de transformación y la fem de movimiento. Es decir,

$$e = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} + \int_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{2.8a}$$

Esta ecuación es la definición matemática de la *ley de inducción de Faraday*. En forma concisa, puede escribirse así:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.8b}$$

donde

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{ds} \tag{2.9}$$

es el flujo total que pasa a través de la espira. Las ecuaciones (2.8*a*) o (2.8*b*) proporcionan la fem inducida en una espira cerrada con una sola vuelta. Si en la espira hubiera N vueltas, la fem inducida sería N veces mayor.

Ejemplo 2.1

Una bobina de 1000 vueltas se coloca en un campo magnético que varía en forma uniforme de 100 miliwebers (mWb) a 20 mWb en 5 segundos (s). Encuentre la fem inducida en la bobina.

- Solución

Cambio en el flujo: $\Delta\Phi = 20 - 100 = -80$ mWb
Cambio en el tiempo: $\Delta t = 5$ s

Fem inducida: $e = -N\dfrac{d\Phi}{dt} \approx -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1000 \times \dfrac{-80 \times 10^{-3}}{5} = 16$ V

■

Ejemplo 2.2

Una espira cuadrada con lados de 10 cm de longitud está sumergida en una intensidad de campo magnético con variación senoidal de 100 A/m (pico), con una frecuencia de 50 megahertz (MHz). El plano de la espira es perpendicular a la dirección del campo magnético. Si se conecta un voltímetro en serie con la espira, ¿cuál es su lectura?

- Solución

Como la espira es estacionaria, puede aplicarse la ecuación de transformación (2.6) para determinar la fem inducida en la espira. Supongamos que la intensidad del campo magnético está alineada con el eje z y la espira se encuentra en el plano xy, como se muestra en la figura 2.1. Por tanto, la intensidad del campo magnético puede expresarse como

$$\vec{H} = 100 \text{ sen } \omega t\, \vec{a}_z \text{ A/m}$$

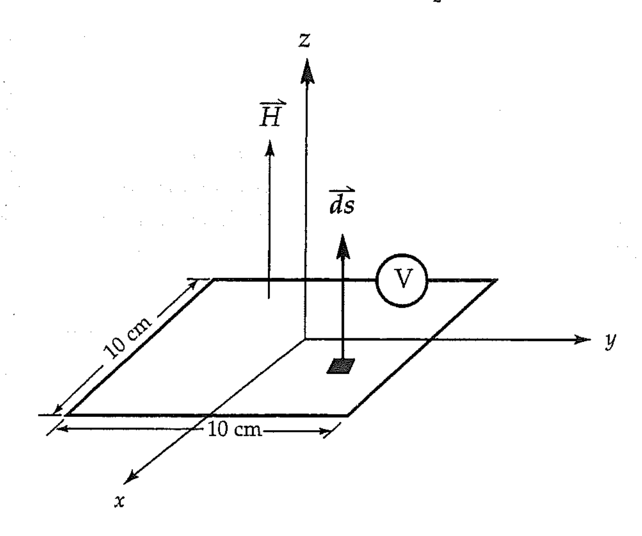


Figura 2.1. Figura para el ejemplo 2.1.

donde $\omega = 2\pi f$ y $f = 50$ MHz y $\vec{a_z}$ es el vector unitario en la dirección z. Si se supone que la permeabilidad del medio es la misma que la del espacio libre, la densidad del flujo magnético es

$$\vec{B} = 100\ \mu_0 \text{ sen } \omega t\ \vec{a_z} \text{T}$$

puesto que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 100\ \mu_0 \omega \cos \omega t\ \vec{a_z} = 100 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2\pi \times 50 \times 10^6 \cos \omega t\ \vec{a_z}$$

$$= 39\,478.4 \cos \omega t\ \vec{a_z}$$

y $\vec{ds} = dx\ dy\ \vec{a_z}$, entonces según la ecuación 2.6 la fem inducida es

$$e = -39\,478.4 \cos \omega t \int_{-.05}^{.05} dx \int_{-.05}^{.05} dy = -394.784 \cos \omega t \text{ V}$$

Puesto que un voltímetro de ca lee solamente el valor medio cuadrático de un voltaje que varía con el tiempo, la lectura del voltímetro es

$$E = \frac{394.784}{\sqrt{2}} = 279.15 \text{ V}$$

■

Ejemplo 2.3

Una espira cuadrada con cada lado de longitud igual a $2a$ metros (m) gira con una velocidad angular de ω radianes/segundo (rad/s) en un campo magnético que varía cuando $\vec{B} = B_m \text{ sen } \omega t\ \vec{a_z}$ (T). El eje de la espira forma un ángulo recto con el campo magnético. Determine la fem inducida en la espira.

- **Solución**

La posición de la espira en cualquier tiempo t se muestra en la figura 2.2. El flujo total que pasa a través de la espira es

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} B_m \text{ sen } \omega t \cos \omega t\ dx\ dy = 2a^2 B_m \text{ sen } 2\omega t \text{ Wb}$$

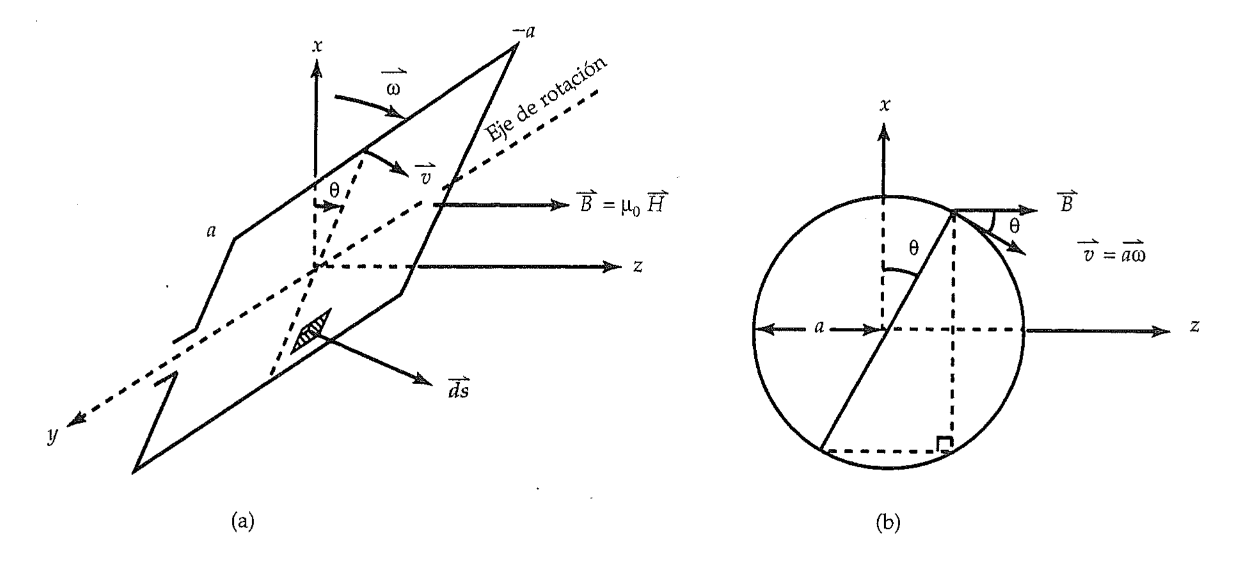


Figura 2.2. (a) Espira cuadrada que gira sobre su eje en un campo magnético. **(b)** Sección transversal de espira.

Con base en la ecuación (2.8*b*) la fem inducida es

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -4\omega a^2 B_m \cos 2\omega t \text{ V}$$

Observe que la fem inducida en la espira pulsa con el doble de la velocidad angular de la espira.

■

Ley de Ampère

La ecuación 2.1*b* es una definición matemática de la ley de Ampère. Establece que la integral de línea de la intensidad de un campo magnético alrededor de un ciclo cerrado es igual a la corriente total encerrada. La corriente total es la suma de la corriente de conducción $\int \vec{J} \cdot \vec{ds}$ y la corriente de desplazamiento $\int (\partial \vec{D}/\partial t) \cdot \vec{ds}$. Si limitamos el análisis al flujo de corriente dentro de un conductor a bajas frecuencias, la corriente de desplazamiento se vuelve despreciable y puede ignorarse. En consecuencia, la ecuación (2.1*b*) se convierte en

$$\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = I_{enc} \tag{2.10}$$

donde I_{enc} es la corriente total encerrada por el contorno *c*. En el ejemplo siguiente se ilustra la aplicación de la ley de Ampère.

Ejemplo 2.4

Un conductor cilíndrico de gran longitud y de radio b porta una corriente uniformemente distribuida I. Determine la intensidad del campo magnético *a)* dentro del conductor y *b)* fuera del conductor.

- **Solución**

En la figura 2.3*a* se presenta un conductor cilíndrico en la dirección z. Para una distribución uniforme de corriente, la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2}\vec{a}_z \text{ A/m}^2$$

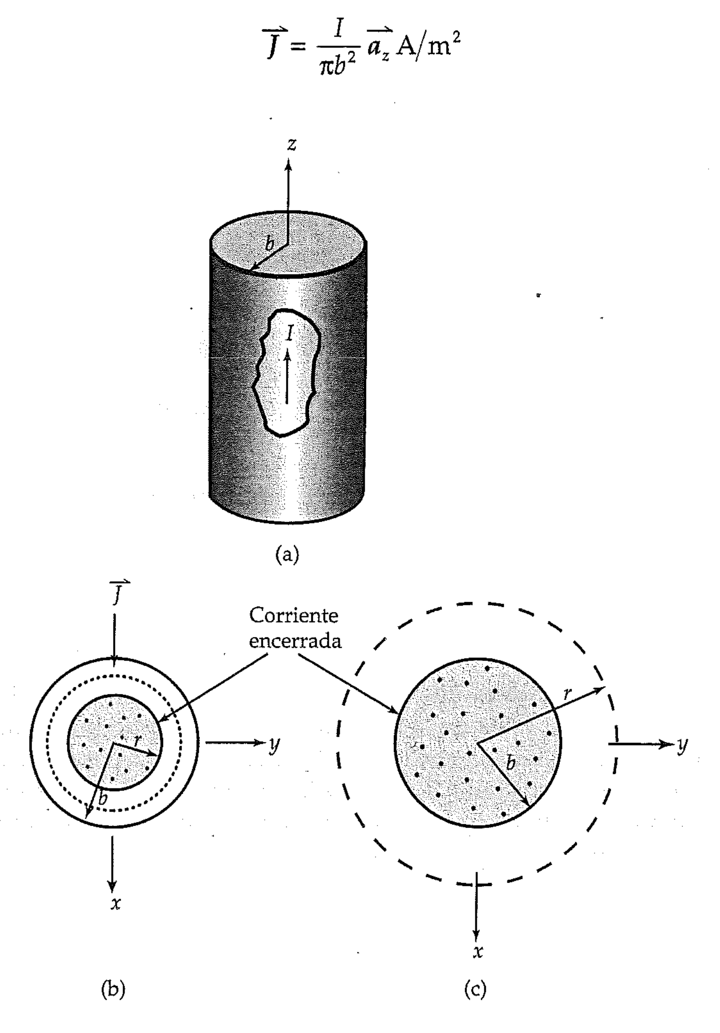


Figura 2.3. (a) Conductor muy largo que conduce corriente distribuida uniformemente. **(b)** Trayectoria cerrada dentro del conductor. **(c)** Trayectoria cerrada fuera del conductor.

a) Intensidad del campo magnético dentro del cilindro. Para cualquier radio r tal que $r < b$, como se muestra en la figura 2.3*b*, la corriente encerrada es

$$I_{\text{enc}} = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = I\left[\frac{r}{b}\right]^2 A$$

La simetría del problema dicta que para cualquier corriente en la dirección z, la intensidad del campo magnético debe tener la dirección ϕ. Además, la magnitud de la intensidad del campo magnético debe ser la misma en cualquier punto de un cilindro de radio r. Luego

$$\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} H_\phi r \, d\phi = 2\pi r H_\phi$$

Por tanto, de la ecuación (2.10) se tiene que

$$H_\phi = \frac{Ir}{2\pi b^2} \qquad \text{A/m} \qquad \text{para} \qquad r \leq b$$

b) La intensidad del campo magnético fuera del cilindro. Como el punto de observación se halla fuera a un radio r, como aparece en la figura 2.3*c*, tal que $r \leq b$, la corriente total encerrada es I. Así, la intensidad del campo magnético es

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \qquad \text{A/m} \qquad \text{para} \qquad r \leq b$$

■

Ley de la fuerza de Ampère

Cuando una carga q se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre la carga es, según la ecuación (2.3),

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Puesto que el flujo de una carga en un conductor constituye la corriente en ese conductor, la ecuación anterior también puede expresarse en términos de la corriente en un conductor, es decir

$$\vec{F} = \int_c I\,\vec{dl} \times \vec{B} \tag{2.11}$$

donde I es la corriente en el conductor, $\overrightarrow{dl}$ es la longitud elemental del conductor y $\overrightarrow{B}$ es el campo magnético externo en la región. Habitualmente, la ecuación (2.11) se conoce como *ley de la fuerza de Ampère* y se usa para calcular el par desarrollado en todos los motores eléctricos.

Con base en la ecuación (2.11), es claro que la fuerza que experimenta un conductor que porta corriente depende de *a)* la intensidad del campo $\overrightarrow{B}$, *b)* la magnitud de la corriente en el conductor, y *c)* la longitud del conductor. Puesto que la fuerza que actúa en un conductor es máxima cuando el campo magnético es perpendicular al conductor que porta la corriente, todas las máquinas rotatorias se diseñan para alojar conductores que portan corriente en forma perpendicular al campo magnético.

Ejemplo 2.5

Un conductor recto que porta una corriente I está ubicado en un campo magnético uniforme, como se muestra en la figura 2.4. Halle la fuerza que actúa sobre el conductor.

- Solución

Observe que sólo la parte del conductor expuesta al campo magnético contribuye a la fuerza total que experimenta el conductor. Esto es,

$$\overrightarrow{F} = \int_{-b}^{b} IB\, dz\, (\overrightarrow{a_z} \times \overrightarrow{a_y}) = -2BIb\, \overrightarrow{a_x} \text{ newtons (N)}$$

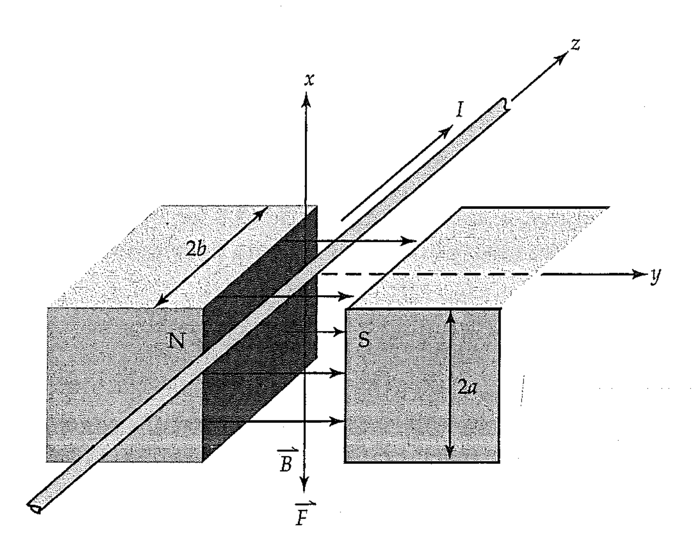


Figura 2.4. Fuerza en un conductor que conduce corriente en un campo uniforme B.

donde $\vec{a_x}$, $\vec{a_y}$ y $\vec{a_z}$ son vectores unitarios en las direcciones x, y y z. El signo negativo en los resultados anteriores indica que la fuerza sobre el conductor actúa hacia abajo, como se indica en la figura. La magnitud de la fuerza es $2b\ BI$, donde $2b$ es la longitud del conductor expuesta al campo magnético.

■

Par en una espira de corriente

Con objeto de desarrollar el par en una máquina eléctrica, los conductores se unen entre sí para formar espiras. Una espira de ese tipo se describe en la figura 2.5*a*. La espira está orientada perpendicularmente al campo magnético. Aplicando la ecuación (2.11) se determina la fuerza que actúa en cada lado de la espira. Se encuentra que las fuerzas que actúan sobre los lados opuestos de la espira tienen magnitud igual pero dirección opuesta, tal cual se ilustra. Como las líneas de acción de tales fuerzas son las mismas, la fuerza neta que actúa sobre la espira es cero.

Ahora orientemos la espira en forma tal que la normal unitaria al plano (superficie) de la espira forme un ángulo θ con el campo $\vec{B}$, como se aprecia en la figura 2.5*b*. La fuerza que actúa en cada lado sigue siendo la misma. Las líneas de acción de las fuerzas que actúan en cada lado de longitud W siguen coincidiendo. Por tanto, la fuerza neta en la dirección x sigue siendo cero. Sin embargo, las líneas de acción de las fuerzas que actúan sobre cada lado de longitud L no coinciden. Si la espira se encuentra libre para girar sobre su eje, como se observa en la figura, esas fuerzas tenderán a hacer girar la espira en dirección opuesta a la de las manecillas del reloj, como se presenta a continuación.

Para un campo magnético constante, la fuerza que actúa en el conductor superior es

$$\vec{F_a} = -BIL\ \vec{a_y}$$

y la que actúa sobre el conductor inferior es

$$\vec{F_b} = -BIL\ \vec{a_y}$$

Puesto que el par es $\vec{r} \times \vec{F}$, los pares ejercidos sobre los conductores superior e inferior son

$$\vec{T_a} = BIL\ (W/2)\ \text{sen}\ \theta\ \vec{a_x}$$

y

$$\vec{T_b} = BIL\ (W/2)\ \text{sen}\ \theta\ \vec{a_x}$$

Por tanto, el par total sobre la espira es

$$\vec{T} = BIA\ \text{sen}\ \theta\ \vec{a_x}$$

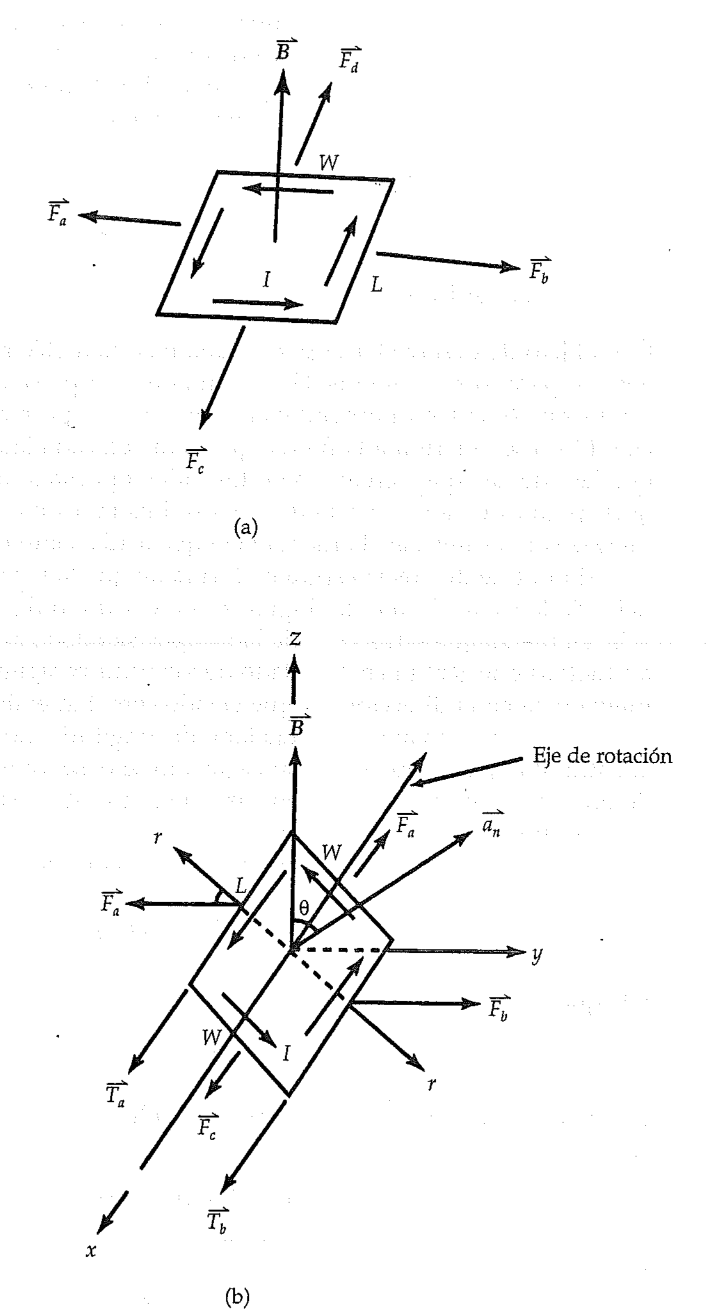


Figura 2.5. (a) Una espira de corriente perpendicular a un campo magnético uniforme. **(b)** Una espira de corriente en ángulo con un campo magnético uniforme.

donde $A = LW$ es el área de la espira. Este par tiende a hacer girar la espira para tratar de situar al plano de ésta en posición perpendicular al campo $\vec{B}$. En otras palabras, la superficie normal a una espira que conduce corriente y con libertad para girar siempre busca alinearse con el campo $\vec{B}$.

Si en vez de una espira de una sola vuelta se tuviera una bobina de N vueltas, el par que actuaría sobre ella sería

$$\vec{T} = BIAN \operatorname{sen} \theta \, \vec{a_x} \tag{2.12}$$

Ésta es la ecuación fundamental que rige el desarrollo del par en todas las máquinas rotatorias.

Ejercicios

2.1. Utilice la ecuación 2.12 para demostrar que $\vec{T}$ puede expresarse como $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$ donde $\vec{m} = NIA\,\vec{a_n}$.

2.2. Dos conductores paralelos están separados por una distancia d y conducen corrientes iguales I en direcciones opuestas. Calcule la fuerza por unidad de longitud que experimenta cualquiera de los conductores.

2.3. Obtenga expresiones para la fem de movimiento y la fem de transformación que se inducen en la espira cuadrada del ejemplo 2.3. Si la resistencia efectiva de la espira es R, determine el par que debe aplicarse para mantenerla girando con una velocidad angular uniforme de ω rad/s.

2.4. Si el campo magnético del ejemplo 2.3 está dado por $\vec{B} = B_0\,\vec{a_z}$ (T), calcule la *a*) fem de movimiento; *b*) fem de transformación, y *c*) fem total inducida. Compruebe sus resultados aplicando la ley de inducción de Faraday. La resistencia total en la espira es R. Determine la potencia promedio que disipa R y el par promedio que se desarrolla si la espira gira con una velocidad angular de ω rad/s. Demuestre que $P = T_{prom}\,\omega$.

2.3. Materiales magnéticos y sus propiedades

Hagamos un experimento con una bobina cilíndrica de longitud L —a la que generalmente se llama *solenoide*—, que lleva una corriente I, como se muestra en la figura 2.6*a*. Al resolver el problema, 2.2 se encuentra que la densidad del flujo magnético en el centro del solenoide es el doble de aquél en cualquiera de los extremos, como se ilustra en la figura 2.6*b*. Si se colocan pequeñas muestras de diversas sustancias dentro de este campo, se encontrará que la fuerza magnética que experimentan alcanza un máximo cerca de los extremos del solenoide, en donde el gradiente, dB_z/dz, es considerable. A fin de continuar el experimento, supongamos que siempre se coloca la muestra en el extremo superior del solenoide y se observa la fuerza que éste experimenta. En consecuencia, nuestras observaciones revelan que la fuerza sobre una sus-

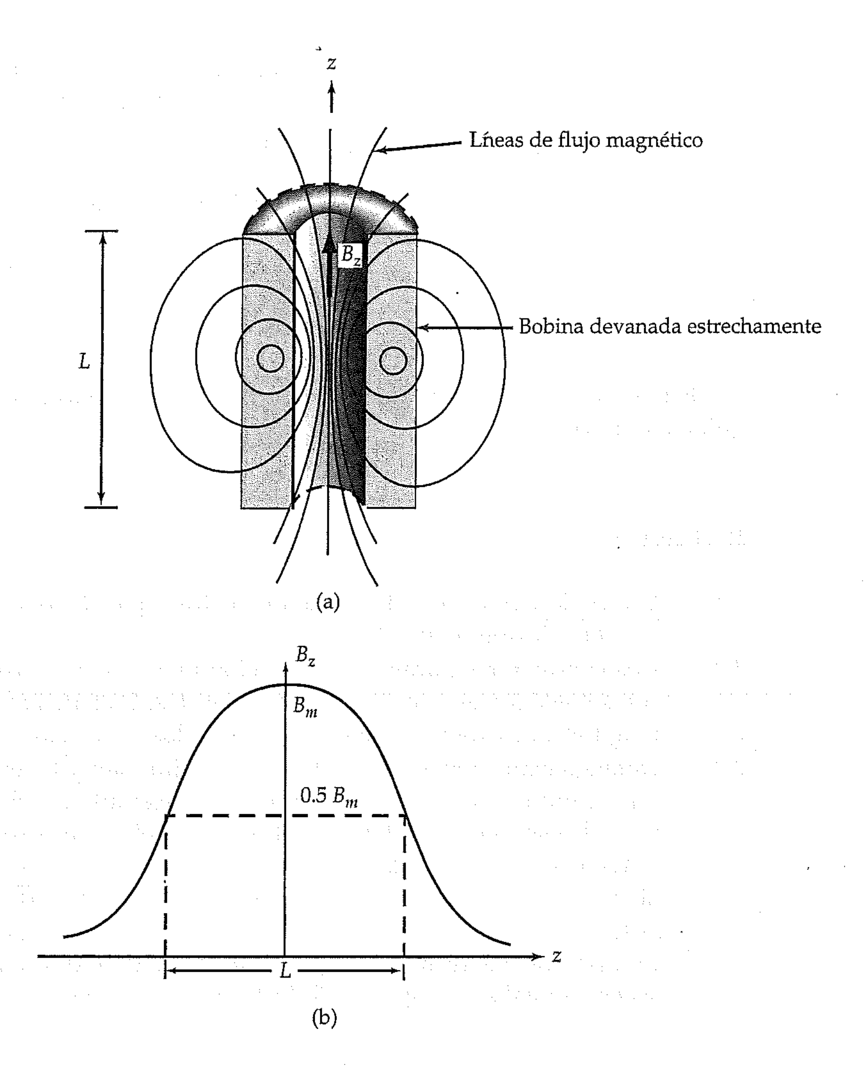


Figura 2.6. (a) Solenoide. **(b)** Gráfica de la densidad de flujo magnético a lo largo del eje del solenoide.

tancia específica es proporcional a la masa de la muestra e independiente de su forma, siempre que el tamaño de la muestra no sea demasiado grande. También se observa que algunas muestras resultan atraídas hacia la región del campo más intenso y que otras son repelidas.

Materiales diamagnéticos

Las sustancias que experimentan una fuerza débil de repulsión se llaman *diamagnéticas*. A partir de nuestro experimento se encontró que son materiales diamagnéticos el bismuto, la plata y el cobre.

La permeabilidad del material diamagnético es ligeramente menor que la del vacío. En la tabla 2.1 se indican las permeabilidades de algunos materiales diamagnéticos.

Tabla 2.1. Permeabilidades relativas de algunos materiales diamagnéticos.

Material	*Permeabilidad relativa*
Bismuto	0.999 981
Berilio	0.999 987
Cobre	0.999 991
Metano	0.999 969
Plata	0.999 980
Agua	0.999 991

Materiales paramagnéticos

Nuestro experimento también reveló que existen sustancias que experimentan una fuerza de atracción. Las sustancias que son jaladas hacia el centro del solenoide con una fuerza débil se denominan *paramagnéticas*. Estas sustancias tienen permeabilidades ligeramente mayores que la del vacío. En la tabla 2.2 se enumeran las permeabilidades relativas de algunos materiales paramagnéticos.

Tabla 2.2. Permeabilidades relativas de algunos materiales paramagnéticos.

Material	*Permeabilidad relativa*
Aire	1.000 304
Aluminio	1.000 023
Oxígeno	1.001 330
Manganeso	1.000 124
Paladio	1.000 800
Platino	1.000 014

Como la fuerza que experimentan las sustancias paramagnéticas o diamagnéticas es muy débil, con fines prácticos podemos agrupar y referirnos a ellas como *materiales no magnéticos*. Es una práctica común suponer que la *permeabilidad de todos los materiales no magnéticos es la misma que la del vacío*. Estos materiales no tienen uso práctico en la construcción de circuitos magnéticos.

Materiales ferromagnéticos

En el experimento antes mencionado, las sustancias como el fierro resultaron literalmente succionadas por la fuerza de atracción magnética. Tales sustancias reciben el nombre de *ferromagnéticas*. La fuerza de atracción magnética que experimenta un material ferromagnético puede llegar a ser 5000 veces mayor que la experimentada por un material paramagnético.

Para describir íntegramente las propiedades magnéticas de los materiales se necesita el concepto de mecánica cuántica, que va más allá del propósito de esta obra. Sin embargo, para explicar el ferromagnetismo puede usarse la teoría de dominios magnéticos que contienen dipolos magnéticos.

Dipolos magnéticos

Se sabe que los electrones describen una órbita en torno al núcleo a velocidad constante. Como la corriente es la cantidad de carga que pasa por un punto en un segundo, un electrón órbita produce un anillo de corriente. Si se multiplica la corriente por el área de la superficie encerrada por él, se obtiene el *momento orbital magnético.*

Un electrón también gira continuamente alrededor de su eje a un ritmo fijo. El movimiento giratorio supone carga circulante y confiere al electrón un *momento magnético de giro.*

El momento magnético neto del átomo se obtiene combinando los momentos orbital y de giro de todos los electrones, teniendo en cuenta las direcciones de dichos momentos. El momento magnético neto produce un campo alejado semejante al que produce una espira de corriente (un dipolo magnético).

Ferromagnetismo

El comportamiento de los materiales ferromagnéticos como el fierro, el cobalto y el níquel se explica con facilidad en términos de los *dominios magnéticos*. Un dominio magnético es una región muy pequeña en la que todos los dipolos magnéticos están perfectamente alineados, como se aprecia en la figura 2.7. La dirección de alineamiento de los dipolos magnéticos varía de un dominio al siguiente. Debido a estos alineamientos aleatorios, un material virgen se encuentra en un estado no magnetizado.

Al colocar el material magnético en un campo magnético externo, todos los dipolos tienden a alinearse a lo largo de él. Una forma de colocar el material magnético en un campo magnético es enrollar un conductor portador de corriente alrededor de él, como se muestra en la figura 2.8. Cabe esperar que algunos dominios en el material magnético ya estuvieran más o menos alineados en la dirección del campo. Esos dominios tienden a aumentar de tamaño a expensas de los que los rodean. El crecimiento de un dominio tan solo cambia sus límites. Sin embargo, el movimiento de los límites de los dominios depende de la estructura granular del material.

También cabe esperar que algunos dominios giren sus dipolos magnéticos en la dirección del campo aplicado. Como resultado, se incrementa la densidad del flujo magnético dentro del material.

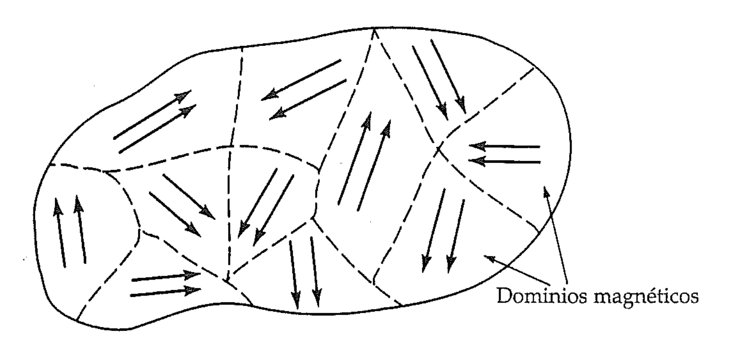


Figura 2.7. Orientación aleatoria de dipolos magnéticos en un material ferromagnético no magnetizado.

La corriente en la bobina de la figura 2.8 establece el campo $\vec{H}$ dentro del material, el cual puede considerarse una variable independiente. El campo aplicado $\vec{H}$ crea el campo $\vec{B}$. En tanto el campo $\vec{B}$ en el material sea débil, resulta reversible el movimiento de los límites del dominio. Conforme se aumenta $\vec{H}$ al incrementar la corriente en la bobina, el campo $\vec{B}$ en el material se vuelve más intenso a medida que más dipolos magnéticos se alinean con el campo $\vec{B}$. Si se mide el campo $\vec{B}$ dentro del material, se encontrará que al principio se incrementa con lentitud, luego con más rapidez, a continuación muy lentamente otra vez y al final se estabiliza, como lo indica la línea gruesa de la figura 2.9. La curva que así se genera recibe el nombre de *característica de magnetización* o simplemente curva ***B-H*** de un material magnético. Cada material magnético tiene su propia característica de magnetización. El lugar donde la curva se separa de la línea recta se conoce como la *rodilla* o *punto de inflexión* de la

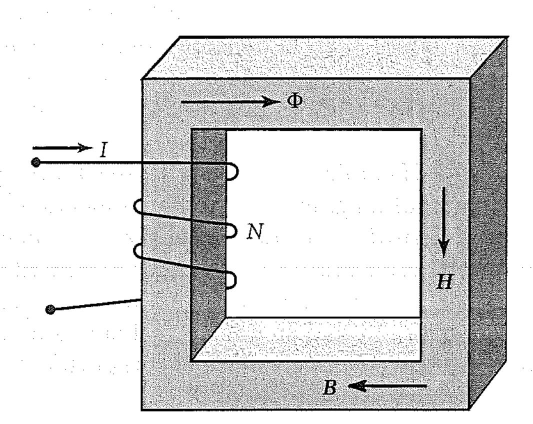


Figura 2.8. Campo magnético establecido por una bobina portadora de corriente.

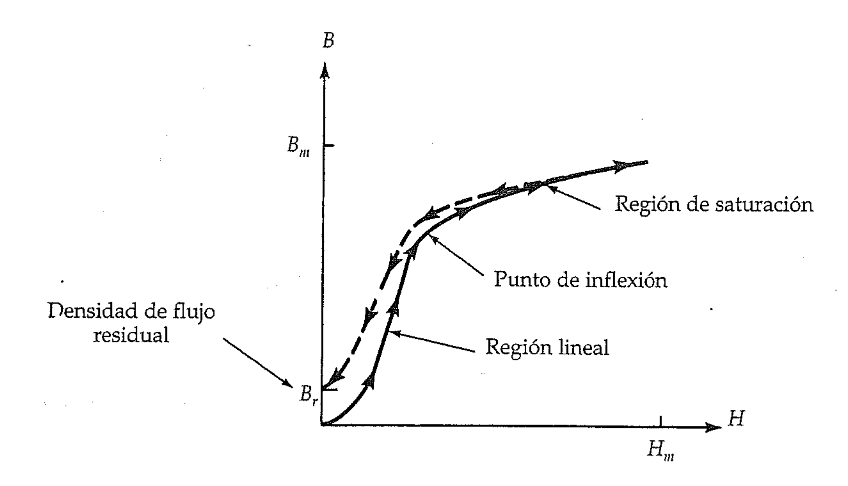


Figura 2.9. Característica de magnetización de un material ferromagnético.

curva. La saturación magnética ocurre conforme se avanza por encima de la rodilla. La permeabilidad del material magnético en cualquier punto de la curva es la razón de ***B*** a ***H*** en el punto considerado. En la figura 2.10 se muestra el comportamiento general de la permeabilidad como función de la densidad del flujo magnético.

El ciclo de histéresis

En la figura 2.11 se describe una técnica para determinar la característica de magnetización de un material magnético. Ahí se ilustra un material ferromagnético devanado con dos bobinas. Si se conecta una fuente de corriente variable en el tiempo a una de las bobinas, se establece un flujo en el anillo que también es variable en el tiempo, el cual, a su vez, induce una fem en la otra bobina de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. La fem inducida en la otra bobina ayuda a determinar los cambios en el flujo y también en la densidad del flujo magnético dentro del anillo. En otras palabras, la corriente aplicada es una medida de la intensidad de campo magnético (***H***), y la fem inducida es una medida de la densidad del flujo magnético (***B***) en el anillo.

Cuando la curva *B-H* comienza a nivelarse, se supone que casi todos los dipolos magnéticos en el material magnético ya se han alineado en dirección del campo $\overrightarrow{B}$. En ese momento, la densidad de flujo en el material magnético es máxima, B_m, y se dice que el material está saturado. El valor correspondiente de la intensidad del campo magnético es H_m. Se dice que un material magnético está completamente saturado cuando su permeabilidad se vuelve casi la misma que la del vacío. Con esa densidad de flujo, no hay diferencia entre el comportamiento del material magnético y el de otros materiales no magnéticos. Por consiguiente, carece de interés para el diseño de máquinas eléctricas operar un material magnético en condiciones de saturación total.

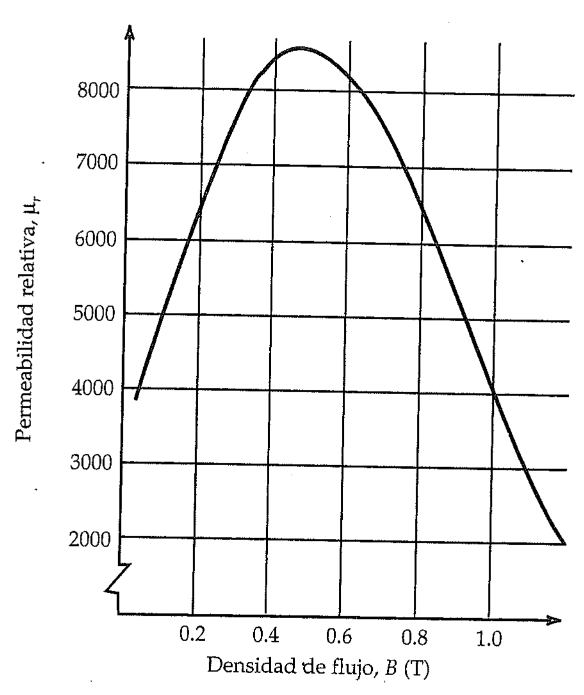


Figura 2.10. Permeabilidad del acero al silicio como función de la densidad de flujo.

Si ahora se comienza a disminuir el campo $\boldsymbol{H}$ reduciendo la corriente en la bobina, se encontrará que la curva no se repite sobre su trazo previo, sino que sigue otra trayectoria, como se observa en la figura 2.12. En otras palabras, se encuentra que el campo $\boldsymbol{B}$ no decrece con la misma rapidez con la que creció. Esta irreversibilidad se llama *histéresis*, y simplemente significa que $\boldsymbol{B}$ se atrasa con respecto a $\boldsymbol{H}$. La curva muestra que aun cuando el campo $\boldsymbol{H}$ se reduce a cero, todavía existe en el material

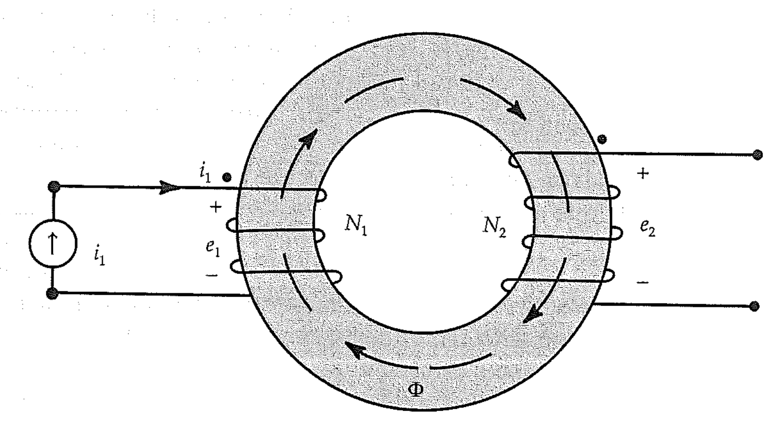


Figura 2.11. Circuito magnético con dos bobinas.

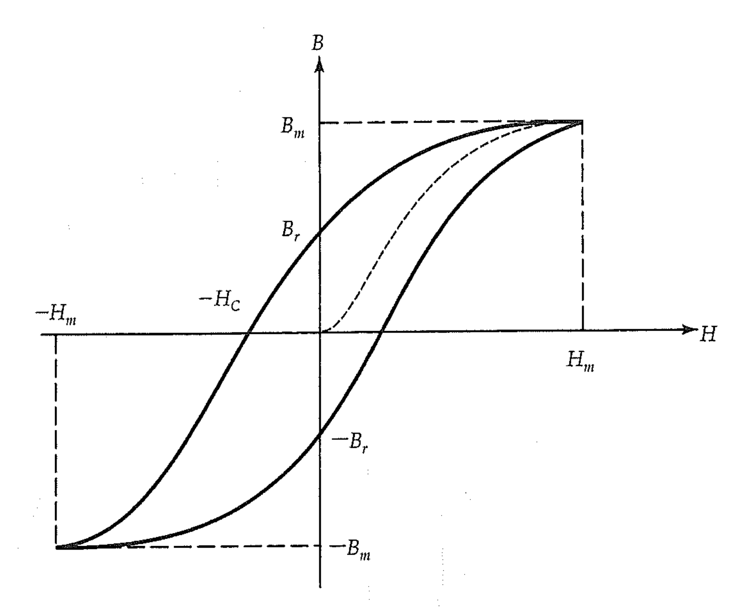


Figura 2.12. Ciclo de histéresis.

cierta densidad del flujo magnético. Esto se denomina *remanencia* o *densidad residual de flujo*, B_r. Dicho de otro modo, el material magnético se habrá magnetizado y actuará como un imán, lo cual se debe a que una vez que los dominios magnéticos están alineados en cierta dirección en respuesta a la aplicación de un campo magnético externo, algunos de ellos tienden a permanecer en esa forma. Cuanto mayor sea la densidad residual de flujo, mejor es el material magnético para las aplicaciones que requieren imanes permanentes. Un material que retenga una densidad residual de flujo elevada recibe el nombre de *material magnético duro*. Los materiales magnéticos duros se utilizan en el diseño de motores con imanes permanentes.

Para reducir a cero la densidad de flujo en el material magnético debe invertirse la dirección de la corriente en la bobina. El valor de $\boldsymbol{H}$ que conduce a $\boldsymbol{B}$ a cero se conoce como *fuerza coercitiva*, H_C. Cualquier incremento adicional en $\boldsymbol{H}$ en dirección inversa ocasiona que el material magnético se magnetice con la polaridad opuesta. Si se continúa incrementando $\boldsymbol{H}$ en esa dirección, el campo $\boldsymbol{B}$ aumenta con rapidez al principio y luego se estabiliza al acercarse a la saturación. La magnitud de la densidad de flujo máxima en cualquier dirección es la misma.

A medida que el campo $\boldsymbol{H}$ se reduce a cero disminuyendo la corriente en la bobina, se encuentra que la densidad del flujo magnético en el material magnético nuevamente es igual a su magnetismo residual, pero en dirección opuesta. Es necesario invertir otra vez la dirección de la corriente en la bobina a fin de reducir a cero la densidad del flujo magnético en el material magnético. Ahora la corriente en la bobina se encuentra en la misma dirección que tenía al comenzar el experimento. Cualquier incremento adicional en la corriente empieza la magnetización del espécimen con la polaridad original.

Hemos recorrido todo el proceso de la magnetización. La curva que se trazó de esta manera se denomina *ciclo de histéresis*. La forma del ciclo de histéresis depende del tipo de material magnético. Con el ciclo de histéresis como base, los materiales magnéticos pueden clasificarse en duros o suaves. Como ya se indicó, los primeros muestran una remanencia elevada y gran fuerza coercitiva. Los *materiales magnéticos suaves* poseen remanencia muy baja y fuerza coercitiva baja, y se utilizan para construir máquinas de ca tales como transformadores y motores de inducción a fin de minimizar la *pérdida por histéresis*, la cual estudiaremos más adelante.

2.4. Circuitos magnéticos

Puesto que las líneas de flujo magnético forman una trayectoria cerrada y el flujo magnético que entra por un límite es el mismo que sale por otro límite, es posible establecer una analogía entre el flujo magnético y la corriente en un circuito conductor cerrado. En un circuito conductor, la corriente fluye exclusivamente a través del conductor sin ninguna pérdida a través de la región que lo rodea. Por otro lado, el flujo magnético no puede estar confinado totalmente a seguir una trayectoria única en un material magnético. Sin embargo, si la permeabilidad del material magnético es muy alta en comparación con la del material que lo rodea —como el vacío— la mayor parte del flujo queda confinado al material sumamente permeable. Esto conduce a la concentración de flujo magnético dentro de un material magnético con flujo casi despreciable en la región que lo rodea. El blindaje magnético se basa en tal comportamiento del flujo magnético. La canalización del flujo a través de un material sumamente permeable es muy parecido al flujo de corriente que pasa por conductor. Por ello, la trayectoria que sigue el flujo en un material magnético se llama *circuito magnético*. Los circuitos magnéticos forman parte integral de equipos como máquinas rotatorias, transformadores, electroimanes y relés, por citar algunos.

Consideremos un circuito magnético simple en forma de toroide devanado con vueltas helicoidales cercanamente ubicadas, con N vueltas, como se ilustra en la figura 2.13. Los radios interior y exterior del núcleo del toroide son a y b, respectivamente. Se supone que el toroide tiene sección transversal rectangular cuya altura es h. A partir de la geometría del problema cabe esperar que la intensidad del campo magnético ocurra en la dirección ϕ dentro del núcleo del toroide.

Por tanto, para cualquier radio r tal que $a \leq r \leq b$, se tiene queℓ

$$\oint_c \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = 2\pi r H_\phi$$

La corriente total encerrada por la trayectoria cerrada es NI. En el análisis de los circuitos magnéticos, la corriente total encerrada suele llamarse *fuerza magnetomotriz aplicada* (fmm). Aun cuando en el SI la vuelta es una cantidad adimensional, se utiliza el ampere-vuelta (A·t; ampere-*turn*) como la unidad de la fmm para diferenciarla de la unidad fundamental de corriente.

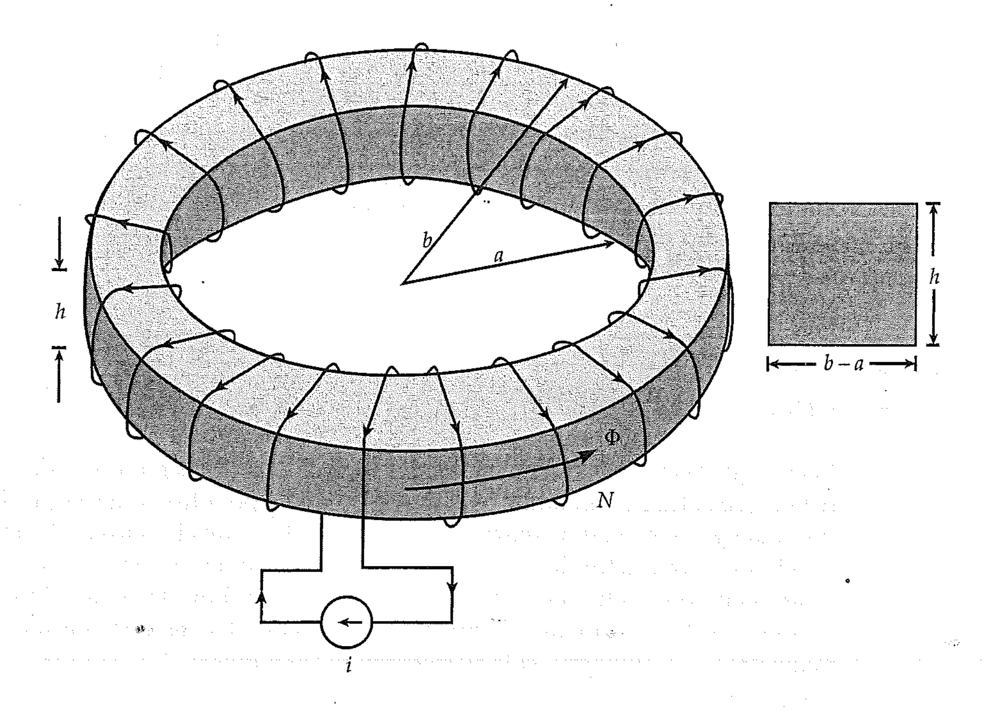


Figura 2.13. Devanado toroidal uniformemente realizado.

Así, de la ley de Ampère se obtiene

$$H_\phi = \frac{NI}{2\pi r} \tag{2.13}$$

La densidad del flujo magnético dentro del núcleo es

$$B_\phi = \mu H_\phi = \frac{\mu NI}{2\pi r} \tag{2.14}$$

El flujo total en el núcleo es

$$\Phi = \int_s \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\mu NI}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r}\, dr \int_0^h dz = \frac{\mu NI}{2\pi} h \ln (b/a) \tag{2.15}$$

Aun cuando el núcleo del toroide esté hecho con material magnético sumamente permeable y el devanado se concentre sólo en una parte muy pequeña de él, circulará una gran parte del flujo magnético a través del núcleo. Una fracción del flujo total que produce la bobina cierra su trayectoria a través del medio que rodea al cir-

cuito magnético y se le conoce como *flujo de dispersión*, como se indica en la figura 2.14. En el diseño de circuitos magnéticos siempre se intenta mantener el flujo de dispersión tan pequeño como la economía lo permita. En consecuencia, en el análisis de circuitos magnéticos se desprecia el flujo de dispersión.

En el caso de un toroide, se tiene que la intensidad del campo magnético y, por tanto, la densidad del flujo magnético son inversamente proporcionales al radio de la trayectoria circular; es decir, la densidad del flujo magnético es máxima en el radio interior del toroide y mínima en el radio exterior. Al analizar circuitos magnéticos generalmente se presupone que la *densidad del flujo magnético es uniforme dentro del material magnético, y su magnitud es igual a la densidad del flujo magnético en el radio medio.*

El toroide forma una trayectoria continua cerrada para el circuito magnético. No obstante, en ciertas aplicaciones, como las máquinas rotatorias, la trayectoria cerrada con frecuencia resulta interrumpida por un entrehierro. Así, el circuito magnético consiste en un material magnético sumamente permeable en serie con un entrehierro, como se ilustra en la figura 2.14. Puesto que se trata de un circuito en serie, el flujo magnético en el material magnético es igual al flujo magnético en el entrehierro. Como se muestra en la figura, es inevitable la diseminación del flujo magnético —la cual se llama *dispersión*— en el entrehierro. Sin embargo, si la longitud del entrehierro

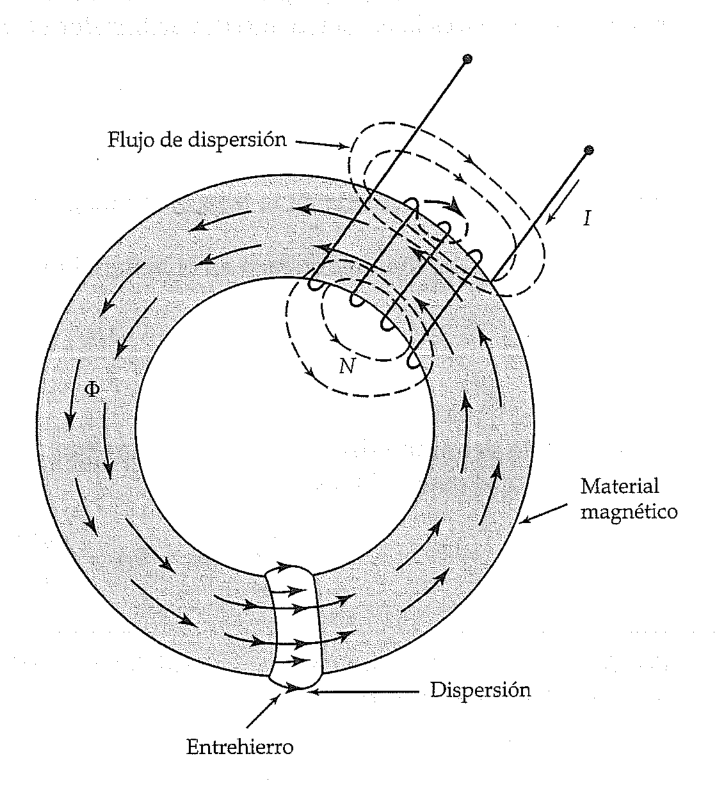


Figura 2.14. Circuito magnético con un entrehierro.

es muy pequeña en comparación con sus demás dimensiones, la mayor parte de las líneas de flujo estarán bien confinadas entre las superficies opuestas del núcleo magnético en el entrehierro y el efecto de dispersión resulta despreciable.

Por consiguiente, en el análisis de circuitos magnéticos generalmente se presupone lo siguiente:

a) El flujo magnético se restringe al flujo a través del material magnético, sin pérdidas.
b) No hay diseminación o dispersión del flujo magnético en las regiones del entrehierro.
c) La densidad del flujo magnético es uniforme dentro del material magnético.

Consideremos un circuito magnético como el que se muestra en la figura 2.15. Si la bobina tiene N vueltas y conduce una corriente I, la fmm es NI. Luego,

$$\mathcal{F} = NI = \oint_c \vec{H} \cdot \vec{d\ell}$$

Si la intensidad del campo magnético se considera uniforme dentro del material magnético, entonces la ecuación anterior se transforma en

$$H\ell = NI \tag{2.16}$$

donde ℓ es la longitud media de la trayectoria magnética, como se indica en la figura 2.15*a*.

La densidad del flujo magnético en el material magnético es

$$B = \mu H = \frac{\mu NI}{\ell}$$

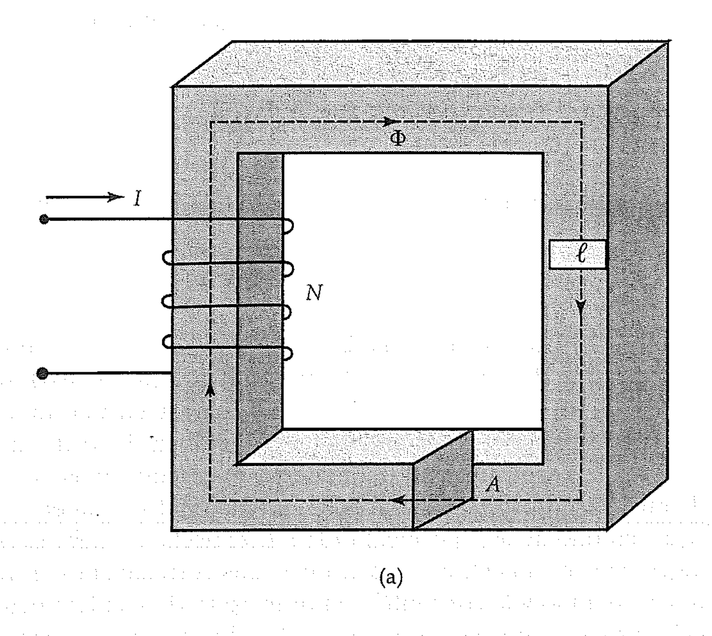
donde μ es la permeabilidad del material magnético.

El flujo en el material magnético es

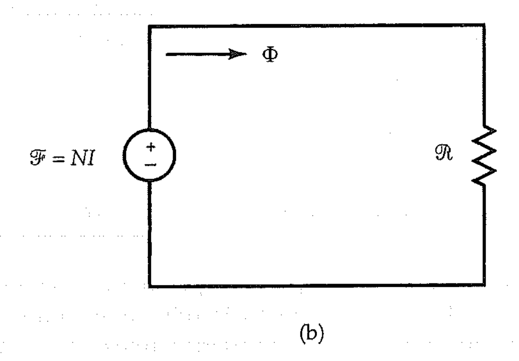
$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = BA = \frac{\mu NIA}{\ell}$$

donde A es el área de la sección transversal del material magnético. La ecuación anterior también puede escribirse como

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{\ell}{\mu A}} = \frac{\mathcal{F}}{\frac{\ell}{\mu A}} \tag{2.17}$$



(a)



(b)

Figura 2.15. (a) Circuito magnético con longitud media ℓ y área de la sección transversal A. **(b)** Su circuito equivalente.

Si se consideran el flujo magnético y la fmm aplicada en el circuito magnético análogo a la corriente y la fem aplicada en un circuito eléctrico, la cantidad en el denominador de la ecuación (2.17) debe ser semejante a la resistencia en el circuito eléctrico. Esta cantidad se define como la *reluctancia* del circuito magnético; se denota con $\mathcal{R}$ y sus unidades son amperes-vuelta por weber (A·t/Wb). Por consiguiente,

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu A} \tag{2.18}$$

En términos de la reluctancia $\mathcal{R}$, la ecuación (2.17) puede volver a expresarse como

$$\Phi\mathcal{R} = NI \tag{2.19}$$

La ecuación (2.19) se conoce como la *ley de Ohm* para circuitos magnéticos. Si se compara la expresión de la resistencia de un conductor ($R = \ell/\sigma A$) con la expresión de la reluctancia de un circuito magnético ($\mathcal{R} = \ell/\mu A$) se encuentra que la permeabilidad de un material magnético es análoga a la conductividad de un conductor. Cuanto más alta sea la permeabilidad del material magnético, más baja será su reluctancia. Para la misma fmm aplicada, el flujo en un material sumamente permeable es mayor que aquel en uno de baja permeabilidad. Este hecho no debe causar sorpresa, ya que es congruente con nuestras suposiciones. Las correlaciones entre la reluctancia y la resistencia, el flujo y la corriente, y la fmm aplicada y la fem nos permiten representar el circuito magnético en términos de la reluctancia de un circuito equivalente, según se muestra en la figura 2.15*b*.

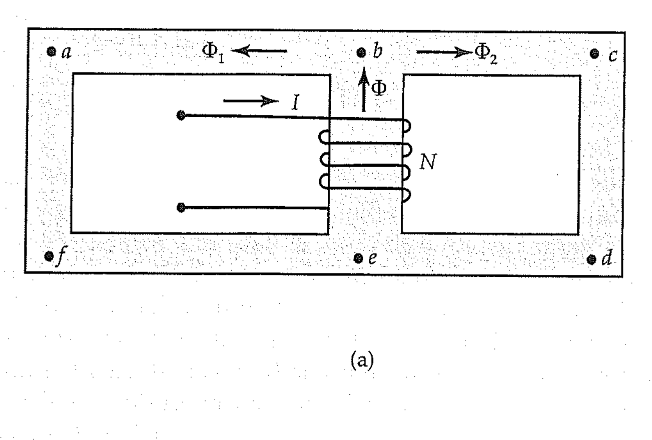
Si un circuito magnético está formado con dos o más secciones de material magnético, como se ilustra en la figura 2.16*a*, puede representarse en términos de las reluctancias, como se aprecia en la figura 2.16*b*. La reluctancia total puede obtenerse a partir de combinaciones en serie y en paralelo de las reluctancias de secciones individuales, debido a que las reluctancias siguen las mismas reglas que las resistencias.

Si H_i es la intensidad de campo magnético en la i-ésima sección de un circuito magnético y ℓ_i es la longitud media, se tiene que la caída total de la fmm en el circuito magnético debe ser igual a la fmm aplicada. Es decir,

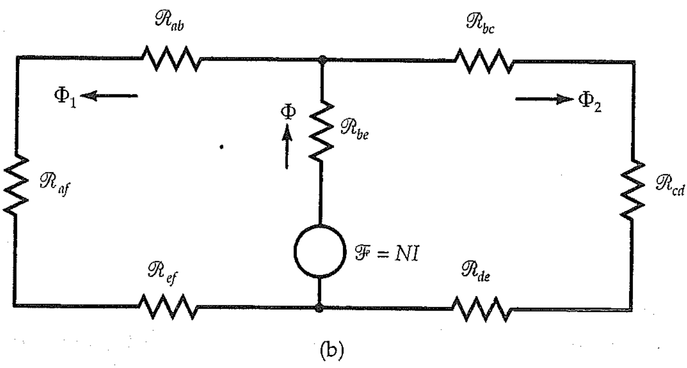
$$\sum_{i=1}^{n} H_i \ell_i = NI \tag{2.20}$$

Esta ecuación es un enunciado de la ley de Kirchhoff de la fmm para un circuito magnético.

De la ecuación (2.20) se desprende que siempre es posible analizar un circuito magnético utilizando un circuito con la reluctancia equivalente. Sin embargo, esto sólo es verdad para un circuito magnético lineal. *Un circuito magnético es lineal si la permeabilidad de cada sección magnética es constante.* Para un material ferromagnético, la permeabilidad es una función de la densidad del flujo magnético, como se explicó anteriormente. Si la permeabilidad de un material magnético varía con la densidad de



(a)



(b)

Figura 2.16. (a) Circuito magnético en serie-paralelo con espesor uniforme. **(b)** Su circuito equivalente.

flujo, se dice que el circuito magnético es *no lineal*. Todos los dispositivos que analizan materiales ferromagnéticos como el fierro constituyen circuitos magnéticos no lineales.

Problemas de los circuitos magnéticos

Hay dos tipos básicos de problemas relacionados con el análisis de circuitos magnéticos. El primero requiere que se determine la fmm aplicada para establecer la densidad de flujo definida en el circuito magnético. El otro tiene que ver con el cálculo de la densidad del flujo magnético y, por tanto, con el flujo en un circuito magnético cuando se conoce la fmm aplicada.

Para un circuito magnético lineal, la solución de los problemas anteriores puede obtenerse empleando el circuito con la reluctancia equivalente, ya que la permeabilidad del material magnético es constante.

En un circuito magnético no lineal es relativamente sencillo y directo calcular la fmm necesaria para mantener cierta densidad de flujo en el circuito magnético. En este caso, se calcula la densidad de flujo en cada sección magnética y después se obtiene H a partir de la curva B-H. Si se conoce H es posible determinar las caídas de fmm a través de cada sección magnética. La fmm que se requiere es la suma de las caídas de fmm individuales, de acuerdo con la ecuación (2.20).

El segundo tipo de problema en un circuito no lineal puede resolverse mediante técnicas iterativas. En este caso, se hace una estimación apropiada para la caída de fmm en una de las regiones magnéticas y después se obtienen los requerimientos totales de fmm. Luego se comparan la fmm calculada con la fmm aplicada y se hace otra estimación si difirieran demasiado. Al iterar en esta forma, pronto se llega a una situación en la que el error entre la fmm calculada y la fmm aplicada se halla dentro de límites aceptables. Otro aspecto controvertido es qué constituye un límite aceptable. En nuestro análisis, si no existe especificación al respecto, se utiliza $\pm 2\%$ como el límite aceptable de error. Se puede escribir un programa de cómputo para reducirlo aún más. A continuación se muestran ejemplos de circuitos magnéticos lineales y no lineales.

Ejemplo 2.6

Un electroimán de sección transversal cuadrada, semejante al de la figura 2.14, cuenta con una bobina que tiene 1500 vueltas estrechamente devanadas. Los radios interior y exterior del núcleo magnético tienen 10 y 12 cm, respectivamente. La longitud del entrehierro es de 1 cm. Si la corriente en la bobina es de 4 A y la permeabilidad relativa del material magnético es 1200, determine la densidad de flujo en el circuito magnético.

• Solución

Como la permeabilidad del material magnético es constante, se aplica el método de la reluctancia para calcular la densidad de flujo en el núcleo.

El radio medio es de 11 cm y la longitud media de la trayectoria magnética es de

$$\ell_m = 2\pi \times 11 - 1 = 68.12 \text{ cm}$$

Si se desprecia el efecto de dispersión, el área de la sección transversal de la trayectoria magnética es la misma que la del entrehierro. Esto es

$$A_m = A_g = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$$

La reluctancia de cada región es

$$\mathcal{R}_m = \frac{68.12 \times 10^{-2}}{1200 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-4}} = 1.129 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{t/Wb}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{1 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-4}} = 19.894 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{t/Wb}$$

La reluctancia total en el circuito en serie es

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_g = 21.023 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{t/Wb}$$

Así, el flujo en el circuito magnético es

$$\Phi = \frac{1500 \times 4}{21.023 \times 10^6} = 285.402 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

Finalmente, la densidad de flujo en el entrehierro o en la región magnética es

$$B_m = B_g = \frac{285.402 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}} = 0.714 \text{ T}$$

■

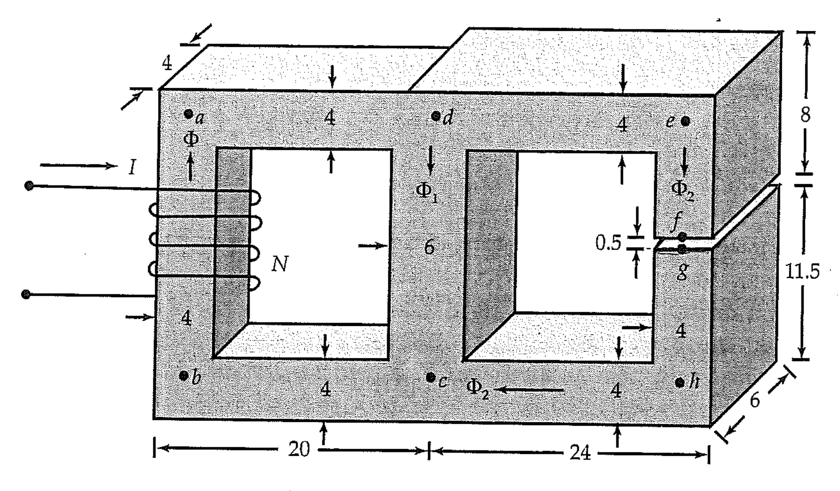
Ejemplo 2.7

En la figura 2.17 se muestra un circuito magnético en serie-paralelo, con las dimensiones pertinentes en centímetros. Si la densidad de flujo en el entrehierro es de 0.05 T y la permeabilidad relativa de la región magnética es 500, calcule la corriente en la bobina de 1000 vueltas con el método de los campos.

- **Solución**

Como la densidad de flujo en el entrehierro es conocida, puede calcularse el flujo en el entrehierro. Puesto que las secciones magnéticas *def* y *chg* están en serie con el entrehierro, conducen el mismo flujo. Por consiguiente, es posible calcular la caída de fmm para cada sección, según se indica en la tabla siguiente:

Sección	*Flujo* (mWb)	*Área* (cm^2)	*B* (T)	*H* (A • t/m)	ℓ (cm)	*fmm* (A • t)
fg	0.12	24	0.05	39 788.74	0.5	198.94
def	0.12	24	0.05	79.58	28.0	22.28
chg	0.12	24	0.05	79.58	31.5	25.07
Caída total de la fmm para las secciones magnéticas *fg*, *def* y *chg*						246.29



(Todas las dimensiones están en centímetros)

Figura 2.17. Circuito magnético para el ejemplo 2.7.

La caída de fmm para la región *dc* es la misma que aquélla para las regiones combinadas *fg*, *def* y *chg*. Por tanto, es posible determinar el flujo en la región *dc* si se trabaja en retroceso. El flujo en la región *dabc* es la suma de los flujos en las regiones *dc* y *fg*. Con tal conocimiento, puede obtenerse la caída de la fmm para cada una de estas regiones, según se tabula en seguida:

Sección	*Flujo* (mWb)	*Área* (cm²)	*B* (T)	*H* (A • t/m)	*ℓ* (cm)	*fmm* (A • t)
dc	3.48	36	0.967	1539.31	16	246.29
ad	3.60	16	2.25	3580.99	18	644.58
ab	3.60	16	2.25	3580.99	16	572.96
bc	3.60	16	2.25	3580.99	18	644.58
Caída total de la fmm para el circuito magnético						2108.41

La corriente en la bobina $I = 2108.41/1000 \approx 2.11\text{A}$

■

Ejemplo 2.8

En la figura 2.18 se describe un circuito magnético con las dimensiones pertinentes en milímetros. La característica de magnetización del material magnético se muestra en la

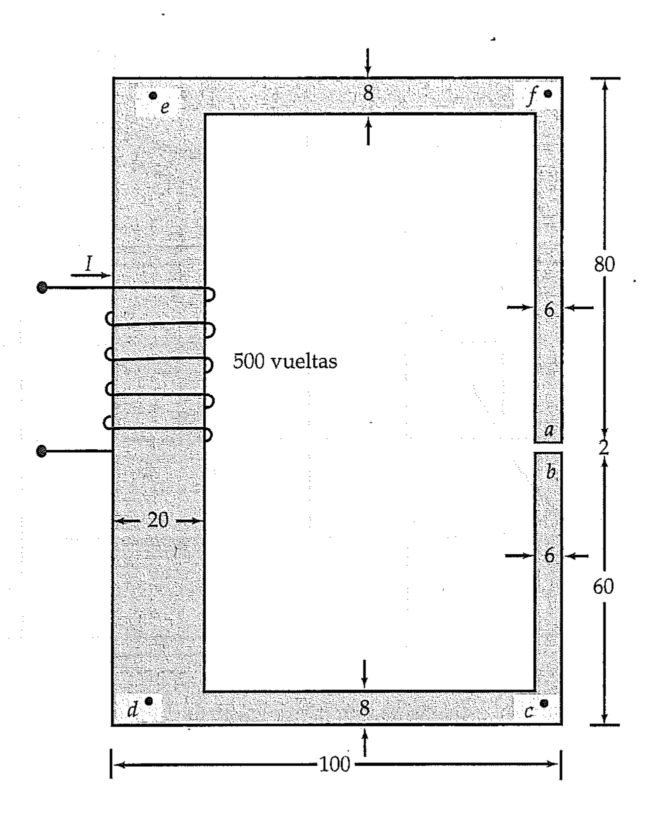


Figura 2.18. Circuito magnético para el ejemplo 2.8.

figura 2.19. Si el circuito magnético tiene un espesor uniforme de 20 mm y la densidad de flujo en el entrehierro es de 1.0 T, encuentre la corriente en la bobina de 500 vueltas.

- Solución

Como la permeabilidad del material magnético depende de la densidad de flujo, no es posible calcular la reluctancia a menos que se conozca la densidad de flujo. Los problemas de este tipo pueden resolverse con facilidad aplicando el método de los campos.

Como la densidad de flujo en el entrehierro es conocida, se calcula el flujo en el entrehierro como

$$\Phi_{ab} = 1.0 \times 6 \times 20 \times 10^{-6} = 0.12 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Puesto que la estructura magnética constituye un circuito magnético en serie, el flujo en cada sección del circuito es la misma. Luego, puede calcularse la caída de la fmm para cada sección, como se indica en la tabla siguiente:

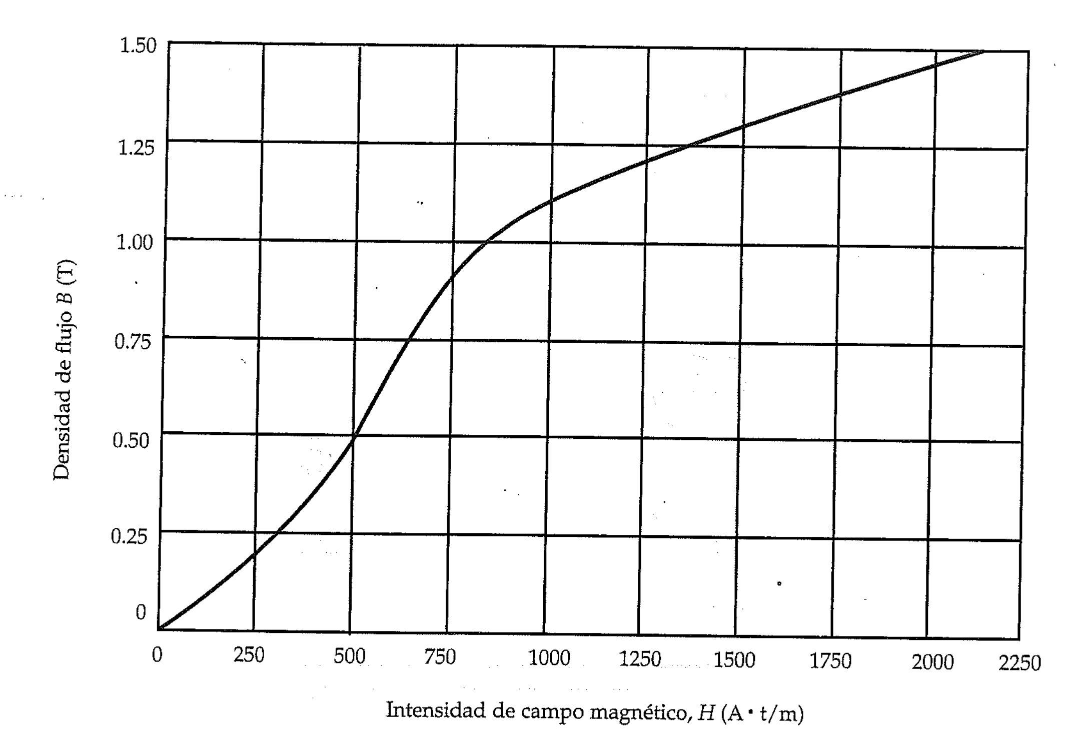


Figura 2.19. Característica de magnetización de un material magnético.

Sección	*Flujo* (mWb)	*Área* (mm²)	*B* (T)	*H* (A • t/m)	*ℓ* (cm)	*fmm* (A • t)
ab	0.12	120	1.00	795 774.72	2	1 591.55
bc	0.12	120	1.00	850.00	56	47.60
cd	0.12	160	0.75	650.00	87	56.55
de	0.12	400	0.30	350.00	134	46.90
ef	0.12	160	0.75	650.00	87	56.55
fa	0.12	120	1.00	850.00	76	64.60
Caída total de la fmm en el circuito magnético						1 863.75

Por tanto, la corriente en la bobina de 500 vueltas es

$$I = \frac{1863.75}{500} = 3.73 \text{ A}$$

■

Ejemplo 2.9

En la figura 2.20 se muestra un circuito magnético con sus longitudes promedio y áreas de secciones transversales. Si una bobina de 600 vueltas conduce una corriente de 10 A, ¿cuál es el flujo en el circuito magnético en serie? Use la curva de magnetización que se da en la figura 2.19 para el material magnético utilizado.

• Solución

La fmm aplicada es fmm = 600 × 10 = 6000 A • t. Como el circuito magnético es no lineal, debe aplicarse el método iterativo para determinar el flujo. En ausencia de cualquier otra información, supongamos que 50% de la caída de la fmm total tiene lugar en el entrehierro. A continuación se puede calcular la caída total de la fmm como sigue:

Primera iteración

Sección	*Flujo* (mWb)	*Área* (cm²)	*B* (T)	*H* (A • t/m)	*ℓ* (cm)	*fmm* (A • t)
ab	0.942	10	0.942	750 000	0.4	3 000
bc	0.942	10	0.942	780	30.0	234
cd	0.942	15	0.628	570	20.0	114
da	0.942	10	0.942	780	30.0	234
Caída total de la fmm para el circuito magnético en serie						3 582

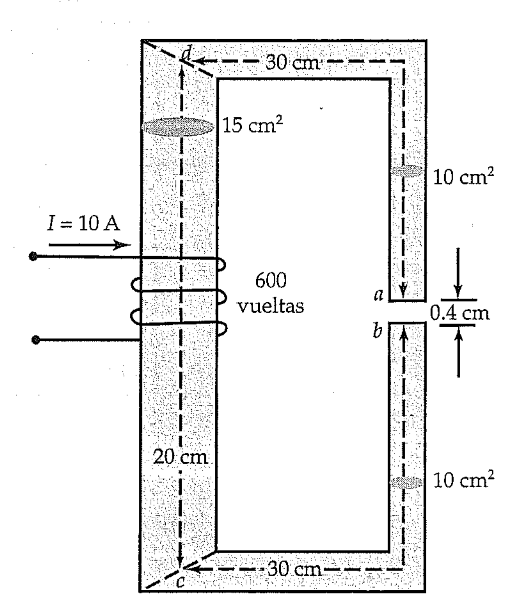


Figura 2.20. Circuito magnético para el ejemplo 2.9.

Resulta evidente que la mayor parte de la fmm aplicada aparece como una caída a través del entrehierro. La relación entre la caída de la fmm a través del entrehierro y la caída total de fmm es 0.838 (3000/3582). En otras palabras, la caída de la fmm a través del entrehierro parece ser 83.8% de la fmm aplicada. Sin embargo, cualquier aumento en la caída de fmm en el entrehierro incrementa la densidad de flujo en cada región magnética. Debido al comportamiento magnético no lineal, el incremento en la caída de la fmm en cada sección magnética también puede ser considerable. Por consiguiente, supongamos que la caída total en la fmm a través del entrehierro es de sólo 80%, en lugar del 83.8% de la fmm aplicada. Así, se comienza la segunda iteración con una caída de la fmm de 4 800 A•t (0.8 × 6 000) a través del entrehierro.

Segunda iteración

Sección	*Flujo* (mWb)	*Área* (cm²)	*B* (T)	*H* (A • t/m)	*ℓ* (cm)	*fmm* (A • t)
ab	1.508	10	1.508	1 200 000	0.4	4 800.0
bc	1.508	10	1.508	2 175	30.0	652.5
cd	1.508	15	1.005	850	20.0	170.0
da	1.508	10	1.508	2 175	30.0	652.5
Caída total de la fmm para el circuito magnético en serie						6 275.0

El error asciende todavía a 4.58% y no se encuentra dentro del límite deseable. Partiendo de la tabla anterior, podemos concluir que la mayor parte de la caída extra de 275 A • t en la fmm se presenta a través del entrehierro. Si reducimos la caída de la fmm a través del entrehierro a 4600 A • t aproximadamente, es posible ubicar el error dentro de ±2%. Procedamos con una nueva iteración para lograrlo.

Tercera iteración

Sección	*Flujo* (mWb)	*Área* (cm²)	*B* (T)	*H* (A • t/m)	*ℓ* (cm)	*fmm* (A • t)
ab	1.445	10	1.445	1 150 000	0.4	4 600
bc	1.445	10	1.445	1 950	30.0	585
cd	1.445	15	0.963	820	20.0	164
da	1.445	10	1.445	1 950	30.0	585
Caída total de la fmm para el circuito magnético en serie						5 934

Ahora, el error es de –1.1%, y se encuentra dentro del límite aceptable. Por tanto, no es necesaria otra iteración. El flujo en la estructura magnética es de 1.445 mWb.

■

Ejercicios

2.5. Encuentre la corriente en la bobina de 1000 vueltas para el circuito magnético que se muestra en la figura 2.17, utilizando el método de la reluctancia con permeabilidad relativa del material magnético igual a 500. También trace su circuito eléctrico análogo.

2.6. Encuentre la fmm necesaria para establecer un flujo de 10 mWb en un anillo magnético de sección transversal circular. El diámetro interno del anillo es de 20 cm y el externo de 30 cm. La permeabilidad relativa del material magnético es de 1200. ¿Cuál es la reluctancia de la trayectoria magnética?

2.7. En la figura E2.7 se muestra el núcleo magnético con sus dimensiones pertinentes. El espesor del material magnético es de 10 cm. ¿Cuál debe ser la corriente en una bobina de 100 vueltas para establecer un flujo de 6.5 mWb en la rama *c*? Utilice la curva de magnetización de la figura 2.19.

2.8. Si la bobina de 100 vueltas de la figura E2.7 conduce una corriente de 10 A, determine el flujo en cada rama del circuito magnético. Use la curva de magnetización de la figura 2.19.

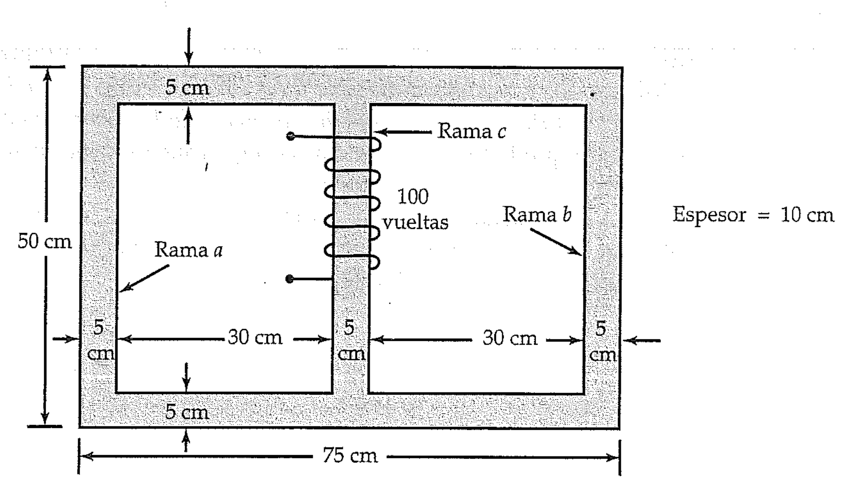


Figura E2.7. Núcleo magnético con ramas paralelas.

2.5. Autoinductancia e inductancia mutua

En el capítulo 1 repasamos las técnicas para analizar circuitos que ayudan a examinar los dispositivos de conversión de energía, pues cada uno de éstos puede representarse con un circuito eléctrico equivalente.

En este capítulo encontramos que un circuito magnético es el corazón de todo dispositivo de conversión de energía. El circuito magnético consta de una bobina o bobinas enrolladas alrededor de un material altamente magnético. Como la bobina está hecha de un material conductor como el cobre, tiene resistencia finita. Al diseñar

una máquina eléctrica siempre se intenta mantener la resistencia de la bobina tan baja como sea posible con objeto de reducir al mínimo la pérdida de potencia en la bobina. La resistencia de la bobina, no importa cuán pequeña pueda ser, forma parte del circuito eléctrico equivalente.

La otra parte del circuito eléctrico equivalente se origina por el flujo en el núcleo magnético del dispositivo de conversión de energía y de su interacción con las bobinas enrolladas en derredor del dispositivo. El objetivo de esta sección es desarrollar relaciones matemáticas que permitan representar un circuito magnético por medio de la autoinductancia y de la inductancia mutua.

Autoinductancia

Consideremos un circuito magnético como el que se muestra en la figura 2.21. Una corriente cambiante en la bobina establece un flujo magnético cambiante en el material magnético. El flujo magnético cambiante induce una fem en la bobina de acuerdo con la ley de Faraday de la inducción. Es decir,

$$e = N\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.21}$$

donde Φ es el flujo en el circuito magnético, N es el número de vueltas en la bobina, y $N\Phi$ son los *concatenamientos de flujo*. Observe que *se ha eliminado el signo negativo en la ecuación anterior debido a que hemos marcado la polaridad de la fem inducida en la bobina.* Puesto que la fem se opone al voltaje aplicado, según se indicó, también se conoce como *fuerza contraelectromotriz*.

La *autoinductancia* o, simplemente, *inductancia* de una bobina se define como la relación entre un cambio diferencial en los concatenamientos de flujo y el cambio diferencial en la corriente. Es decir,

$$L = N\frac{d\Phi}{di} \tag{2.22}$$

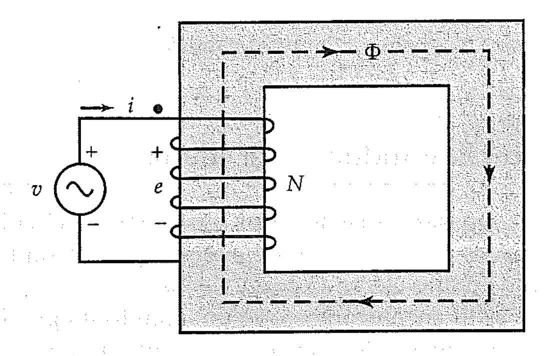


Figura 2.21. Fuerza electromotriz inducida en una bobina.

donde L es la inductancia de la bobina medida en henrys (H).

La fem inducida [ecuación (2.21)] puede expresarse en términos de la inductancia como

$$e = N\frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt} \tag{2.23}$$

Ésta es la forma de la ley de la inducción de Faraday que se usa comúnmente en el análisis de circuitos eléctricos. La ecuación (2.23) establece que *la inductancia de una bobina es de 1 H si la corriente que varía a razón de 1 A/s induce una fem de 1 V en la bobina.*

El concepto de inductancia es muy útil porque brinda un método abreviado para expresar la fem inducida en la bobina directamente en términos de la corriente que se produce en ella. Sin este concepto, primero tendría que determinarse el flujo en el circuito magnético causado por la corriente y después aplicarse la ley de la inducción de Faraday para obtener la fem inducida.

Como $\mathcal{F} = Ni$ es la fmm aplicada y $\mathcal{R} = \ell/\mu A$ es la reluctancia del circuito magnético, el flujo en el núcleo magnético es

$$\Phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}}$$

Luego, con base en la ecuación (2.22), la inductancia de la bobina es

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \mathcal{P}N^2 \tag{2.24}$$

donde $\mathcal{P} = 1/\mathcal{R} = \mu A/\ell$ se conoce como la *permeancia* del circuito magnético. Como la vuelta es una cantidad adimensional, la unidad de permeancia a partir de la ecuación anterior es el henry (H).

Con base en la ecuación (2.24) es evidente que la inductancia depende de las dimensiones físicas del circuito magnético y de la permeabilidad del material magnético. Si la bobina está devanada sobre un material no magnético, la inductancia es constante. Por otro lado, si el núcleo está constituido por un material ferromagnético, la inductancia no es realmente constante, sino que es una función de la densidad del flujo magnético en el núcleo. Sin embargo, al analizar máquinas eléctricas suele presuponerse que es constante, en el entendido de que se está operando en la región lineal de la curva *B-H*, donde la permeabilidad es prácticamente constante.

Durante la explicación sobre los circuitos magnéticos se obtuvo la expresión exacta [ecuación (2.15)] para el flujo total en el toroide:

$$\Phi = \frac{\mu Ni}{2\pi}\, h \ln(b/a)$$

Luego, la expresión exacta para la inductancia del devanado toroidal es

$$L = N\frac{d\Phi}{di} = \frac{\mu}{2\pi}N^2 h \ln(b/a)$$

El circuito eléctrico equivalente del toroide se muestra en la figura 2.22, donde R es la resistencia de la bobina. Aun cuando la resistencia de la bobina es un parámetro distribuido, es práctica común representarla como un parámetro acumulado.

Inductancia mutua

Considérese el circuito magnético que se muestra en la figura 2.23*a*. Una corriente variante en el tiempo i_1, establece un flujo magnético Φ_1 en la bobina 1 cuando se deja abierta la bobina 2. Este flujo induce una fem en la bobina 1. Parte del flujo, Φ_{21}, producido por la bobina 1 se muestra concatenando la bobina 2. Este flujo induce una fem en la bobina 2. Luego,

$$e_1 = N_1\frac{d\Phi_1}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} \tag{2.25}$$

$$e_2 = N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt} = N_2\frac{d\Phi_{21}}{di_1}\frac{di_1}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt} \tag{2.26}$$

donde L_1 es la autoinductancia de la bobina 1,

y

$$M_{21} = N_2\frac{d\Phi_{21}}{di_1} \tag{2.27}$$

corresponde a la *inductancia mutua de la bobina 1 a la bobina 2.*

En forma semejante, si la bobina 2 conduce una corriente i_2 mientras que la bobina 1 se deja abierta y crea un flujo Φ_2, como aparece en la figura 2.23*b*, sucede que Φ_2

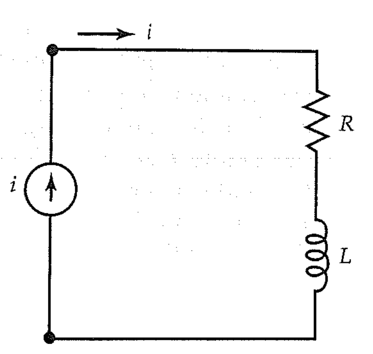
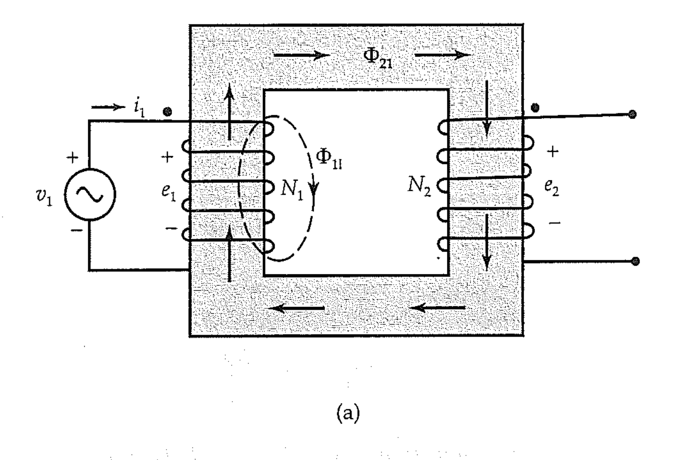
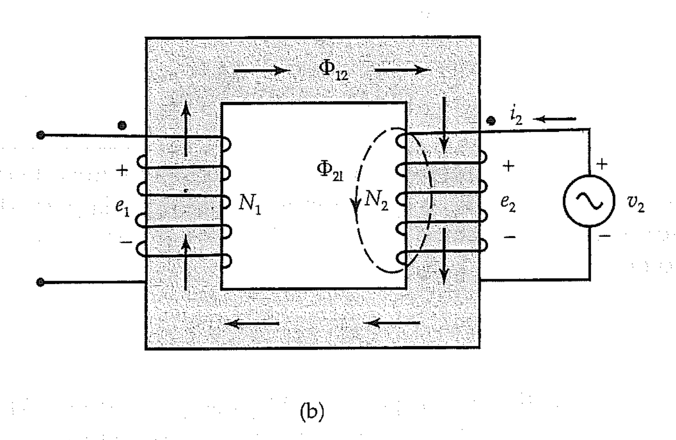


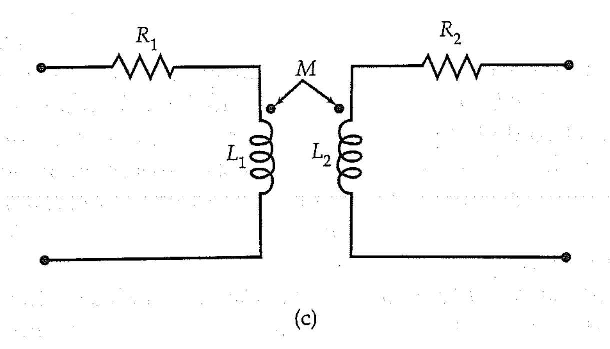
Figura 2.22. Circuito equivalente en serie del toroide que se muestra en la figura 2.13.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.23. Autoinductancia e inductancia mutua de dos bobinas y su circuito equivalente.

induce una fem en la bobina 2. Parte del flujo Φ_{12} que se muestra en la figura encadena la bobina 1 e induce una fem en ella. Esto es,

$$e_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{2.28}$$

$$e_1 = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{di_2}\frac{di_2}{dt} = M_{12}\frac{di_2}{dt} \tag{2.29}$$

donde L_2 es la autoinductancia de la bobina 2, y

$$M_{12} = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{di_2} \tag{2.30}$$

corresponde a la *inductancia mutua de la bobina 2 a la bobina 1.*

De las ecuaciones 2.27 y 2.30 se obtiene

$$M_{21}M_{12} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{di_1} N_1 \frac{d\Phi_{12}}{di_2}$$

Si se expresa $\Phi_{21} = k_1\Phi_1$, donde k_1 define la fracción del flujo de la bobina 1 que se enlaza con la bobina 2, y $\Phi_{12} = k_2\Phi_2$, donde k_2 determina la parte del flujo de la bobina 2 que se enlaza con la bobina 1, la ecuación anterior puede expresarse en términos de las autoinductancias en la forma siguiente

$$M_{12}M_{21} = k_1k_2L_1L_2 \tag{2.31}$$

En un sistema lineal, se espera que $M_{12} = M_{21} = M$, donde M es la *inductancia mutua* de las bobinas 1 y 2. Luego, la ecuación (2.31) se reduce a

$$M = k\sqrt{L_1L_2} \tag{2.32}$$

donde $k = \sqrt{k_1k_2}$ se conoce como el *coeficiente de acoplamiento* o *factor de acoplamiento* entre las dos bobinas. De nuestro análisis se desprende que k sólo puede tomar valores entre 0 *(bobinas aisladas magnéticamente)* y 1 *(bobinas acopladas estrechamente).* Para el circuito magnético de la figura 2.23 se observa que $k \rightarrow 1$ cuando el flujo de dispersión $\rightarrow 0$. A fin de reducir al mínimo el flujo de dispersión, generalmente las dos bobinas están devanadas una sobre la otra. Cuando se acoplan más de dos bobinas por medio de un circuito magnético común cada par de bobinas tiene un coeficiente de acoplamiento diferente.

El circuito equivalente de las dos bobinas acopladas se ilustra en la figura 2.23*c*. Con la finalidad de ajustarse a las polaridades de las fem inducidas en las figuras 2.23*a* y *b*, se colocó un punto en un extremo (terminal) de cada bobina. El alcance de esta convención es que cuando ingresa una corriente en aumento por el extremo con

punto de una bobina, hace positivo el extremo con punto de cada bobina con respecto al extremo no marcado. En otras palabras, los extremos con punto son terminales con la misma polaridad.

Ejemplo 2.10

Dos bobinas idénticas de 500 vueltas están devanadas sobre el mismo núcleo magnético. Una corriente que varía a la tasa de 2 000 A/s en la bobina 1 induce un voltaje de 20 V en la bobina 2. ¿Cuál es la inductancia mutua de este arreglo? Si la autoinductancia de la bobina 1 es 25 mH, ¿qué porcentaje del flujo desarrollado por la bobina 1 se enlaza con la bobina 2?

- Solución

De la ecuación 2.26, la inductancia mutua entre las bobinas es

$$M = \frac{20}{2000} = 0.01\ \mathrm{H}$$

Puesto que las dos bobinas son idénticas, sus autoinductancias deben ser las mismas. Por consiguiente, de la ecuación (2.32) se tiene que

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = kL$$

donde $L_1 = L_2 = 25$ mH. Luego, el coeficiente de acoplamiento es

$$k = \frac{0.01}{0.025} = 0.4$$

Por tanto, con este arreglo de bobinas sólo 40% del flujo que produce la bobina 1 se encadena con la bobina 2.

■

Ejercicios

2.9. Una bobina establece un flujo de 100 mWb. De este flujo total, 30 mWb están enlazados con otra bobina. ¿Cuál es el coeficiente de acoplamiento entre las dos bobinas?

2.10. La inductancia mutua entre dos bobinas es 0.5 H. Se aplica a una bobina una corriente con forma de onda como la que se ilustra en la figura E2.10. Trace la fem inducida en la otra bobina. Si el coeficiente de acoplamiento es de 0.8 y las dos bobinas son idénticas, determine la autoinductancia de cada una de ellas.

2.11. El coeficiente de acoplamiento entre dos bobinas es 0.9. La inductancia de una bobina es de 2 mH y la de la otra es de 10 mH. Si el voltaje a circuito abierto

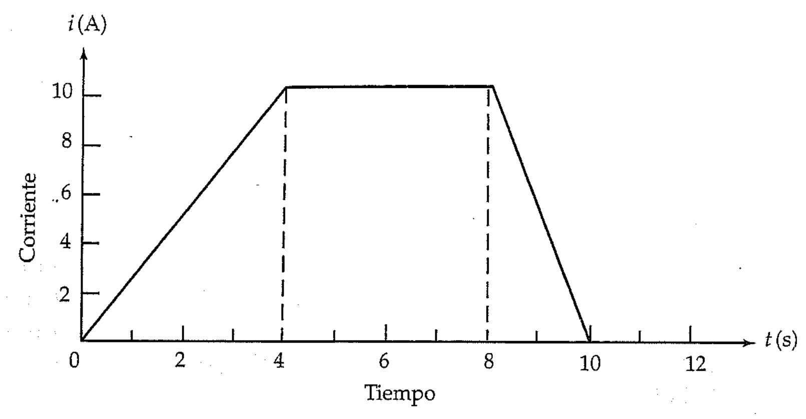


Figura E2.10. Forma de la onda de corriente para el ejercicio 2.10.

inducido en una bobina de 10 mH es 100 cos 200t V, determine el voltaje que se induce en la otra bobina.

2.12. Demuestre que la ecuación (2.32) también puede expresarse como $M = kN_1N_2\mathcal{P}$.

2.6. Bobinas acopladas magnéticamente

Dos o más bobinas acopladas magnéticamente pueden estar conectadas en serie, en paralelo o de las dos formas. La inductancia efectiva de las bobinas acopladas magnéticamente no sólo depende de la orientación de las bobinas, sino también de la dirección del flujo producido por cada una de ellas. Un transformador con dos devanados, un autotransformador y un motor de inducción constituyen ejemplos de bobinas (circuitos) acopladas magnéticamente. Cada uno de estos temas se analiza con mayor amplitud en capítulos posteriores.

Conexión en serie

En una conexión en serie, las bobinas acopladas magnéticamente pueden conectarse en *serie aditiva* o en *serie sustractiva*. Se dice que las bobinas están conectadas en *serie aditiva* si producen un flujo en la misma dirección, es decir, si el flujo total que encadena a cualquier bobina es mayor que el suyo propio.

En la figura 2.24*a* se ilustra un circuito equivalente de dos bobinas conectadas en serie aditiva. Si la corriente en el circuito en cualquier tiempo t es $i(t)$, entonces la caída de voltaje a través de cada bobina es

$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \tag{2.33}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \tag{2.34}$$

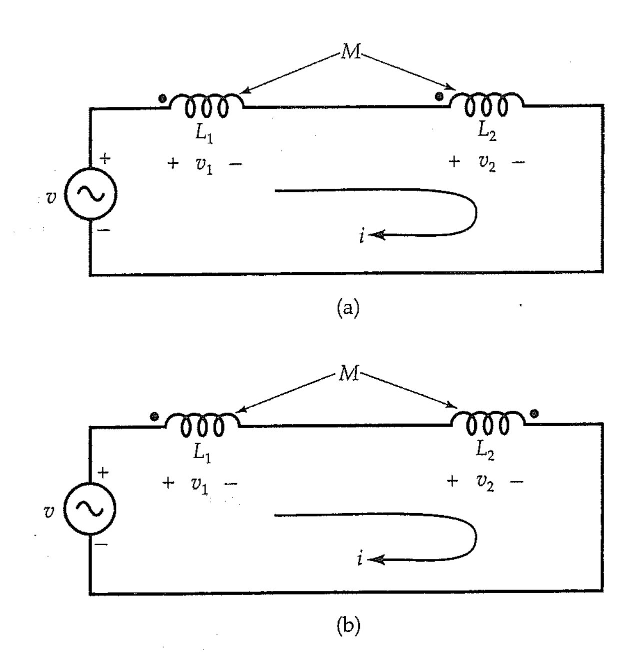


Figura 2.24. Bobinas acopladas magnéticamente **(a)** en serie aditiva y **(b)** en serie sustractiva.

donde L_1 y L_2 son las autoinductancias de las bobinas 1 y 2 y M es la inductancia mutua entre ellas. Para simplificar el desarrollo matemático, se ha ignorado la resistencia de cada bobina.

De la ley del voltaje de Kirchhoff se tiene que

$$v = v_1 + v_2 = [L_1 + L_2 + 2M]\frac{di}{dt} \tag{2.35}$$

Luego, la inductancia efectiva de dos bobinas conectadas en serie aditiva es

$$\text{Serie adictiva: } L = L_1 + L_2 + 2M \tag{2.36}$$

Por otro lado, cuando el flujo que produce una bobina se opone al flujo que produce la otra, se dice que las bobinas están conectadas en *serie sustractiva*. Siguiendo un desarrollo semejante, es posible demostrar que la inductancia efectiva de una conexión en serie sustractiva (fig. 2.24*b*) es

$$\text{Serie sustractiva: } L = L_1 + L_2 - 2M \tag{2.37}$$

Ejemplo 2.11

Las inductancias efectivas cuando se conectan dos bobinas en serie aditiva y en serie sustractiva son 2.38 H y 1.02 H, respectivamente. Si la inductancia de una bobina es 16 veces la inductancia de la otra, determine *a*) la inductancia de cada bobina, *b*) la inductancia mutua, y *c*) el coeficiente de acoplamiento.

- Solución

De la información que se proporciona se tiene que

$$L_1 + L_2 + 2M = 2.38\,\text{H} \quad \text{y} \quad L_1 + L_2 - 2M = 1.02\,\text{H}$$

Sumando y restando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$L_1 + L_2 = 1.7\,\text{H} \quad \text{y} \quad M = 0.34\,\text{H}$$

Sean $L_1 = 16\,L_2$, entonces de $L_1 + L_2 = 1.7$ H, se obtiene

$$L_1 = 1.6\,\text{H} \quad \text{y} \quad L_2 = 0.1\,\text{H}$$

El coeficiente de acoplamiento es

$$k = \frac{0.34}{\sqrt{1.6 \times 0.1}} = 0.85$$

■

Conexión en paralelo

En la figura 2.25 se muestran dos bobinas acopladas magnéticamente en paralelo. Supongamos que las dos bobinas producen el flujo en la misma dirección cuando las corrientes entran en las terminales identificadas con puntos. En ese caso se dice que las bobinas están conectadas en *paralelo aditivo*. Si i_1 e i_2 son las corrientes a través de las bobinas 1 y 2 con inductancias L_1 y L_2, entonces la corriente que suministra la fuente y su tasa de cambio con respecto al tiempo son

$$i = i_1 + i_2 \tag{2.38}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \tag{2.39}$$

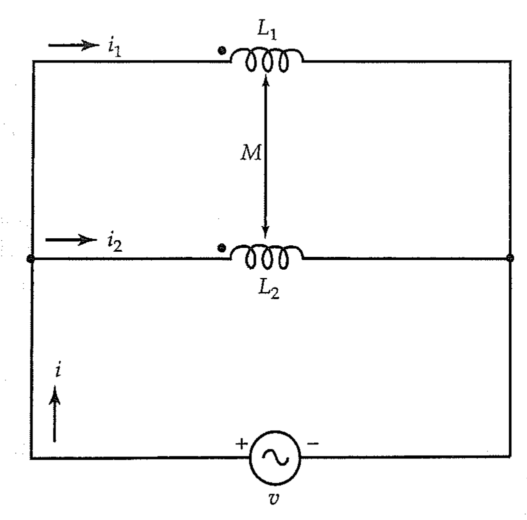


Figura 2.25. Bobinas acopladas magnéticamente en paralelo aditivo.

La caída de voltaje a través de la bobina 1 es

$$v = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Al sustituir di_1/dt de la ecuación (2.39) en la ecuación anterior se obtiene

$$v = L_1 \frac{di}{dt} - [L_1 - M] \frac{di_2}{dt} \tag{2.40}$$

En forma semejante, la caída de voltaje a través de la bobina 2 es

$$v = M \frac{di}{dt} + [L_2 - M] \frac{di_2}{dt} \tag{2.41}$$

Si se igualan las ecuaciones (2.40) y (2.41) y se despeja para di/dt se tiene que

$$\frac{di}{dt} = \left[\frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 - M} \right] \frac{di_2}{dt} \tag{2.42}$$

Si la inductancia equivalente de este arreglo es L, entonces

$$v = L \frac{di}{dt} \tag{2.43}$$

De las ecuaciones (2.40) y (2.43) se obtiene

$$\frac{di}{dt} = -\left[\frac{L_1 - M}{L - L_1}\right]\frac{di_2}{dt} \tag{2.44}$$

Contamos ahora con dos expresiones, las ecuaciones 2.42 y 2.44, para la tasa de cambio de la corriente de la fuente di/dt. Como cada expresión debe rendir la misma tasa de cambio de la corriente de la fuente, al igualarlas y reagruparlas se obtiene

$$L = \left[\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}\right] \tag{2.45}$$

como la inductancia equivalente de dos bobinas acopladas magnéticamente en paralelo aditivo.

Se deja al lector verificar que la inductancia equivalente de dos bobinas acopladas magnéticamente y conectadas en *paralelo sustractivo* es

$$L = \left[\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}\right] \tag{2.46}$$

Ejemplo 2.12

Dos bobinas acopladas magnéticamente con autoinductancias de 1.6 H y 0.1 H están conectadas en paralelo. La inductancia mutua es 0.34 H. Calcule la inductancia efectiva si las bobinas se conectan *a*) en paralelo aditivo y *b*) en paralelo sustractivo.

- Solución

a) De la ecuación (2.45), la inductancia efectiva para la conexión en paralelo aditivo es

$$L = \frac{1.6 \times 0.1 - 0.34^2}{1.6 + 0.1 - 2 \times 0.34} = 0.0435 \text{ H o } 43.5 \text{ mH}$$

b) Con base en la ecuación (2.46), la inductancia equivalente para la conexión en paralelo es

$$L = \frac{1.6 \times 0.1 - 0.34^2}{1.6 + 0.1 + 2 \times 0.34} = 0.0187 \text{ H o } 18.7 \text{ mH}$$

■

Ejercicios

2.13. Compruebe las ecuaciones 2.37 y 2.46.

2.14. Dos bobinas con inductancias de 2 H y 0.5 H están conectadas en serie aditiva. Si el coeficiente de acoplamiento entre las bobinas es 0.4, determine la inductancia efectiva de éstas. ¿Cuál es la inductancia efectiva si las bobinas están conectadas en serie sustractiva?

2.15. Las inductancias de dos bobinas son 20 mH y 80 mH. La inductancia mutua de las bobinas es 4 mH. Calcule *a*) el coeficiente de acoplamiento, *b*) la inductancia equivalente si se conectan en serie aditiva, *c*) la inductancia equivalente si se conectan en serie sustractiva, *d*) la inductancia equivalente si se conectan en paralelo aditivo, y *e*) la inductancia equivalente si se conectan en paralelo sustractivo.

2.16. Dos bobinas con inductancias de 2 H y 6 H están conectadas en paralelo. La inductancia equivalente es 1 H. ¿Cuál es la inductancia mutua? Si el coeficiente de acoplamiento es superior a 50%, ¿las bobinas están conectadas en paralelo aditivo o sustractivo? ¿Cuál es el coeficiente de acoplamiento?

2.7. Pérdidas magnéticas

En el análisis de una máquina eléctrica las pérdidas en ella se dividen generalmente en tres grandes categorías: pérdidas en el cobre, pérdidas mecánicas y pérdidas magnéticas. La pérdida en el cobre tiene lugar en el devanado de cada máquina. Las pérdidas mecánicas se originan por la rotación del elemento giratorio (rotor) de una máquina y pueden dividirse en tres tipos: fricción en los cojinetes, fricción de las escobillas y fricción con el viento. Las dos fuentes de la pérdida magnética *(pérdida en el hierro* o *pérdida en el núcleo)* son las pérdidas por corrientes parásitas y las pérdidas por histéresis.

Pérdidas por corrientes parásitas

Si un flujo magnético que varía en el tiempo se encadena con una bobina, induce en ella una fem de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. Como la bobina está devanada sobre un material magnético, el mismo flujo variable en el tiempo también induce una fem en el material magnético. Debido a que un material magnético también es un buen conductor de la electricidad, la fem inducida a lo largo de una trayectoria cerrada dentro del material magnético genera una corriente a lo largo de dicha trayectoria. La ubicación y la trayectoria de esa corriente son tales que encierran el flujo magnético que la produce. En efecto, existen tantas trayectorias cerradas en torno al campo magnético dentro del material magnético como sea imaginable. En la figura 2.26*a* se muestran algunas de las trayectorias para las *corrientes inducidas* en un material magnético sólido cuando la densidad de flujo aumenta con el tiempo. El patrón en remolino de tales corrientes circulantes en un material magnético es semejante al de los remolinos de aire o agua, y se les conoce como *corrientes parásitas* o *corrientes de Foucault.*

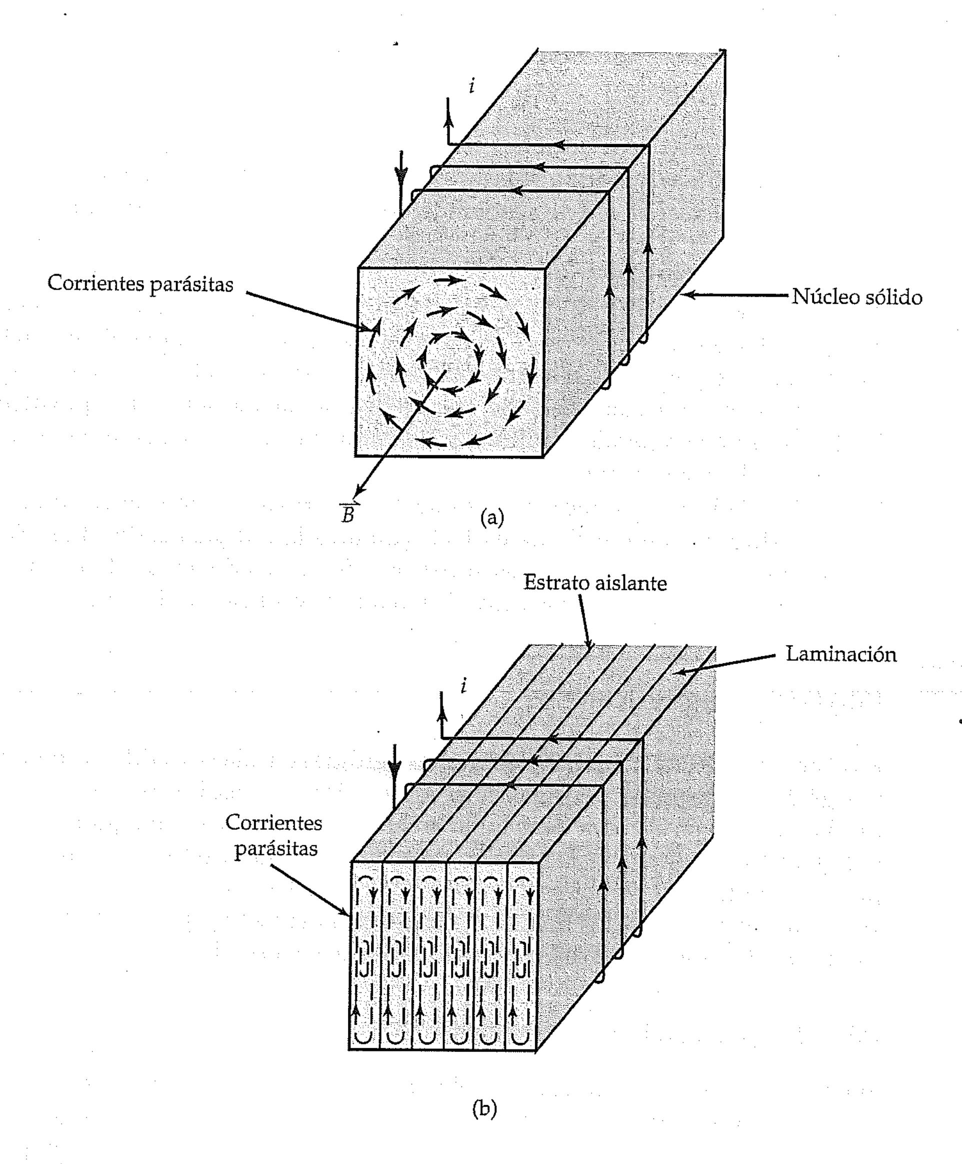


Figura 2.26. Corrientes parásitas en núcleo de material **(a)** sólido y **(b)** laminado, cuando la corriente en la bobina aumenta con el tiempo.

Conforme aumenta el flujo en el material magnético, también lo hace la fem inducida en cada trayectoria circular. El incremento en la fem inducida origina un incremento en la corriente parásita en esa trayectoria. Como consecuencia de esta corriente, la energía se convierte en calor en la resistencia de la trayectoria. Al sumar la pérdida de potencia en cada lazo dentro del material magnético, se obtiene la pérdida total de potencia en este material ocasionada por las corrientes parásitas. Esta pérdida de potencia se llama *pérdida por corrientes parásitas.*

Las corrientes parásitas establecen su propio flujo magnético, el cual tiende a oponerse al flujo magnético original. Por tanto, las corrientes parásitas no sólo dan como resultado la pérdida por corriente parásita dentro del material magnético, sino que también ejercen un efecto desmagnetizador en el núcleo. En consecuencia, se tiene que aplicar más fuerza magnetomotriz para producir el mismo flujo en el núcleo. La desmagnetización se incrementa a medida que nos acercamos al eje del núcleo magnético. El efecto conjunto de desmagnetización es la concentración del flujo magnético hacia la superficie exterior del material magnético. Esto obliga a que la parte interior del núcleo sea magnéticamente inútil.

Los efectos adversos de las corrientes parásitas pueden reducirse al mínimo si el núcleo magnético se construye con alta resistencia en la dirección en la que tienden a fluir las corrientes parásitas. En la práctica esto se logra construyendo el núcleo magnético apilando piezas delgadas de materiales magnéticos. La pieza delgada, conocida como *laminación*, está recubierta con barniz o goma laca y se consigue comercialmente en espesores que van de 0.36 mm a 0.70 mm. El recubrimiento delgado hace que las laminaciones estén razonablemente bien aisladas en forma eléctrica entre sí. El núcleo magnético construido con laminaciones (fig. 2.26*b*) obliga a las corrientes parásitas a seguir trayectorias largas y estrechas dentro de cada laminación. El resultado neto es la reducción de las corrientes parásitas en el material magnético.

Si suponemos que la densidad de flujo varía en forma senoidal con el tiempo, pero es uniforme en cualquier instante sobre la sección transversal del núcleo magnético, puede demostrarse que la pérdida por corrientes parásitas es

$$P_e = k_e f^2 \delta^2 B_m^2 V \tag{2.47}$$

donde P_e es la pérdida por corrientes parásitas, en watts (W), k_e es una constante que depende de la conductividad del material magnético, f es la frecuencia, en hertz (Hz), δ es el espesor de la laminación, en metros (m), B_m es la densidad máxima de flujo, en teslas (T) y V es el volumen del material magnético, en metros cúbicos (m^3).

Pérdida por histéresis

Cada vez que se obliga al material magnético a recorrer su ciclo de histéresis se produce una pérdida de potencia a la que comúnmente se denomina *pérdida por histéresis*, la cual surge de la fricción molecular a medida que los dominios magnéticos son forzados a invertir sus direcciones por la fmm aplicada.

Después de varios ciclos de magnetización, el ciclo de histéresis se vuelve simétrico, como se aprecia en la figura 2.27. La energía por unidad de volumen (densidad de energía) que se suministra al campo magnético cuando la densidad de flujo se cambia de $-B_r$ (punto *a*) a B_m (punto *c*) a lo largo de la trayectoria *abc* es

$$w_1 = \int_{-Br}^{Bm} \vec{H} \cdot \vec{dB}$$

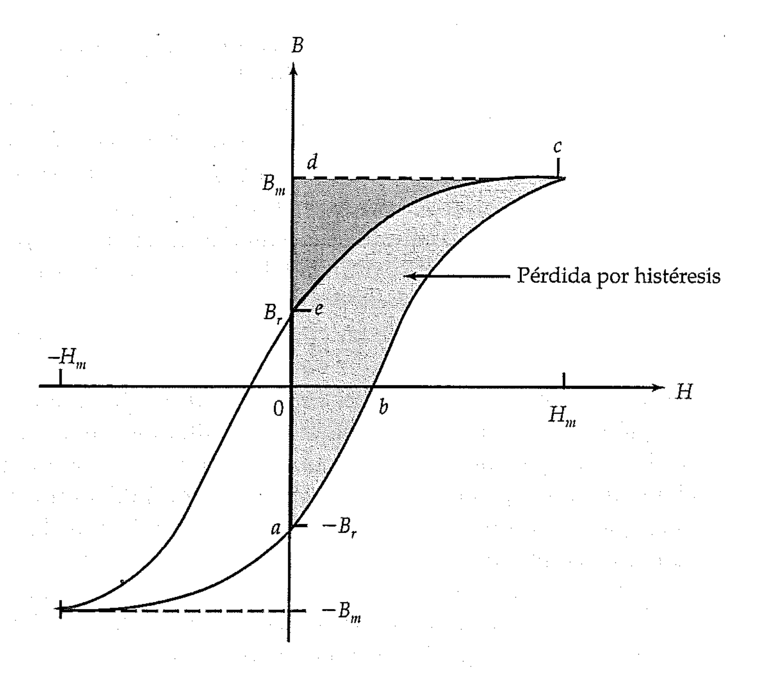


Figura 2.27. Ciclo de histéresis simétrico que muestra pérdida por histéresis.

la cual es simplemente el área sombreada *abcdea*. A medida que se disminuye la densidad de flujo de B_m (punto *c*) a B_r (punto *e*) a lo largo de la trayectoria *ce*, la densidad de energía liberada por el campo magnético es

$$w_2 = \int_{B_m}^{B_r} \vec{H} \cdot \vec{dB}$$

la cual es sencillamente el área sombreada *cdec*. Hemos trazado la mitad del ciclo de histéresis. La pérdida en la densidad de energía durante este semiciclo es $w_1 - w_2$. La otra mitad, al ser idéntica, origina la misma pérdida en la densidad de energía. Por consiguiente, la pérdida total en la densidad de energía es

$$w = 2[w_1 - w_2] \tag{2.48}$$

que representa el área total del ciclo de histéresis. La ecuación (2.48) arroja la pérdida de energía por unidad de volumen por ciclo.

En general, la ecuación (2.48) no puede evaluarse analíticamente porque es imposible expresar H como una función simple de B. Pero puede graficarse a escala la histéresis y medir su área.

Por medio de pruebas en varios materiales ferromagnéticos, Charles Steinmetz propuso que la pérdida por histéresis puede expresarse como

$$P_h = k_h f B_m^n V \tag{2.49}$$

donde P_h es la pérdida de histéresis, en watts, k_h es una constante que depende del material magnético y n es el exponente de Steinmetz. A partir de experimentación se ha encontrado que n varía de 1.5 a 2.5. Las otras cantidades se apegan a las definiciones previas.

La pérdida magnética es la suma de la pérdida por corrientes parásitas y la pérdida por histéresis. Observe que la pérdida por histéresis no depende del espesor de la laminación. Para un material dado, es posible expresar la pérdida magnética como

$$P_m = K_e f^2 B_m^2 + K_h f B_m^n \tag{2.50}$$

donde $K_e = k_e \delta^2 V$, $K_h = k_h V$ y P_m es la pérdida magnética total.

Si las pérdidas magnéticas tuvieran que separarse en las ocasionadas por corrientes parásitas y por histéresis, serían necesarias tres ecuaciones para determinar las tres cantidades desconocidas K_e, K_h y n. Para hacerlo, las pérdidas magnéticas se miden a dos frecuencias y dos densidades de flujo, como se indica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.13

Los datos siguientes se obtuvieron de una lámina delgada de acero al silicio. Calcule la pérdida por histéresis y por corrientes parásitas.

Frecuencia (Hz)	*Densidad de flujo* (T)	*Pérdida magnética* (W/kg)
25	1.1	0.4
25	1.5	0.8
60	1.1	1.2

- **Solución**

Al sustituir los valores en la ecuación (2.50) tenemos que

$$30.25K_e + 1.1^n K_h = 0.016 \tag{2.51}$$

$$56.25K_e + 1.5^n K_h = 0.032 \tag{2.52}$$

$$72.6K_e + 1.1^n K_h = 0.02 \tag{2.53}$$

Si se resta la ecuación (2.51) de la (2.53) se obtiene

$$K_e = 94.451 \times 10^{-6}$$

Al sustituir para K_e en las ecuaciones (2.51) y (2.52) y resolver para n se obtiene

$$n = 2.284$$

Finalmente, a partir de la ecuación (2.53), $K_h = 0.0106$.

Las pérdidas calculadas por corrientes parásitas y por histéresis son las siguientes

Frecuencia (Hz)	*Densidad de flujo* (T)	*Pérdida por histéresis* (W/kg)	*Pérdida por corrientes parásitas* (W/kg)
25	1.1	0.329	0.071
25	1.5	0.669	0.133
60	1.1	0.791	0.411

Estos cálculos muestran que la pérdida por corrientes parásitas es más pequeña que la pérdida por histéresis. En un núcleo laminado, la pérdida por histéresis generalmente es mayor que la pérdida por corrientes parásitas.

■

Ejercicios

2.17. La pérdida por corrientes parásitas en una máquina de inducción es de 200 W y la pérdida por histéresis es de 400 W cuando opera con un suministro de 60 Hz. Encuentre la pérdida magnética total cuando se opera la máquina con una fuente de 50 Hz y con una disminución de 10% en la densidad de flujo. Suponga que $n = 1.6$.

2.18. Los datos siguientes se obtuvieron en un anillo de hierro de fundición. Determine las pérdidas por la histéresis y por corrientes parásitas con ambas frecuencias y ambas densidades de flujo.

Frecuencia (Hz)	*Densidad de flujo* (T)	*Pérdida magnética* (W/kg)
50	0.8	2.4
50	1.2	5.2
60	0.8	3.0

2.19. Se conoce que una muestra de material magnético tiene una pérdida de energía por histéresis de 300 joules por ciclo por metro cúbico cuando la densidad máxima de flujo es de 1.2 T. Halle la pérdida por histéresis en el material magnético si la densidad de flujo es de 0.8 T, el volumen del material magnético es 40 cm^3 y la frecuencia de operación es de 60 Hz. La constante de Steinmetz es de 1.6.

2.20. En un espécimen de cierto material magnético la pérdida magnética fue de 21.6 W a una frecuencia de 25 Hz y densidad de flujo de 0.8 T. Cuando se probó el mismo espécimen a una frecuencia de 60 Hz, la pérdida magnética se incrementó a 58.4 W con la misma densidad de flujo. ¿Cuáles son las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas a cada frecuencia? La constante de Steinmetz es de 1.5.

2.8. Imanes permanentes

El desarrollo rápido de nuevos materiales magnéticos y su disponibilidad comercial han incrementado su uso en el diseño de máquinas de cc y máquinas síncronas. En todas las máquinas que usan imanes permanentes para establecer el flujo magnético que se requiere, es deseable que el material que se usa para los imanes permanentes posea las características siguientes:

a) Retentividad (densidad de flujo residual) alta, de modo que el imán sea poderoso y provea el flujo que se necesita.
b) Coercitividad alta, de manera que no sea fácil que los campos magnéticos espurios lo desmagneticen.

Un material magnético permanente ideal muestra una curva de histéresis amplia, aplanada, de modo que el magnetismo residual permanece en un nivel alto cuando se elimina el campo aplicado. En otras palabras, el área encerrada por la curva de histéresis es muy grande. En la práctica, muy pocos materiales magnéticos satisfacen estos requerimientos.

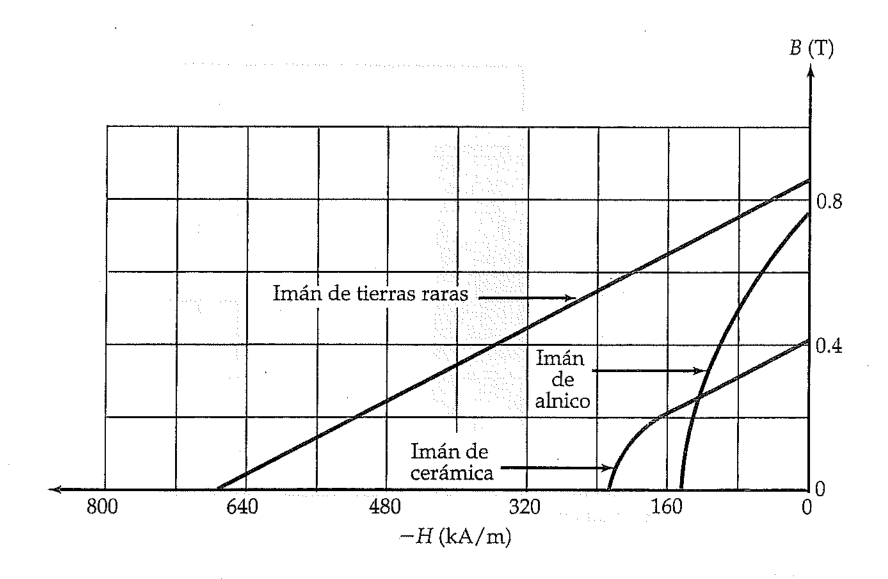


Figura 2.28. Características de desmagnetización para imanes de alnico, cerámica y tierras raras.

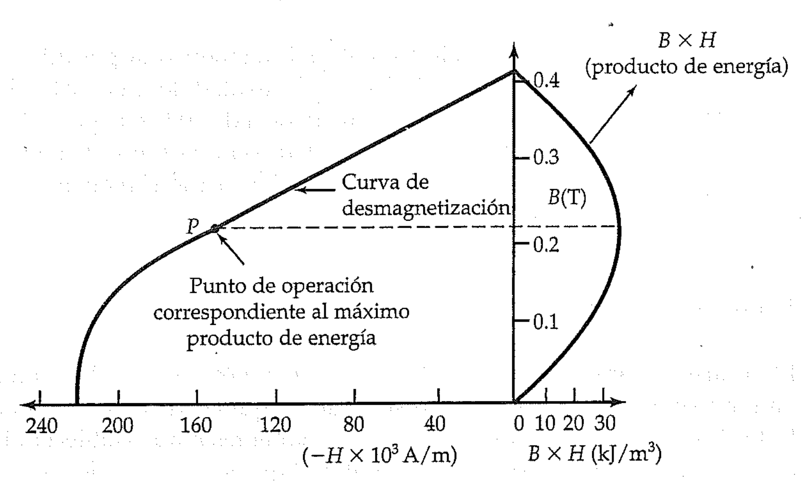


Figura 2.29. Desmagnetización típica y curvas de producto de energía de un imán permanente.

Para el uso apropiado de un imán permanente, centraremos la atención en sus características de desmagnetización, es decir, en el comportamiento de un material en el segundo cuadrante del ciclo de histéresis. En la figura 2.28 se muestra las características de desmagnetización de imanes fabricados con alnico, cerámica y samario (pertenecientes a las tierras raras), todos ellos con alto contenido de cobalto. Como puede verse, hay una gran diferencia entre las curvas de desmagnetización de materiales magnéticos que pertenecen a diferentes grupos de aleaciones.

En el diseño de circuitos magnéticos que utilizan imanes permanentes también sería posible buscar la operación del imán de manera que suministrara el máximo de energía. Como ya se indicó, la densidad de energía es simplemente el área del ciclo

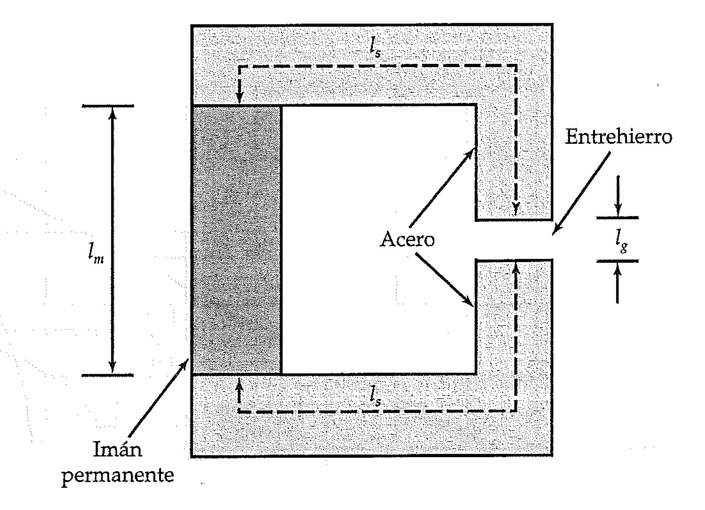


Figura 2.30. Circuito magnético en serie que utiliza un imán permanente.

de histéresis (**B** · **H**). Esta área se llama *producto de energía* y junto con la curva de desmagnetización se describe en la figura 2.29. El punto de operación en su máximo nivel del producto de energía se indica en la figura con una línea punteada.

En la figura 2.30 se muestra un circuito magnético en serie que utiliza un imán permanente para establecer el flujo necesario en la región del entrehierro. Las secciones en forma de L generalmente están hechas con un material magnético de alta permeabilidad y son necesarias para canalizar el flujo en dirección del entrehierro. La aplicación de la ley de Ampère a un circuito magnético cerrado produce

$$H_m \ell_m + H_s \ell_s + H_g \ell_g + H_s \ell_s = 0 \tag{2.54}$$

donde los subíndices m, s y g se utilizan para identificar las cantidades en las regiones del imán permanente, del acero y del entrehierro, respectivamente. En un circuito magnético en serie, el flujo magnético esencialmente es el mismo. Por tanto,

$$B_m A_m = B_g A_g = B_s A_s$$

Puesto que $B = \mu H$, es posible escribir

$$H_g = \frac{B_m A_m}{\mu_0 A_g} \quad \text{y} \quad H_s = \frac{B_m A_m}{\mu_s A_s}$$

Luego, la ecuación (2.54) puede expresarse como

$$H_m = -\left[\frac{\ell_g A_m}{\mu_0 \ell_m A_g} + \frac{2\ell_s A_m}{\mu_s \ell_m A_s}\right] B_m \tag{2.55}$$

La ecuación anterior se llama *línea de operación*, y su intersección con la curva de desmagnetización conduce al *punto de operación*. Si la permeabilidad del acero que se utiliza para las dos secciones en L es muy alta, la ecuación (2.55) puede aproximarse como

$$H_m \cong -\frac{\ell_g A_m}{\mu_0 \ell_m A_g} B_m \tag{2.56}$$

Observe que H_m, en el segundo cuadrante del ciclo de histéresis, es una cantidad negativa. Por tanto, es posible eliminar el signo negativo en la ecuación (2.56) y tomar H_m como la magnitud de la fuerza coercitiva que corresponde a la densidad de flujo B_m en el imán.

Si el área del entrehierro es la misma que la del imán, es decir $A_g = A_m$, se tiene que la densidad de flujo en el entrehierro es igual a la densidad de flujo en el imán ($B_g = B_m$). Por tanto, partiendo de la ecuación (2.56) se tiene que

$$B_g = B_m = \frac{\mu_0 \ell_m}{\ell_g} H_m \quad \text{o} \quad B_g^2 = \mu_0 \frac{\ell_m A_m}{\ell_g A_g} H_m B_m$$

o

$$B_g H_g V_g = B_m H_m V_m \tag{2.57}$$

donde V_g y V_m son los volúmenes del entrehierro y del imán, respectivamente. La ecuación anterior destaca que *la energía disponible en el entrehierro es máxima cuando el punto de operación corresponde al máximo producto de energía del imán.*

Ejemplo 2.14

Las dimensiones físicas del circuito magnético de la figura 2.30 son las siguientes: $\ell_g = 1$ cm, $A_g = A_s = A_m = 10$ cm^2, $\ell_s = 50$ cm y $\mu_r = 500$ para el acero. ¿Cuál es la mínima longitud del imán requerido para mantener la energía máxima en el entrehierro?

• Solución

Al sustituir los valores dados en la ecuación (2.55) se obtiene

$$H_m = -\frac{9549.3}{\ell_m} B_m \qquad (2.58)$$

Para mantener la máxima energía en el entrehierro, el punto de operación debe corresponder al máximo producto de energía del imán. A partir de las curvas de desmagnetización y del producto de energía, que se ilustran en la figura 2.31, se obtiene $B_m = 0.23$ T y $H_m = -144$ kA/m. Sustituyendo estos valores en la ecuación 2.58, la mínima longitud del imán es 1.53 cm.

■

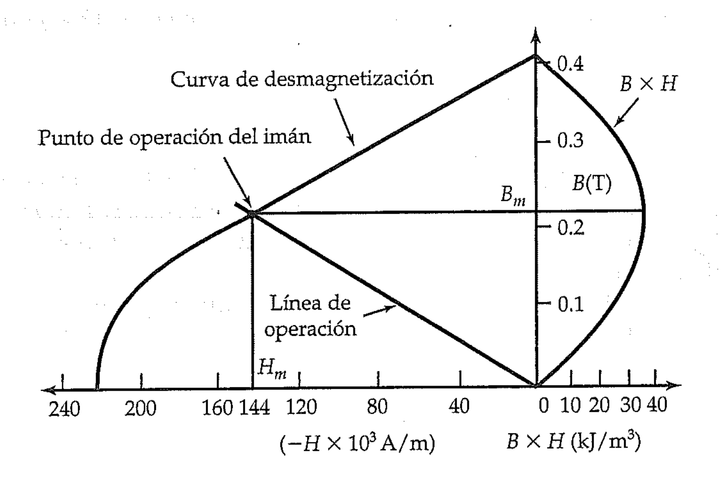


Figura 2.31. Curvas de desmagnetización y de producto de energía de un imán para el ejemplo 2.14.

Ejemplo 2.15

Calcule la fem inducida en una bobina de 10 vueltas que gira a 100 rad/s en un sistema de imán permanente con una longitud axial de 50 mm, como se muestra en la figura 2.32*a*. El rotor y el yugo están hechos de una aleación cuya permeabilidad relativa es de 3 000. La curva de desmagnetización del imán se ilustra en la figura 2.32*b*.

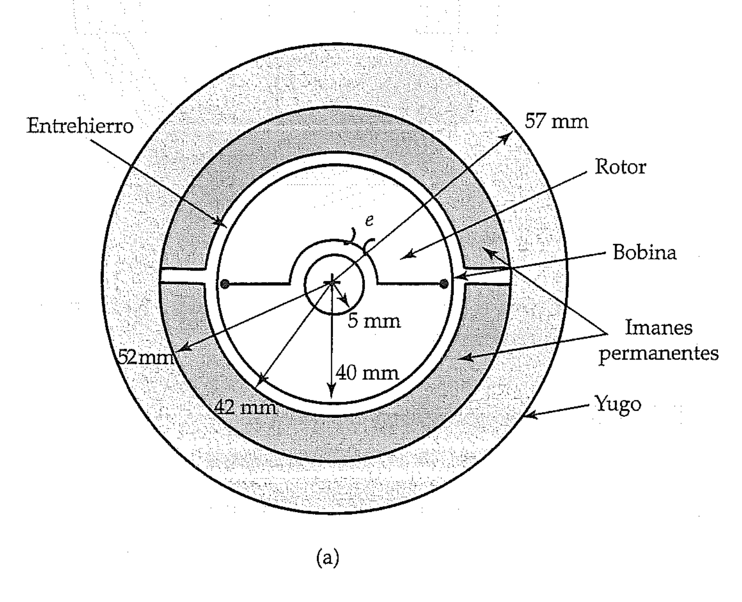
● Solución

En la figura 2.32*c* se aprecia que hay dos trayectorias magnéticas para el flujo. Por simetría, el flujo en cada una de las partes debe ser la mitad del flujo total; es decir, si Φ es el flujo por trayectoria, el flujo total que suministra cada imán es 2Φ. Atendiendo a una trayectoria magnética se tiene que

$$\Phi = B_m A_m = B_s A_s = B_g A_g = B_a A_a \tag{2.59}$$

donde los subíndices m, s, g y a se utilizan para identificar las secciones del imán, yugo, entrehierro y rotor de la trayectoria magnética cerrada. Làs longitudes medias de las secciones magnéticas son:

Imán:	$\ell_m = 52 - 42 = 10$ mm
Yugo:	$\ell_s = 2.5 + 2.5 + (2\pi \times 54.5/4) = 90.61$ mm
Entrehierro:	$\ell_g = 42 - 40 = 2$ mm
Rotor:	$\ell_a = 17.5 + 17.5 + (2\pi \times 22.5/4) = 70.34$ mm



(a)

Figura 2.32. (a) Circuito magnético para el ejemplo 2.15.

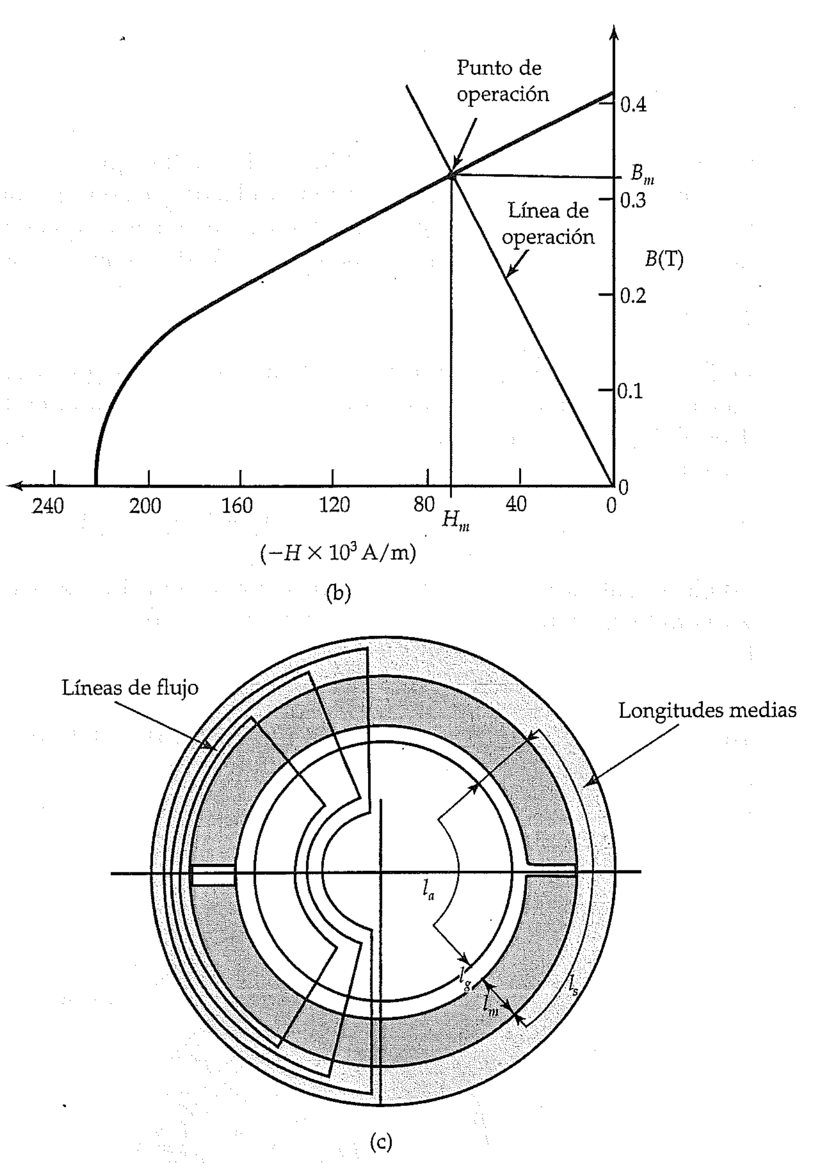


Figura 2.32. (b) Curva de desmagnetización del imán. **(c)** Distribución del flujo y longitudes medias de las trayectorias magnéticas.

Las áreas de sección transversal son:

Imán: $A_m = 50 \times (52 + 42)\pi/4 = 3691.37\ \text{mm}^2$

Yugo: $A_s = 5 \times 50 = 250\ \text{mm}^2$

Entrehierro: $A_g = 50 \times (42 + 40)\pi/4 = 3220.13\ \text{mm}^2$

Rotor: $A_a = 35 \times 50 = 1750\ \text{mm}^2$

La aplicación de la ley de Ampère produce

$$H_m\ell_m + H_g\ell_g + H_a\ell_a + H_g\ell_g + H_m\ell_m + H_s\ell_s = 0$$

o

$$2H_m\ell_m = -[H_s\ell_s + H_a\ell_a + 2H_g\ell_g]$$

La ecuación anterior puede expresarse en términos de B_m aplicando la ecuación (2.59), como

$$2H_m\ell_m = -\left[\frac{\ell_s A_m}{\mu_s A_s} + \frac{\ell_a A_m}{\mu_a A_a} + 2\frac{\ell_g A_m}{\mu_0 A_g}\right] B_m$$

Al sustituir los valores se obtiene la línea de operación, que es

$$H_m = -202\,158.28\, B_m$$

La intersección de la línea de operación con la curva de desmagnetización del imán muestra que $B_m = 0.337$ T.

Por tanto, el flujo por trayectoria que establece cada imán es

$$\Phi = B_m A_m = 0.337 \times 3691.37 \times 10^{-6} = 1.244 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Luego, el flujo total suministrado por cada imán es

$$\Phi_t = 2\Phi = 2.488 \text{ mWb}$$

Puesto que la bobina gira con velocidad angular uniforme de 100 rad/s, el flujo que enlaza a la bobina es máximo (Φ_t) cuando el plano de la bobina es perpendicular al flujo magnético. Por otro lado, el flujo que enlaza a la bobina es cero cuando el plano de ésta es paralelo al campo magnético. Por consiguiente, es posible escribir una expresión general para el flujo que enlaza la bobina, como sigue:

$$\Phi_C = 2.488 \cos 100t \text{ mWb}$$

A partir de la ley de inducción de Faraday, la fem inducida en la bobina de 10 vueltas es

$$e = -N\frac{d\Phi_C}{dt} = 2.488 \text{ sen } 100t \text{ V}$$

■

Ejercicios

2.21. Grafique la curva del producto de energía para el imán de tierras raras cuya curva de desmagnetización se ilustra en la figura 2.28.

2.22. Repita el ejemplo 2.15 pero reemplace los imanes por imanes de tierras raras.

2.23. Un imán de tierras raras se moldea en forma de toroide con un diámetro medio de 20 cm y área de sección transversal de 2 cm^2. ¿Cuál debe ser la longitud del entrehierro para obtener una densidad de flujo igual a 0.8 T?

2.24. ¿Cuál debe ser la fem inducida en la bobina del ejercicio 2.22 si se ignoran las caídas de la fmm en el rotor y el yugo? Calcule el porcentaje de error en la fem inducida como resultado de esta aproximación.

Resumen

En este capítulo repasamos los fundamentos del electromagnetismo. Se establecieron las cuatro ecuaciones de Maxwell, que son, en realidad, generalizaciones de leyes que se basan en prueba experimental. Se introdujeron los conceptos de fem de movimiento y fem de transformación. Se estableció que la fem total inducida en una espira que cambia su posición como función del tiempo cuando se sumerge en un campo magnético variable en el tiempo es igual a la suma de la fem de movimiento y la fem de transformación. La fem inducida también puede determinarse mediante la ley de inducción de Faraday.

Cuando la corriente está confinada a fluir en un conductor y la frecuencia que interesa es baja, la densidad de corriente de conducción es muchas magnitudes mayor que la densidad de corriente por desplazamiento. Por tanto, al aplicar la ley de los circuitos de Ampère eliminamos la corriente de desplazamiento de nuestras consideraciones.

Utilizamos la ecuación de fuerza de Lorentz para determinar la fuerza que experimenta un conductor que porta una corriente. Cuando la corriente fluye a través de una espira ubicada en un campo magnético, se produce un par que tiende a girarla para hacer que el plano de la espira quede perpendicular al campo magnético.

Destacamos las diferencias entre los materiales diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. Desde un ángulo práctico, los materiales diamagnéticos y paramagnéticos pueden tratarse como no magnéticos porque sus permeabilidades difieren muy poco de la del vacío. En el estudio de máquinas eléctricas son los materiales ferromagnéticos los que más interesan. Prácticamente todos los materiales ferromagnéticos tienen propiedades no lineales. Cuando se sujetan a campos magnéticos variables en el tiempo, los materiales ferromagnéticos contribuyen a las pérdidas magnéticas: la debida a corrientes parásitas y la debida a histéresis. La pérdida por corrientes parásitas puede reducirse con núcleos magnéticos laminados, mientras que la pérdida por histéresis depende de la composición química del material magnético. La pérdida por histéresis es más reducida para los materiales magnéticos suaves que para los duros. Por tal razón, se utilizan materiales suaves para los transformadores, máquinas de inducción y máquinas síncronas. Por otro lado, los materiales magnéticos duros constituyen buenos imanes permanentes y se utilizan como estatores para las máquinas de cc.

Explicamos detalladamente cómo analizar circuitos magnéticos porque el circuito magnético es el corazón de toda máquina eléctrica. Cada circuito magnético puede representarse con un circuito de reluctancia equivalente.

Otra función importante de un circuito magnético es habilitar el transporte de energía de una parte a otra sin conexión eléctrica directa alguna. Se mostró cómo representar bobinas por medio de su autoinductancia y de su inductancia mutua cuando comparten un flujo.

Para contar con una referencia accesible, a continuación se resumen algunas de las ecuaciones más importantes que se presentaron en este capítulo:

fem de transformación: $e_t = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$

fem de movimiento: $e_m = \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{d\ell}$

fem total inducida: $e = e_t + e_m = -\frac{d\Phi}{dt}$

Ley de Ampère: $\oint_c \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = I$

Par en una espira: $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$

Autoinductancia: $L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$ donde $\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu A}$

Inductancia mutua: $M = k\sqrt{L_1 L_2}$

Ley de Ohm para un circuito magnético: $\mathcal{F} = \Phi\mathfrak{R}$ donde $\mathcal{F} = NI$

Leyes de Kirchhoff para un circuito magnético:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}_i \ell_i = \mathcal{F}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i = 0$$

Inductancia de dos bobinas acopladas

Serie aditiva: $L = L_1 + L_2 + 2M$

Serie sustractiva: $L = L_1 + L_2 - 2M$

Paralelo aditivo: $L = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$

Paralelo sustractivo: $L = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$

Preguntas de repaso

2.1. Enuncie las ecuaciones de Maxwell. Haga una breve exposición de cada una de ellas y mencione la ley en la que se basa.

2.2. Demuestre que la corriente de conducción en un conductor es muy grande comparada con la corriente de desplazamiento. Utilice cobre como conductor y 60 Hz como la frecuencia del suministro.

2.3. ¿A qué frecuencia la magnitud de la densidad de la corriente de conducción en el cobre es igual a la de la corriente de desplazamiento?

2.4. ¿Describe por completo la ecuación de Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ la ley de la inducción de Faraday? Si no es así, ¿por qué? Si la respuesta es afirmativa, explique por qué.

2.5. ¿Cuál es el significado de la ecuación de transformación?

2.6. ¿Cuál es el significado de la fem de movimiento?

2.7. ¿Pueden la fem de movimiento y la de transformación tener lugar en una espira al mismo tiempo? Si fuera así, ¿cuáles deben ser las condiciones? Si no lo fuera, explique por qué.

2.8. Un conductor muy largo y hueco conduce una corriente a lo largo de su eje. ¿Cuál es la intensidad de campo magnético dentro del conductor?

2.9. Un conductor muy largo y hueco transporta una corriente en dirección de su circunferencia. ¿Cuál es el campo magnético dentro de él?

2.10. Una bobina de 10 vueltas se encuentra en el plano xy. El campo $\vec{B}$ está en la dirección z y se incrementa a una tasa de 10 T/hr. Si el área de la espira es de 20 cm^2, ¿cuál es la fem inducida en la bobina? ¿Cuál es el flujo que enlaza la espira?

2.11. El plano de una bobina de 10 vueltas forma un ángulo de 60° con el campo magnético. Si la densidad del flujo magnético es 1.2 T, ¿cuál es el par que actúa sobre la espira? Suponga que el área de la espira es de 10 cm^2.

2.12. Una sola espira de alambre que se encuentra en el plano del papel conduce una corriente en dirección del movimiento de las manecillas del reloj. ¿Qué efecto se observa si se coloca una brújula dentro de la espira? ¿Tiene esta espira propiedades comunes con las de un imán con forma de barra?

2.13. ¿Cuáles son las pérdidas magnéticas? ¿Cómo pueden reducirse las pérdidas por corrientes parásitas? ¿Cómo pueden reducirse las pérdidas por histéresis?

2.14. ¿Por qué es importante hacer el coeficiente de acoplamiento entre dos bobinas cualesquiera tan cercano a la unidad como sea posible?

2.15. Si el flujo en una máquina no varía en el tiempo, ¿debe laminarse el núcleo de la máquina?
2.16. Explique el ferromagnetismo con sus propias palabras.
2.17. ¿Por qué el alnico es mejor material que la cerámica como imán permanente? ¿Cuál tiene mayor retentividad?
2.18. ¿Por qué ha de tenerse en cuenta el flujo de dispersión en los cálculos magnéticos, en tanto que la dispersión de corriente puede despreciarse en casi todos los problemas eléctricos?
2.19. ¿Qué pasa a la reluctancia de un circuito magnético cuando se introduce un entrehierro? ¿Cómo afecta un entrehierro a la inductancia de un circuito magnético?
2.20. ¿Por qué no siempre es posible usar el método de la reluctancia para encontrar el flujo establecido por cierta fmm en un circuito magnético?
2.21. Exprese la condición en la que la fmm es numéricamente igual a la corriente que la produce.
2.22. ¿Es posible tener un flujo de 0.5 Wb en un circuito magnético sin tener una densidad de flujo de 0.5 T?
2.23. ¿Se requiere energía para mantener un campo magnético estable después de que se ha producido?
2.24. Cuando una corriente estable a través de una bobina puede producir cierto campo magnético, ¿por qué se necesitan imanes permanentes?
2.25. ¿Por qué se necesitan materiales ferromagnéticos en el diseño de máquinas cuando el flujo puede establecerse en el vacío?
2.26. Considere dos circuitos magnéticos idénticos. Uno está hecho de un material ferromagnético con permeabilidad relativa de 1000 y el otro utiliza un material no magnético. Para la misma fem aplicada, calcule la razón de *a)* las reluctancias, *b)* las inductancias, *c)* las intensidades del campo magnético, *d)* las densidades de flujo magnético, y *e)* las densidades de energía.
2.27. ¿Qué es un dipolo magnético? ¿Cómo se explica la permeabilidad de los materiales magnéticos en términos de los momentos del dipolo magnético?
2.28. Explique los términos *retentividad* y *coercitividad*. ¿La alta retentividad implica alta coercitividad y viceversa?
2.29. Una vez que se alcanza la saturación magnética, ¿es posible incrementar aún más la densidad de flujo aumentando la fmm aplicada? Explique por qué.
2.30. ¿Por qué los materiales magnéticos duros tienden a retener una densidad de flujo residual elevada?
2.31. ¿Se le ocurre alguna aplicación útil de la histéresis?
2.32. Si dos conductores paralelos conducen corrientes en la misma dirección, ¿experimentan una fuerza de atracción o de repulsión?
2.33. Enuncie la ley de la inducción de Faraday. ¿Cuál es el significado del signo negativo?
2.34. ¿Es verdad que la fem inducida en una bobina es máxima cuando el flujo que la enlaza es máximo? Explique por qué sí o por qué no.
2.35. Un conductor se mueve con velocidad uniforme en un campo magnético constante. ¿Qué se concluye si la fem inducida en el conductor es igual a cero?
2.36. Un inductor disponible comercialmente se proyecta para 115 V y 0.3 A. Si se desprecia la resistencia de la bobina, ¿cuál es su inductancia? ¿Qué pasa si el inductor se conecta a través de un suministro de 115 V de cc?

Problemas

2.1. Una espira rectangular que conduce una corriente I_2 se sitúa cerca de un conductor recto que porta otra corriente I_1, como se muestra en la figura P2.1. Obtenga una expresión para la fuerza magnética que experimenta la espira.

2.2. Un cilindro de radio a y longitud L devanado cercana y apretadamente con N vueltas de alambre muy fino constituye un solenoide (inductor). Si el alambre conduce una corriente constante I, encuentre la densidad del flujo magnético en cualquier punto sobre el eje del solenoide. ¿Cuál es la densidad del flujo magnético en el centro del cilindro? También obtenga expresiones para la densidad del flujo magnético en sus extremos.

2.3. Una espira conductora rectangular tiene un lado deslizante que se mueve a la derecha, como se muestra en la figura P2.3. Se ubica la espira en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, que es normal a su plano. Calcule *a*) la fem de movimiento, *b*) la fem de transformación, y *c*) la fem total inducida.

2.4. Resuelva el problema 2.3 con la ley de la inducción de Faraday. ¿Cuál debe ser la fuerza externa que se aplique al lado deslizante para mantenerlo en movimiento con velocidad uniforme?

2.5. Si la magnitud del campo $\vec{B}$, del problema 2.3 varía como $B_0 \cos \omega t$, ¿cuál es el voltaje total inducido en la espira rectangular?

2.6. Se construye un generador de cc por medio del desplazamiento de carro de metal con ruedas metálicas alrededor de un conjunto de rieles conductores perfectos que forman un gran círculo. Los rieles están separados L m y hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ normal al plano, como se muestra en la figura P2.6. El carro tiene masa m y es impulsado por un motor cohete que proporciona un empuje constante F_0. Se conecta una resistencia R como carga. Obtenga la expresión para la corriente como función del tiempo. ¿Cuál es el valor de la corriente después de que el generador alcanza la condición de estado estable?

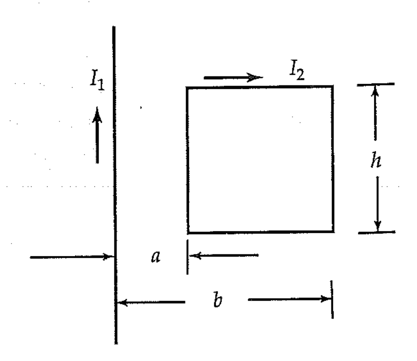


Figura P2.1. Un conductor y una espira.

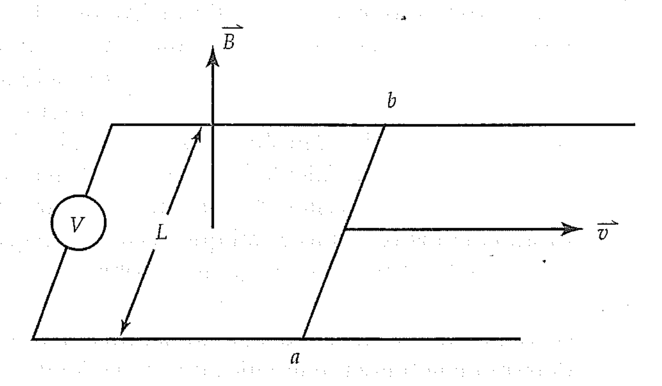


Figura P2.3. Fuerza electromotriz inducida en una espira con un lado deslizante.

2.7. Un alambre conductor de longitud L tiene como eje de giro uno de sus extremos, y gira en el plano xy con velocidad angular ω. Si un campo constante $\mathbf{B}$ está dirigido en la dirección z, determine la fem inducida entre los dos extremos del alambre. ¿Cuál extremo del alambre es positivo con respecto al otro?

2.8. Una bobina circular de 200 vueltas tiene un área media de 10 cm^2 y su plano forma un ángulo de 30° con la densidad del flujo magnético uniforme de 1.2 T. Calcule el par que actúa sobre la bobina si conduce una corriente de 50 A.

2.9. Una bobina de 10 vueltas y 10 × 20 cm se coloca en un campo magnético de 0.8 T. La bobina conduce una corriente de 15 A y está libre para girar alrededor de su eje mayor. Grafique el par que experimenta contra el ángulo de desplazamiento de la bobina, para una rotación completa.

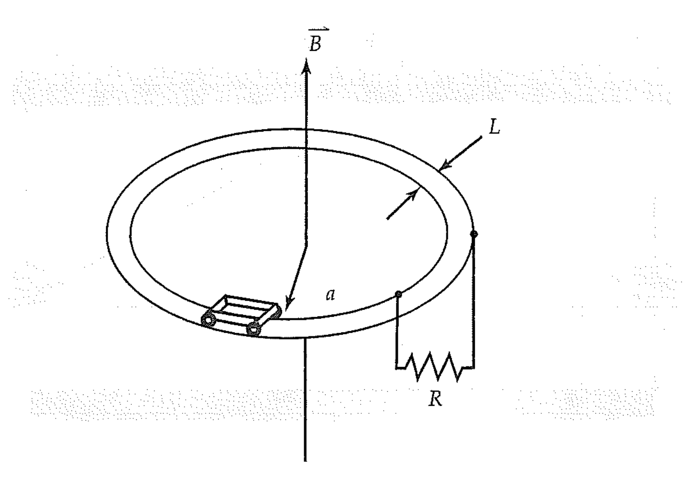


Figura P2.6. Generador de corriente continua.

2.10. Un instrumento medidor del tipo D'Arsonval se diseña para tener una bobina de 25 vueltas montada en un campo magnético de 0.2 T. La bobina es de 4 cm de largo y 2.5 cm de ancho. El par de reposicionamiento del medidor lo proporciona un resorte y es proporcional al ángulo de deflexión θ. La constante del resorte es de 50 μNm/deg. La escala cubre 50° del arco y está dividida en 100 partes iguales. Calcule la corriente a través de la bobina *a*) por grado de deflexión, *b*) por división de la escala, y *c*) para la deflexión a plena escala. El diseño del instrumento es tal que el campo magnético siempre está en dirección radial con respecto al eje de la bobina.

2.11. Un conductor lineal con sus extremos en (–3, –4, 0) m y (5, 12, 0) m conduce una corriente de 250 A. Si la densidad del flujo magnético en el vacío es de 0.2 a_zT, determine la fuerza magnética que actúa sobre el conductor.

2.12. Una barra metálica de 1.2 m de longitud y 500 g de masa se encuentra suspendida por medio de un par de cables flexibles en un campo magnético de 0.9 T, como se muestra en la figura P2.12. Determine la corriente necesaria para eliminar la tensión en los cables que la sostienen.

2.13. Una bobina toroidal de 400 vueltas, uniformemente distribuida, está devanada sobre un anillo de hierro de sección transversal cuadrada y conduce una corriente de 200 A. El radio interior es de 10 cm y el radio exterior es de 12 cm. La permeabilidad relativa del anillo de fierro es de 1500. Determine *a*) el flujo en el anillo, *b*) la reluctancia del anillo, y *c*) la inductancia equivalente del toroide.

2.14. Se desea establecer una densidad de flujo en el entrehierro igual a 1.0 T en el circuito magnético que se muestra en la figura 2.14. Si $A_g = A_m = 40$ cm^2, $\ell_g = 0.5$ mm, $\ell_m = 1.2$ m, $N = 100$ vueltas y $\mu = 2\,500$, determine la corriente en la bobina aplicando *a*) el concepto de reluctancia y *b*) las ecuaciones de campo.

2.15. En la figura P2.15 se muestra un circuito magnético hecho de un material magnético cuya curva de magnetización se ilustra en la figura 2.19. ¿Cuál debe

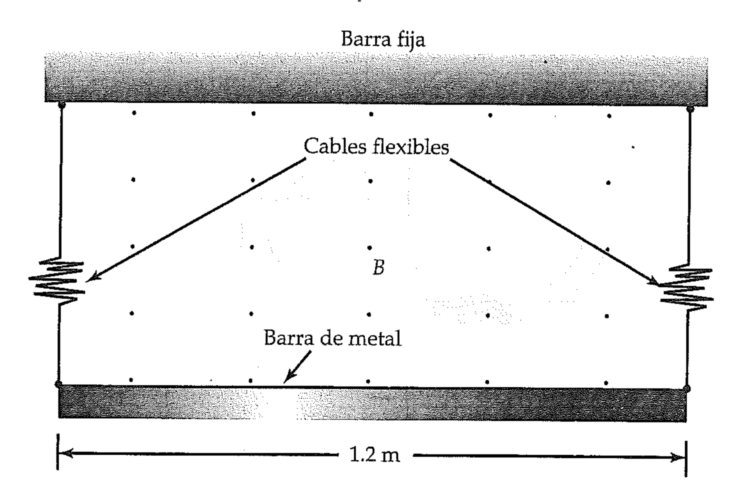


Figura P2.12. Barra de metal suspendida con cables flexibles.

ser la corriente en la bobina de 1600 vueltas para establecer una densidad de flujo de 0.8 T en el entrehierro? Especifique todos los supuestos. ¿Cuál es la reluctancia de cada sección magnética? Calcule la reluctancia y la inductancia totales del circuito magnético. Todas las dimensiones están en centímetros.

2.16. En la figura P2.16 se ilustra un circuito magnético. ¿Cuál debe ser la corriente en la bobina de 1600 vueltas para establecer una densidad de flujo de 0.1 T en el entrehierro? ¿Cuál es la inductancia del circuito magnético? ¿Cuál es la energía almacenada en él? Todas las dimensiones están en centímetros. Suponga que la densidad del flujo magnético varía cuando $B = [1.5H/(750 + H)]$.

2.17. El circuito magnético mostrado en la figura P2.17 está formado con acero al silicio, para el que la relación *B-H* es $B = 2(1 - e^{-H/500})$. Cada una de las ramas exteriores tiene 500 vueltas. Se requiere establecer un flujo de 3.6 mWb en el entrehierro aplicando corrientes iguales en ambos devanados. ¿Cuál es la corriente en cada devanado?

2.18. En la figura P2.18 se muestra la sección transversal de una máquina bipolar de cc con las dimensiones pertinentes en milímetros. Analice el circuito magnético y determine la fmm que se requiere por polo para establecer un flujo de 5.46 mWb en el entrehierro. La curva *B-H* para el material magnético se muestra en la figura 2.19. La longitud activa (longitud del conjunto de laminaciones) de la máquina es de 150 mm. Con el circuito de reluctancia equivalente, verifique los requerimientos de fmm para cada polo.

2.19. En la figura P2.19 se muestra un circuito magnético de una máquina tetrapolar de cc, con una longitud activa de 56 mm. Determine la fmm por polo necesaria para establecer una densidad de flujo de 1.0 T en el entrehierro. Suponga que el arco efectivo del entrehierro es el mismo que el ancho del polo. Use la relación *B-H* como $B = 2.5(1 - e^{-H/1000})$. Aplicando el método del circuito de reluctancia equivalente, verifique los requerimientos de fmm por polo.

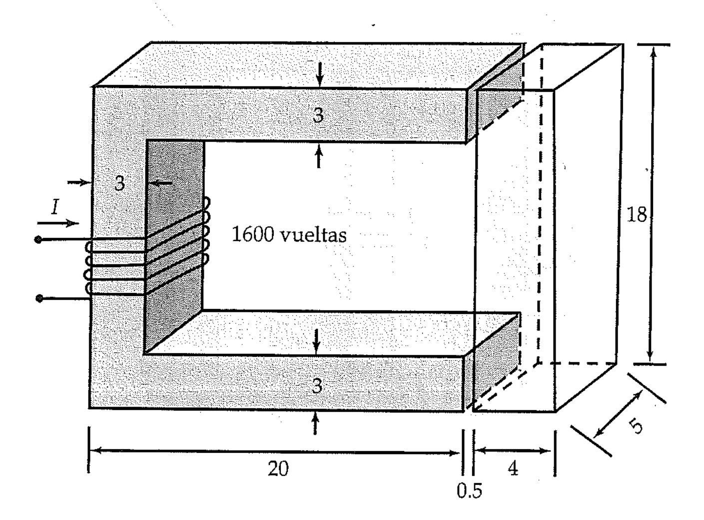


Figura P2.15. Circuito magnético para el problema 2.15.

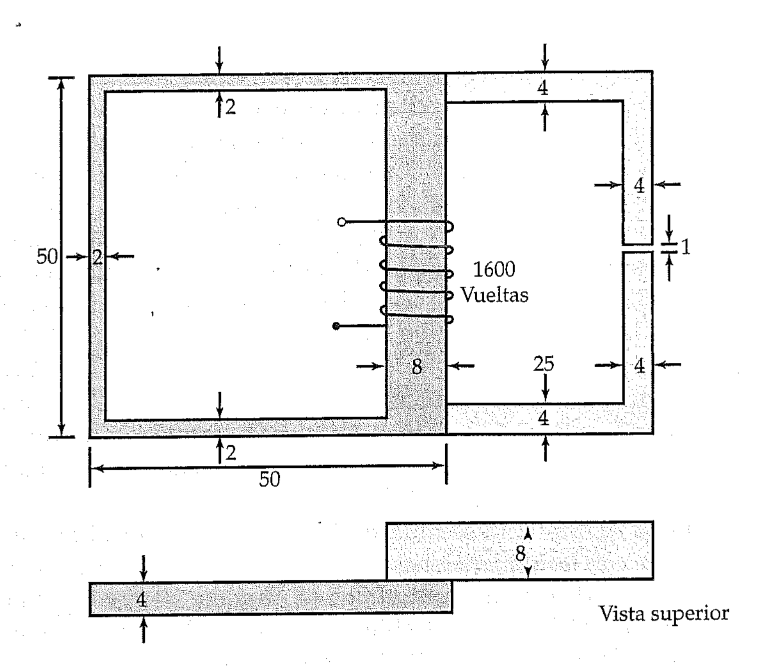


Figura P2.16. Circuito magnético para el problema 2.16.

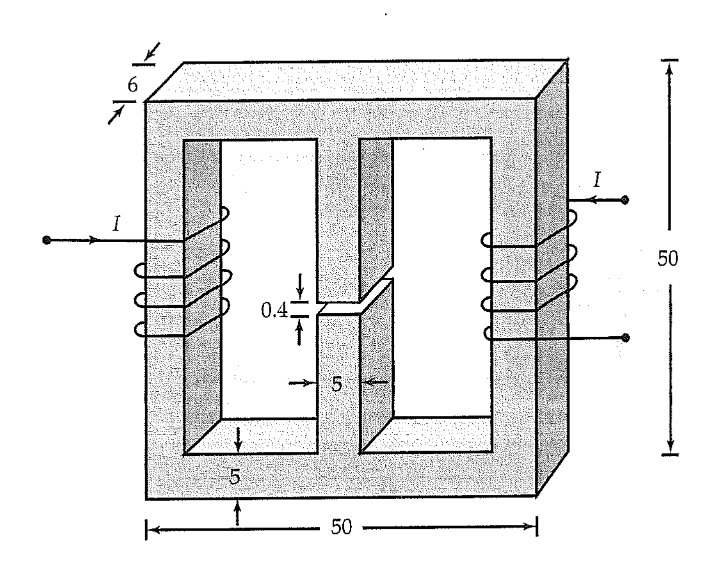


Figura P2.17. Circuito magnético para el problema 2.17.

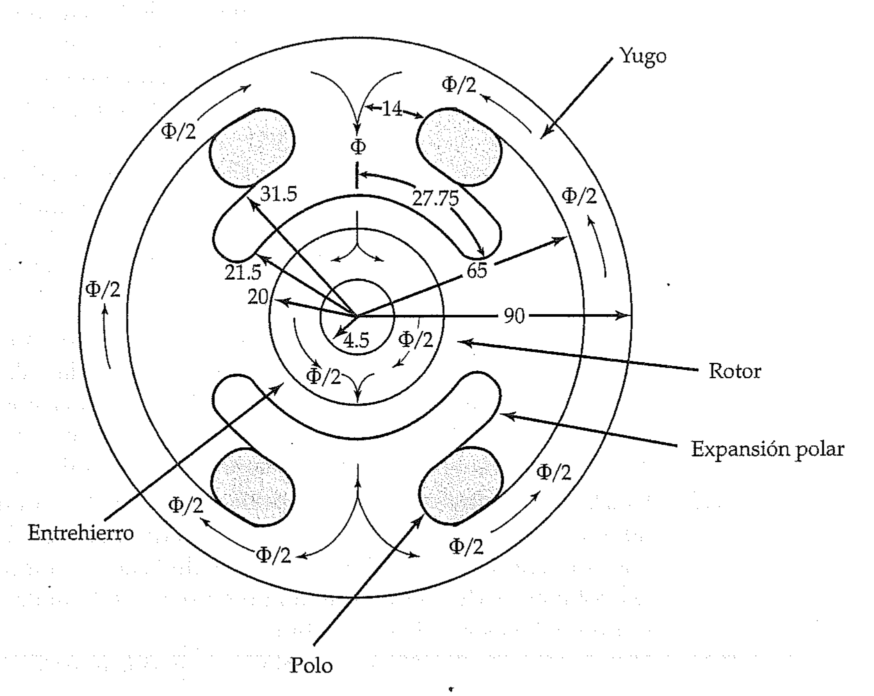


Figura P2.18. Circuito magnético de un motor bipolar para el problema 2.18.

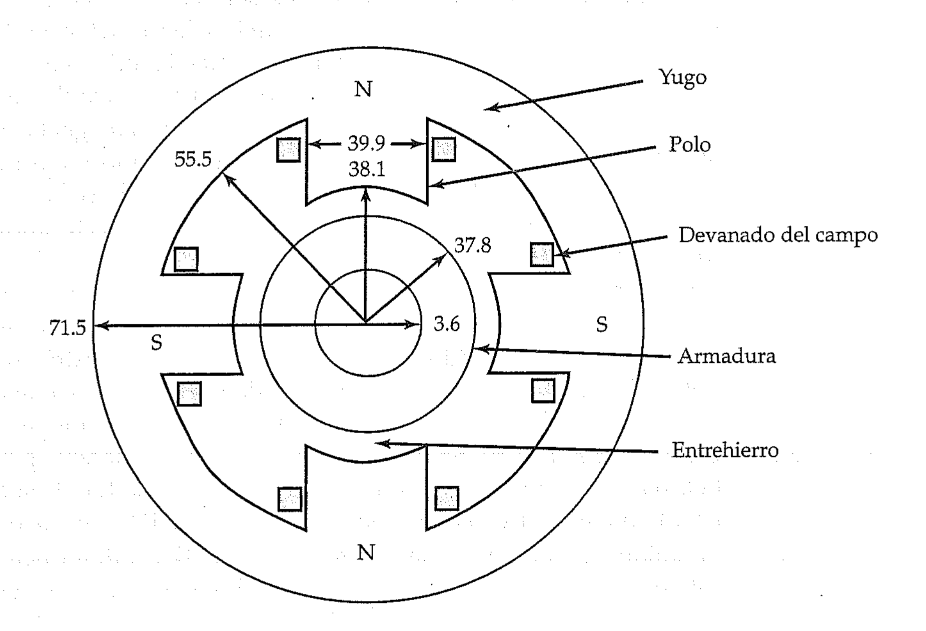


Figura P2.19. Circuito magnético de un motor tetrapolar para el problema 2.19.

2.20. Un anillo de fierro con diámetro medio de 50 cm tiene sección transversal cuadrada de 4 cm^2. Está devanado con dos bobinas que tienen 1000 y 400 vueltas. Calcule *a*) la autoinductancia de cada bobina y *b*) la inductancia mutua entre ellas. Suponga que $\mu_r = 500$. Enuncie todos los supuestos.

2.21. Dos bobinas que tienen 100 y 500 vueltas están devanadas espaciadamente sobre un material magnético cuya sección transversal es de 40 cm^2 y longitud media de 120 cm. Sólo 60% del flujo que produce una bobina enlaza a la otra. Si la corriente cambia linealmente de 0 a 100 A en 10 ms en la bobina de 100 vueltas, determine la fem inducida en la bobina de 500 vueltas. ¿Cuál es la inductancia mutua entre ellas? Suponga que $\mu_r = 600$.

2.22. Las bobinas A y B están devanadas sobre un núcleo no magnético. Se induce una fem de 5 V en la bobina A cuando el flujo que la enlaza cambia a la tasa de 10 mWb/s. Una corriente de 5 A en la bobina *B* ocasiona un flujo de 2 mWb para enlazar a la bobina A. Calcule la inductancia mutua entre ellas. [*Nota*: para el caso de un circuito lineal magnético, $M = N_1\Phi_{12}/I_2 = N_2\Phi_{21}/I_1$.]

2.23. Dos bobinas están devanadas apretadamente sobre un núcleo magnético que tiene una longitud media de 80 cm y un diámetro de 2.4 cm. La permeabilidad relativa del material magnético es de 1000. Si la inductancia mutua entre las bobinas es de 25 mH y una bobina tiene 200 vueltas, determine el número de vueltas sobre la otra bobina.

2.24. Una bobina de 3 mH está acoplada magnéticamente con otra de 12 mH. El coeficiente de acoplamiento es 0.5. Calcule la inductancia efectiva cuando las bobinas están conectadas *a*) en serie aditiva, *b*) en serie sustractiva, *c*) en paralelo aditivo, y *d*) en paralelo sustractivo.

2.25. Las inductancias efectivas cuando dos bobinas se conectan en serie aditiva y en serie sustractiva son 220 mH y 40 mH. Si la inductancia de una bobina es 2.25 veces la inductancia de la otra, determine la inductancia de cada bobina, la inductancia mutua entre ellas y el coeficiente de acoplamiento.

2.26. Una bobina con 90 mH de inductancia está acoplada magnéticamente a otra con 40 mH de inductancia. La inductancia efectiva cuando se conectan en paralelo aditivo las dos bobinas es de 39.375 mH. Cuando se conectan en paralelo sustractivo, la inductancia efectiva es de 7.159 mH. Determine la inductancia mutua entre ellas.

2.27. Encuentre las corrientes en las ramas y la potencia que suministra cada fuente para el circuito acoplado magnéticamente que se muestra en la figura P2.27.

2.28. Para el circuito acoplado magnéticamente que se muestra en la figura P2.28, determine *a*) la corriente a través de cada bobina, *b*) la caída de voltaje a través de cada bobina, y *c*) la potencia que suministra la fuente.

2.29. Determine *a*) la corriente en cada rama, *b*) la caída de voltaje a través de cada bobina, y *c*) la potencia promedio que suministra la fuente si el coeficiente de acoplamiento entre las dos bobinas de la figura P2.29 es de 0.8.

2.30. La bobina 1, que tiene una resistencia de 0.2 Ω y autoinductancia de 20 mH, está estrechamente acoplada ($k = 1$) a la bobina 2. La resistencia y la autoinductancia de la bobina 2 son 0.8 Ω y 80 mH, respectivamente. La bobina 2 está conectada a una carga inductiva de 30 Ω en serie con inductancia de 20 mH.

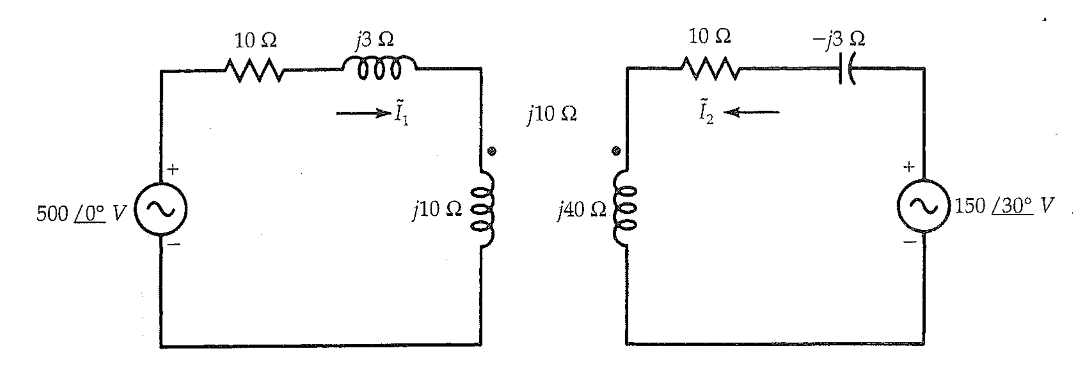


Figura P2.27. Circuito para el problema 2.27.

Si el valor medio cuadrático del voltaje aplicado a la bobina 1 es de 480 V y su frecuencia es de 2000 rad/s, ¿cuál es la salida de potencia (que suministra a la carga)? ¿Cuál es la entrada de potencia? Encuentre la eficiencia, que es la razón entre la potencia de salida y la potencia de entrada.

2.31. En el circuito que se describe en la figura P2.31, en $t = 0$ el interruptor está cerrado. Calcule la caída de voltaje a través de cada bobina como una función del tiempo. ¿Cuál es el valor de estado estable de cada caída de voltaje? Determine la energía almacenada en el sistema magnético 1.5 ms después de que el interruptor se cerró.

2.32. En el circuito mostrado en la figura P2.32, en $t = 0$ el interruptor se encuentra cerrado. Calcule la corriente en el circuito como función del tiempo. ¿Cuál es la corriente de estado estable en el circuito? Trace la energía instantánea en las bobinas acopladas como función del tiempo.

2.33. La pérdida por corrientes parásitas en una máquina es de 150 W a una frecuencia de 60 Hz y densidad de flujo de 1.2 T. *a*) ¿Cuál es la pérdida por corrientes parásitas cuando la frecuencia se incrementa a 400 Hz y la densidad de flujo

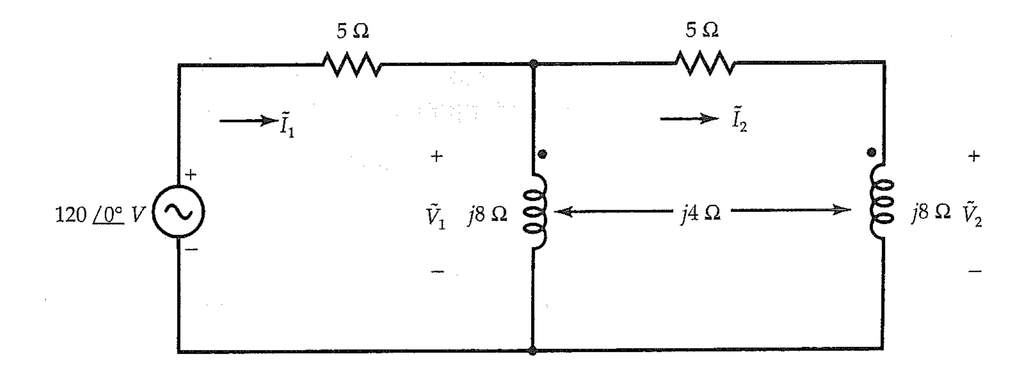


Figura P2.28. Circuito para el problema 2.28.

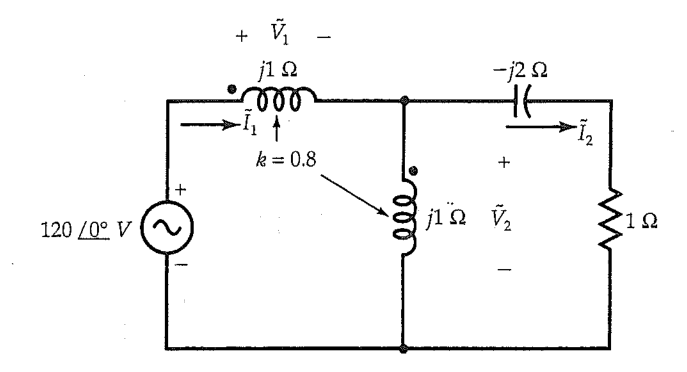


Figura P2.29. Circuito para el problema 2.29.

permanece sin cambio? *b*) ¿Cuál es la pérdida a una frecuencia de 60 Hz cuando la densidad de flujo se reduce en 25%? *c*) ¿Cuál es la pérdida cuando la densidad de flujo se reduce en 25% y la frecuencia se incrementa a 400 Hz?

2.34. La pérdida por histéresis en una máquina es de 100 W a una frecuencia de 50 Hz y densidad de flujo de 0.8 T. El coeficiente de Steinmetz es de 1.5. *a*) ¿Cuál es la pérdida si la frecuencia se incrementa a 400 Hz pero la densidad de flujo permanece sin cambio? *b*) ¿Cuál es la pérdida si la frecuencia permanece sin cambio pero la densidad de flujo se incrementa en 25%? *c*) ¿Cuál es la pérdida si la frecuencia se incrementa a 400 Hz y la densidad de flujo se incrementa en 25%?

2.35. Con objeto de determinar la pérdida por histéresis en un material magnético, se tomaron datos específicos durante un ciclo de histéresis completo y se graficaron de acuerdo con las escalas siguientes: *H*: 1 cm = 50 A • t/m, y *B*: 1 cm = 0.2 T. El área del ciclo de histéresis es de 6.25 cm^2. Si la frecuencia de prueba es de 60 Hz y el volumen del material magnético es de 450 cm^3, encuentre la pérdida por histéresis. Si la densidad del material magnético es 7.8 × 10^3 kg/m^3, calcule la pérdida por histéresis en W/kg.

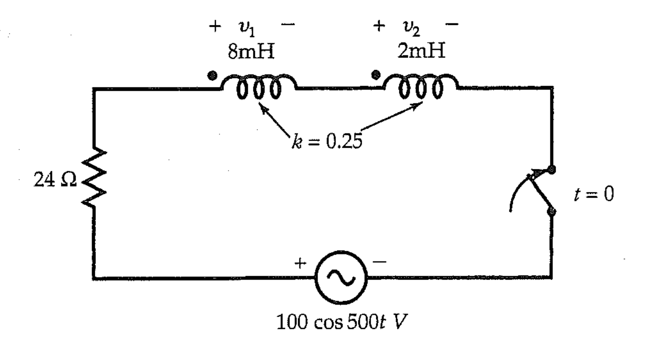


Figura P2.31. Circuito para el problema 2.31.

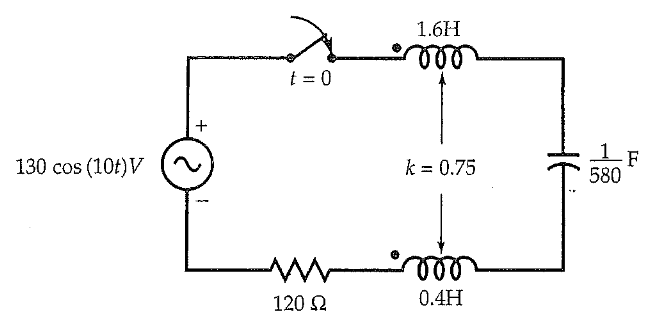


Figura P2.32. Circuito para el problema 2.32.

2.36. Se grafica un ciclo de histéresis de acuerdo con las escalas de 1 cm = 100 A • t/m, y 1 cm = 0.1 T. El área del ciclo es de 20 cm^2. Calcule la pérdida por histéresis para el espécimen, en joules por metro cúbico por ciclo.

2.37. Se tomaron los datos siguientes de una lámina de acero delgada.

Frecuencia (Hz)	*Densidad de flujo* (T)	*Pérdida magnética* (W/kg)
50	1.0	3.60
50	1.2	4.98
60	1.0	4.80

Calcule las pérdidas por corrientes parásitas y por histéresis en el espécimen en *a*) 50 Hz, 1 T, *b*) 50 Hz, 1.2 T, *c*) 60 Hz, 1 T, y *d*) 60 Hz, 1.2 T.

2.38. Se tomaron los siguientes datos puntuales de una lámina de acero delgada.

Frecuencia (Hz)	*Densidad de flujo* (T)	*Pérdida magnética* (W/kg)
60	1.0	1.92
60	1.5	4.22

Calcule las pérdidas por corrientes parásitas y por histéresis en el espécimen con ambas densidades de flujo. El coeficiente de Steinmetz es de 1.75.

2.39. En la figura P2.39 se muestra un circuito magnético que usa dos imanes de tierras raras, con sus dimensiones en centímetros. El espesor es de 5 cm. Encuentre la densidad de flujo y el flujo total en el entrehierro si la permeabilidad del material magnético es infinita.

2.40. Repita el problema 2.39 si la permeabilidad relativa del material magnético y del rotor es de 500.

2.41. En la figura P2.41 se ilustra un circuito magnético que usa imanes de tierras raras. El arco del imán subtiende un ángulo de 120°, como se muestra. La longitud axial es de 150 mm. ¿Cuál debe ser la longitud de cada imán de modo que opere a su máximo nivel de producto de energía? Suponga que no existe

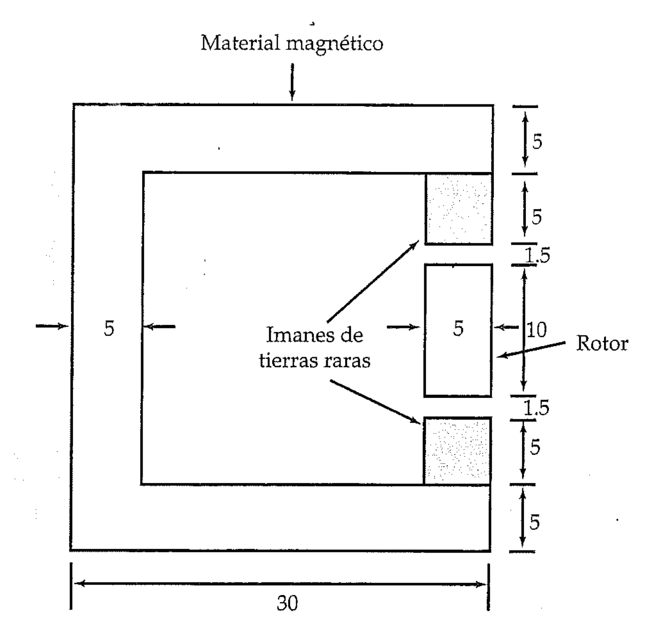


Figura P2.39. Circuito magnético para el problema 2.39.

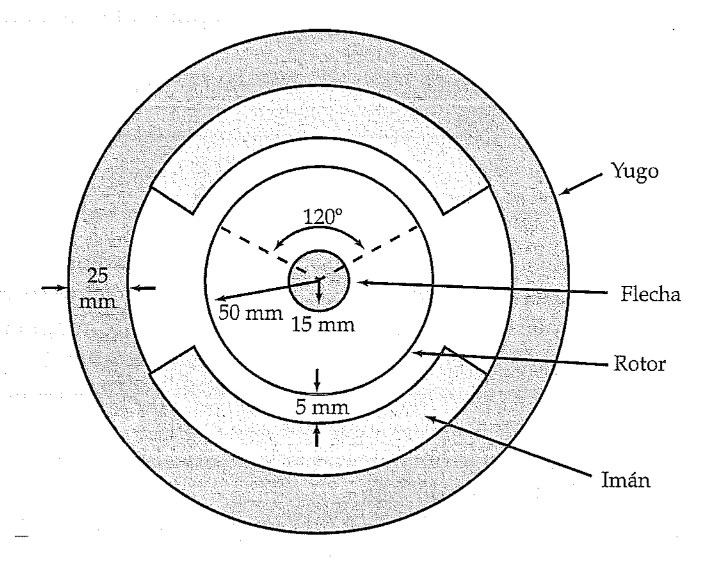


Figura P2.41. Circuito magnético para el problema 2.41.

caída de fmm en el rotor y en el yugo. ¿Cuál es la fem inducida en una bobina de 100 vueltas si gira con una velocidad angular de 120 rad/s? ¿Cuál es la frecuencia del voltaje inducido?

2.42. Si la permeabilidad relativa del material magnético que se utiliza para el rotor y para el yugo del problema 2.41 es de 500 y la longitud del imán es la misma que la que se calculó en el problema 2.41, ¿cuál es la densidad de flujo en el entrehierro? También calcule la fem inducida en la bobina de 100 vueltas que gira a 120 rad/s.

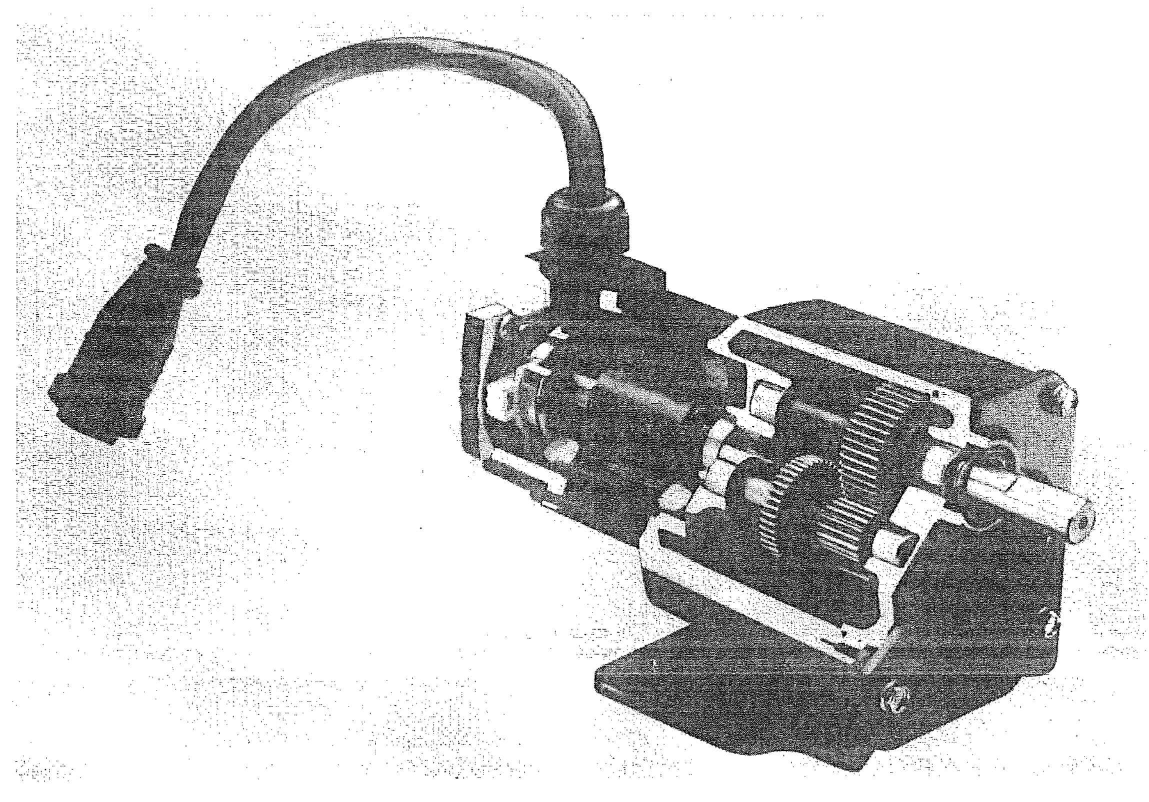
2.43. Un circuito magnético que utiliza un imán de cerámica está construido en forma de toroide. El radio medio del toroide es de 10 cm, y el área de su sección transversal es de 3 cm^2. Tiene un entrehierro de 3 cm. Encuentre la densidad de flujo y el flujo en el entrehierro.

2.44. Un circuito magnético que utiliza un imán permanente está construido en forma de toroide. El radio medio del toroide es de 8 cm y el área de la sección transversal es de 2 cm^2. La retentividad es de 1.6 T y la coercitividad es de –80 kA/m. La curva de desmagnetización es básicamente una línea recta. ¿Cuál debe ser la longitud del entrehierro de modo que el imán opere a su máximo nivel de energía? ¿Cuáles son la densidad de flujo y el flujo en el entrehierro?

2.45. Si el entrehierro del problema 2.44 se aumenta a 4.65 cm, ¿cuál debe ser la densidad de flujo y el flujo en el entrehierro?

3

Principios de la conversión de energía electromecánica



Vista seccionada de un motor de engranes sin escobillas. (*Cortesía de Bodine Electric Company.*)

3.1. Introducción

Es sabido que existen muchos tipos de energía y que a diario utilizamos numerosos dispositivos que la convierten de un tipo en otro. Sin embargo, cuando hablamos de la conversión de la energía electromecánica nos referimos a la conversión de energía eléctrica en mecánica, o viceversa. Por ejemplo, un motor eléctrico convierte energía eléctrica en energía mecánica, y un generador eléctrico transforma energía mecánica en energía eléctrica. El objetivo de este capítulo es explorar los principios básicos de la conversión de energía electromecánica.

La conversión de energía electromecánica es un proceso reversible excepto por las pérdidas en el sistema. El término *reversible* implica que la energía puede transferirse una y otra vez entre los sistemas eléctrico y mecánico. No obstante, siempre que se lleva a cabo un proceso de conversión de energía, parte de ella se convierte en calor y el sistema la pierde irremediablemente.

Cuando se coloca un conductor que porta corriente en un campo magnético experimenta una fuerza que tiende a moverlo. Si el conductor está libre para moverse en la dirección de la fuerza magnética, el campo magnético ayuda en la conversión de energía eléctrica en mecánica. En esencia, tal es el principio de operación de todos los motores eléctricos. Por otro lado, si una fuerza que se aplica externamente hace que el conductor se mueva en dirección opuesta a la fuerza magnética, la energía mecánica se convierte en energía eléctrica. El funcionamiento de un generador se basa en este principio. En ambos casos, el campo magnético actúa como un medio para la conversión de energía.

El proceso de transferencia de energía también tiene lugar cuando se usa el campo eléctrico como medio. Considere las dos placas con cargas de signo opuesto de un condensador, separadas por un medio dieléctrico: entre ambas hay una fuerza de atracción que tiende a mover una hacia otra. Si se permite a una de las placas moverse en dirección de la fuerza, se convierte energía eléctrica en mecánica. A la vez, si se aplica una fuerza externa a una de las placas y se intenta aumentar la separación entre ellas, se convierte energía mecánica en energía eléctrica. Los transductores electrostáticos, como los de un micrófono o un voltímetro electrostáticos, utilizan campos electrostáticos para la conversión de energía.

La conversión de energía de una forma en otra satisface el principio de conservación de la energía; por tanto, la energía de entrada W_i es igual a la suma de la energía útil de salida W_o, la pérdida d e energía en forma de calor W_ℓ y el cambio en la energía almacenada en el campo W_f. Es decir,

$$W_i = W_o + W_\ell + W_f \tag{3.1}$$

En la figura 3.1 se muestra el diagrama del flujo de energía. La energía de salida y la pérdida de energía se consideran cantidades positivas. El cambio en la energía almacenada, por otro lado, puede ser positivo o negativo, según se incremente o disminuya ésta. En la ecuación anterior, si W_i representa la energía eléctrica de entrada, entonces W_o puede ser el equivalente eléctrico de la energía mecánica de salida.

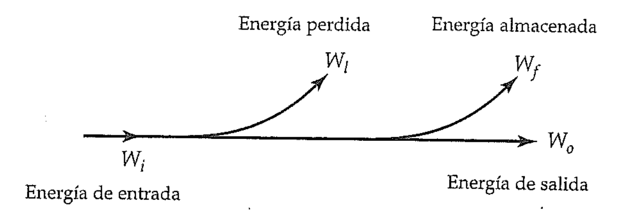


Figura 3.1. Diagrama de flujo de energía.

Se dice que el sistema es *conservador*, o *sin pérdida*, si la pérdida de energía en él es de cero. En ese caso la ecuación 3.1 se transforma en

$$W_i = W_o + W_f \tag{3.2}$$

Observe que no hay una restricción que diga que la energía que entra tenga que ser eléctrica o mecánica. En algunas máquinas eléctricas, como en una máquina síncrona, la energía de entrada es tanto mecánica como eléctrica. La salida de una máquina generalmente es mecánica o eléctrica. Si la energía de salida de un sistema es cero, entonces la energía de entrada debe *a*) incrementar la energía almacenada en el sistema, *b*) ser disipada como calor por el sistema, o *c*) las dos acciones anteriores.

3.2. El campo eléctrico como medio

En el estudio de los campos electrostáticos pueden obtenerse muchas ecuaciones para calcular la energía electrostática de un sistema cargado. El objetivo de esta sección es mostrar cómo calcular la fuerza en uno de los objetos en un sistema cargado a partir del conocimiento de la energía electrostática en ese sistema.

Para simplificar nuestra explicación, consideremos un condensador de placas paralelas como el que se muestra en la figura 3.2. Si la separación entre las placas se denota con x y A es el área de la sección transversal de cada placa, entonces la intensidad del campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ (V/m) en la región entre las placas es

$$\overrightarrow{E} = -\frac{V}{x}\overrightarrow{a_x} \tag{3.3}$$

donde V es la diferencia de potencial entre las placas y $\overrightarrow{a_x}$ es el vector unitario en la dirección x. Si suponemos que la carga se encuentra distribuida uniformemente sobre cada placa, entonces la carga total en la placa superior es

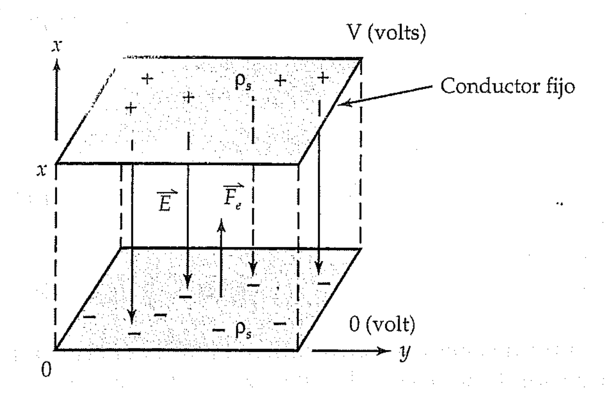


Figura 3.2. Fuerza de atracción entre dos placas paralelas cargadas.

$$Q = DA = \frac{\epsilon A}{x} V \tag{3.4}$$

donde $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ es la densidad del flujo eléctrico (C/m^2).

Entonces, la capacitancia del condensador de placas paralelas es

$$C = \frac{\epsilon A}{x} \tag{3.5}$$

La energía eléctrica almacenada en el condensador es

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 \tag{3.6}$$

De acuerdo con la ley de Coulomb, existe una fuerza de atracción entre las dos placas. Supongamos que la placa superior está fija y la inferior tiene libertad de movimiento. La fuerza de atracción entre ambas tiende a mover la inferior en la dirección x. Si la placa inferior se mueve una distancia dx en el tiempo dt, entonces el cambio en la energía electrostática en el sistema en condiciones sin pérdida es, a partir de la ecuación 3.2,

$$dW_e = dW_i - dW_o \tag{3.7}$$

donde dW_e es el cambio en la energía almacenada en el condensador. El cambio en la energía de entrada es

$$dW_i = VdQ \tag{3.8}$$

porque la entrada de energía eléctrica en el tiempo dt es $VI\,dt$ y $dQ = I\,dt$. La salida de energía mecánica en el tiempo dt es

$$dW_o = F_e\,dx \tag{3.9}$$

donde F_e es la fuerza eléctrica que actúa sobre la placa inferior. Así, es posible reacomodar la ecuación 3.7 y escribirla como

$$F_e\,dx = V\,dQ - dW_e \tag{3.10}$$

En un sistema electrostático, tanto la energía almacenada en el sistema como la carga son funciones del voltaje aplicado y de la separación entre las placas. Por tanto, los cambios diferenciales en la energía almacenada y la carga pueden escribirse como

$$dW_e = \frac{\partial W_e}{\partial x}dx + \frac{\partial W_e}{\partial V}dV \tag{3.11}$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial V}dV \tag{3.12}$$

Al sustituir las ecuaciones (3.11) y (3.12) en la (3.10) y dividir ambos miembros entre dx se obtiene

$$F_e = \left[V\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial W_e}{\partial x}\right] + \left[V\frac{\partial Q}{\partial V} - \frac{\partial W_e}{\partial V}\right]\frac{dV}{dx}$$

Sin embargo, F_e debe ser independiente de los cambios incrementales en dx y dV porque son muy arbitrarios. Es decir, $dV/dx = 0$. En consecuencia, la intensidad del campo eléctrico en la región entre las dos placas es constante. Entonces,

$$F_e = V\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial W_e}{\partial x} \tag{3.13}$$

La anterior es una ecuación general para determinar la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado en un sistema cargado cuando el campo eléctrico en el medio se mantiene constante. Sin embargo, para un condensador de placas paralelas, $Q = CV$ y

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = C\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial C}{\partial x}$$

De la ecuación (3.6)

$$\frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial x} + CV\frac{\partial V}{\partial x}$$

Por tanto, para un condensador de placas paralelas, la ecuación (3.13) se convierte en

$$F_e = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial x} \tag{3.14}$$

Sin embargo, de la ecuación (3.5) se tiene que

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\epsilon A}{x^2}$$

Al sustituir $\partial C/\partial x$ en la ecuación (3.14) se obtiene la fuerza que actúa sobre la placa inferior como

$$F_e = -\frac{1}{2}\epsilon A\left[\frac{V}{x}\right]^2 = -\frac{1}{2\epsilon A}Q^2 \tag{3.15}$$

El signo negativo resalta el hecho de que F_e es una fuerza de atracción. Es posible considerar dos casos especiales, como se muestra en seguida:

Caso 1. Un sistema aislado

En este caso, se tiene un sistema aislado en el que la *carga es constante*. Por tanto, la tasa de cambio de la carga con desplazamiento es cero; es decir, $\partial Q/\partial x = 0$. Luego, con base en la ecuación (3.13) la fuerza eléctrica que actúa sobre un conductor es

$$F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \tag{3.16}$$

cuando la *carga es constante*.

Caso 2. Sistema con potencial fijo

En este caso, todas las cargas libres se encuentran en las superficies de los conductores, y cada conductor se mantiene a un potencial fijo por medio de fuentes externas de energía. En estas circunstancias puede escribirse

$$V\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial QV}{\partial x} = 2\frac{\partial W_e}{\partial x}$$

porque $W_e = \frac{1}{2}QV$ en un sistema de dos conductores.

Ahora la ecuación (3.13) puede expresarse como

$$F_e = \frac{\partial W_e}{\partial x} \tag{3.17}$$

cuando el *potencial se mantiene constante.*

Ejemplo 3.1

En un condensador de placas paralelas, la placa superior se mantiene estacionaria mientras que la inferior tiene libertad de movimiento, como se muestra en la figura 3.3. El área superficial de cada placa mide 20 cm^2 y la separación entre ellas es de 5 mm. Determine la masa de un objeto suspendido de la placa inferior que la mantiene inmóvil cuando la diferencia de potencial entre las dos placas es de 10 kV. ¿Cuál es la energía almacenada en el campo eléctrico?

• Solución

Para mantener la placa inferior inmóvil, la fuerza neta que actúa sobre ella debe ser igual a cero, es decir,

$$mg = F_e$$

donde F_e es la magnitud de la fuerza eléctrica de atracción que experimenta la placa inferior.

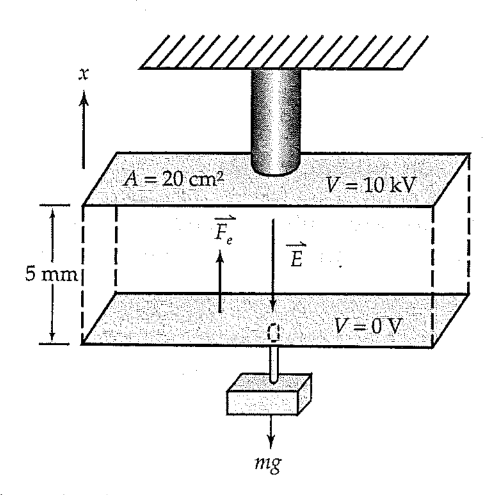


Figura 3.3. Condensador de placas paralelas para el ejemplo 3.1.

Sin embargo, por la ecuación (3.15), F_e es

$$F_e = \frac{1}{2} \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 20 \times 10^{-4} \times \left[\frac{10 \times 10^3}{5 \times 10^{-3}}\right]^2$$

$$= 35.37 \times 10^{-3}\ \text{N} \quad \text{o} \quad 35.37\ \text{mN}$$

Entonces, $$m = \frac{35.37 \times 10^{-3}}{9.81} = 3.61 \times 10^{-3}\text{kg} \quad \text{o} \quad 3.61\ \text{g}$$

La energía en el sistema es

$$W_f = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon A}{2x} V^2 = \frac{10^{-9} \times 20 \times 10^{-4}}{2 \times 36\pi \times 5 \times 10^{-3}} \left[10 \times 10^3\right]^2$$

$$= 177\ \mu\text{J}$$

■

Ejemplo 3.2

La región entre un condensador de placas paralelas está parcialmente llena con una plancha dieléctrica, y el condensador está cargado a un potencial de V volts. El ancho de cada placa es w. Después, la plancha dieléctrica se lleva a la posición descrita en la figura 3.4. Calcule la fuerza que tiende a jalar de la plancha.

• Solución

La energía electrostática almacenada en el condensador de placas paralelas es

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E}\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_o w\, d \left[\frac{V}{d}\right]^2 \left[\epsilon_r x + (b - x)\right]$$

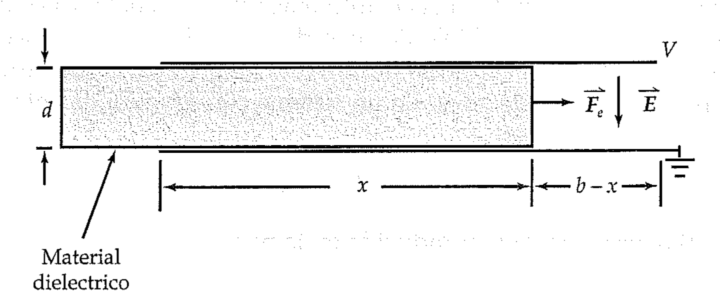


Figura 3.4. Fuerza que actúa sobre una plancha dieléctrica parcialmente extraída en un condensador de placas paralelas.

Puesto que el potencial se mantiene constante es posible usar la ecuación (3.17) para obtener la fuerza que actúa sobre el material dieléctrico, así

$$F_e = \frac{w}{2d}\epsilon_o[\epsilon_r - 1]V^2$$

Observe que la fuerza actúa en la dirección en que se incrementa x.

■

La magnitud de la fuerza desarrollada por un sistema eléctrico generalmente es muy pequeña, aun cuando el voltaje aplicado sea elevado y las dimensiones físicas del sistema sean muy grandes. Cuando el campo magnético se utiliza como medio, un sistema con las mismas dimensiones físicas desarrolla una fuerza muchos órdenes de magnitud más grande que un sistema que use el campo eléctrico como medio, según se explica en la próxima sección.

Ejercicios

3.1. Dos placas paralelas, cada una con dimensiones de 20 × 20 cm, se mantienen en el aire con una separación de 2 mm. Si la diferencia de potencial entre ellas es de 2 kV, calcule *a*) la energía almacenada en el condensador y *b*) la fuerza que actúa sobre cada placa.

3.2. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza del ejemplo 3.2 si $\epsilon_r = 9$, $x = 10$ cm, $b = 20$ cm, $w = 5$ cm, $d = 2$ mm y la diferencia de potencial es de 2 kV? ¿Cuál es la energía en el sistema?

3.3. El campo magnético como medio

Considere un circuito magnético con longitud media ℓ y área de sección transversal A, como se muestra en la figura 3.5. Sea $i(t)$ la corriente a través de una bobina de N vueltas cuando se conecta una fuente de voltaje $v(t)$ a sus terminales. La corriente $i(t)$ establece un flujo $\Phi(t)$ en el circuito magnético, el cual induce una fuerza electromotriz (fem) $e(t)$ en la bobina, de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. Para sostener el flujo en el núcleo del circuito magnético, la fuente que se aplica debe suministrar energía eléctrica. En un sistema conservador, la entrada de energía eléctrica en el tiempo dt es

$$dW_i = vi\,dt = -ei\,dt$$

Sin embargo, la fem inducida en la bobina es

$$e = -\frac{d\lambda}{dt}$$

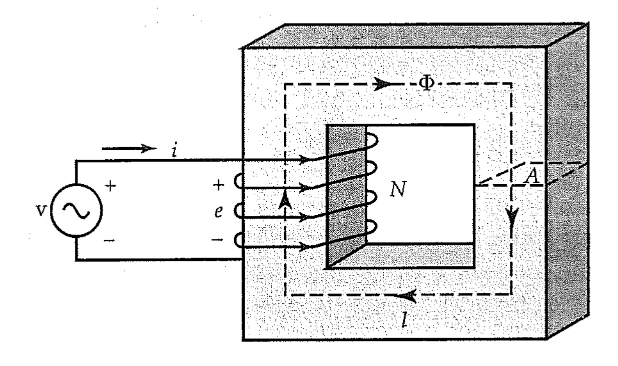


Figura 3.5. Circuito magnético de longitud media l y área A de la sección transversal.

donde $\lambda = N\Phi$ representa los concatenamientos totales de flujo. Por tanto, la energía de entrada en el intervalo de tiempo dt puede escribirse como

$$dW_i = i\,d\lambda = Ni\,d\Phi$$

Por tanto, la entrada de energía para establecer un flujo $\Phi(t)$ en una bobina de N vueltas es

$$W_i = \int i\,d\lambda = N\int i\,d\Phi \tag{3.18}$$

En un sistema conservador sin salida de emergencia, la energía suministrada por la fuente debe almacenarse en el sistema como energía magnética. En un sistema lineal, la energía almacenada en el sistema es

$$W_m = \frac{1}{2}N\Phi i = \frac{1}{2}Li^2 \tag{3.19}$$

donde la inductancia L es

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

Como $Ni = H\ell$ y $d\Phi = A\,dB$, donde H es la intensidad del campo magnético y B es la densidad de flujo magnético, la ecuación (3.18) puede expresarse como

$$W_i = \ell A\int H\,dB \tag{3.20}$$

ecuación con la que se calcula la energía que debe suministrarse para establecer una densidad de flujo B en el núcleo magnético.

Ejemplo 3.3

Si la relación entre los concatenamientos totales de flujo y la corriente en la bobina para el circuito magnético que se muestra en la figura 3.5 está dada por $\lambda = 6i/(2i + 1)$ weber-vueltas (Wb • t), calcule la energía almacenada en el campo magnético para $0 \leq \lambda \leq 2$ Wb • t.

• Solución

De la relación dada entre los concatenamientos totales de flujo y la corriente en la bobina se obtiene

$$i = \frac{\lambda}{6 - 2\lambda}$$

Luego la energía almacenada en el campo magnético es, según la ecuación (3.18),

$$W_m = \int_0^2 \frac{\lambda \, d\lambda}{6 - 2\lambda} = 0.648 \text{ J}$$

■

Obtengamos expresiones para la fuerza magnética en términos de la energía magnética almacenada. Por analogía con la fuerza electrostática, ahora se consideran por separado los casos de flujo constante y corriente constante.

Caso 1. Flujo constante

Sea un circuito magnético que se mueve una distancia dx en un tiempo dt en una región en la que el flujo se mantiene constante. De la ecuación (3.18) se desprende que la energía suministrada por la fuente debe ser cero porque los valores inicial y final del flujo son los mismos. Entonces, para un sistema conservador se tiene que

$$F_m dx + dW_m = 0$$

En consecuencia, la fuerza mecánica que actúa sobre el circuito magnético es

$$F_m = -\frac{dW_m}{dx} \tag{3.21a}$$

cuando el *flujo se mantiene constante*. Esta ecuación demuestra con claridad que la tasa de disminución en la energía magnética almacenada con respecto al desplazamiento determina la fuerza desarrollada por el dispositivo magnético.

Caso 2. Corriente constante

Para un cambio en el flujo $d\Phi$ cuando I se mantiene constante, la entrada de energía es, según la ecuación (3.18),

$$dW_i = I\,d\Phi$$

Puesto que

$$dW_m = \frac{1}{2} I\,d\Phi$$

la entrada de energía puede expresarse como

$$dW_i = 2\,dW_m$$

Luego, para un sistema conservador

$$F_m dx + dW_m = 2\,dW_m$$

Por tanto, la fuerza magnética es

$$F_m = \frac{dW_m}{dx} \qquad (3.21b)$$

cuando la *corriente se mantiene constante*.

Como la energía W_m puede ser una función de la corriente I y el desplazamiento $x[W_m(I, x)]$, o bien una función del flujo Φ y el desplazamiento $x[W_m(\Phi, x)]$, una forma práctica de expresar las ecuaciones 3.21a y 3.21b es por medio de derivadas parciales,

$$F_m = -\frac{\partial W_m(\Phi, x)}{\partial x} \qquad (3.22a)$$

cuando el *flujo se mantiene constante,* y

$$F_m = \frac{\partial W_m(I,\ x)}{\partial x} \tag{3.22b}$$

cuando la *corriente se mantiene constante.*

Expresemos ahora la fuerza magnética en términos de la inductancia del circuito magnético. La tasa de cambio de la energía magnética almacenada cuando el flujo se mantiene constante es, según la ecuación (3.19),

$$\frac{dW_m}{dx} = \frac{1}{2} N\Phi \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}$$

Por ende, la fuerza magnética es, según la ecuación (3.21*a*),

$$F_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \tag{3.23}$$

También es posible demostrar que la ecuación (3.23) es válida cuando la corriente se mantiene constante. Esta ecuación es muy fácil de usar para circuitos magnéticos lineales porque se puede determinar la inductancia del circuito magnético utilizando el concepto de *reluctancia.*

Circuito magnético con entrehierro

En el diseño de máquinas eléctricas, con frecuencia se abre el circuito magnético por la presencia de un entrehierro. Considere el circuito magnético con dos entrehierros que se ilustra en la figura 3.6. La continuidad del flujo en el circuito magnético dicta que debe haber una fuerza de atracción entre los dos miembros del circuito magnético. Como la fuerza magnética tiende a acercar una pieza magnética a la otra, la disminución en la energía de campo en el entrehierro es la causa del desarrollo de la fuerza. Según la ecuación (3.20), la energía en cada entrehierro es

$$W_g = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 Ax = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 Ax$$

donde $B_0 = \mu_0 H_0$ es la densidad de flujo magnético en el entrehierro.

De acuerdo con la ecuación (3.22*a*), la fuerza que se desarrolla en cada entrehierro cuando el flujo Φ ($\Phi = BA$) se mantiene constante es

$$F_g = -\frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 A = -\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 A \tag{3.24}$$

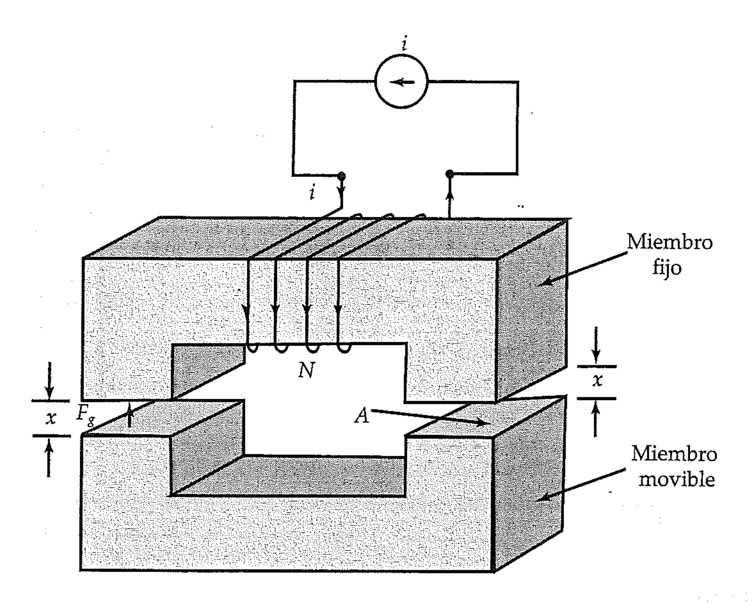


Figura 3.6. Circuito magnético con dos entrehierros.

Esta expresión es muy similar a la que se obtuvo para la conversión de energía mediante el campo eléctrico como medio [ecuación (3.15)]. Una vez más, la presencia del signo negativo en la ecuación anterior indica que F_g es una fuerza de atracción por cada entrehierro que tiende a disminuir a x.

Ejemplo 3.4

Una bobina de 100 vueltas excita el circuito magnético de la figura 3.7 en su rama central. Determine la corriente que se necesita en la bobina para mantener a la parte móvil suspendida a una distancia de 1 cm. ¿Cuál es la energía almacenada en el sistema? La permeabilidad relativa y la densidad del material magnético son de 2000 y 7.85 g/cm^3, respectivamente.

• Solución

Puesto que la permeabilidad del material magnético es constante, puede aplicarse el concepto de reluctancia para determinar la inductancia del circuito magnético cuando la parte móvil se encuentra a una distancia x. En la figura 3.8 se muestra un circuito equivalente en términos de las reluctancias.

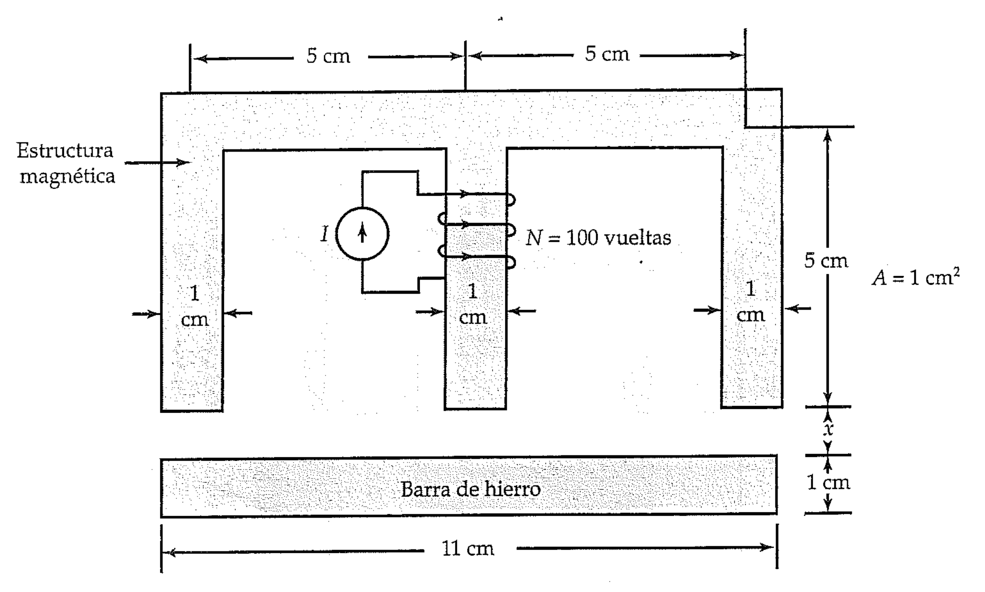


Figura 3.7. Circuito magnético para el ejemplo 3.4.

La longitud media de cada una de las ramas exteriores, incluida una de la parte móvil, es de 15.5 cm. La longitud media de la rama central es de 5.5 cm. Utilizando $\mathcal{R} = \ell/\mu A$, es posible calcular la reluctancia de cada parte como

$$\mathcal{R}_o = 6.167 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_g = 7.958 \times 10^9 x \text{ H}^{-1}$$

y

$$\mathcal{R}_c = 2.188 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

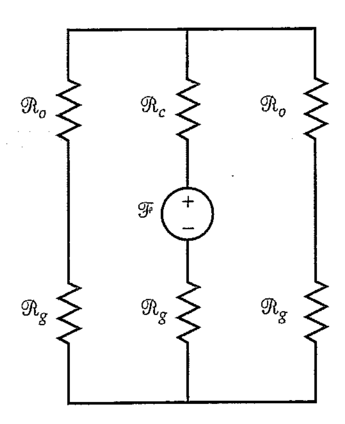


Figura 3.8. Circuito de reluctancia equivalente para el circuito magnético descrito en la figura 3.7.

La fmm aplicada es $\mathcal{F} = 100\,I$, donde I es la corriente que se requiere en la bobina. La reluctancia total vista desde la fuente magnetomotriz es

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g + 0.5\,(\mathcal{R}_o + \mathcal{R}_g) = 5.272 \times 10^5 + 11.937 \times 10^9 x$$

Por tanto, la inductancia es

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{1}{52.72 + 1\,193\,700x}$$

Con base en la ecuación (3.23), la fuerza magnética que actúa sobre la parte móvil es

$$F_m = -\frac{596\,850}{[52.72 + 1\,193\,700x]^2}\,I^2$$

El signo negativo sólo resalta el hecho de que la fuerza actúa hacia arriba. Luego, la magnitud de la fuerza de atracción para $x = 1$ cm es

$$F_m = 4.15 \times 10^{-3} I^2 \text{ N}$$

Por otra parte, la fuerza debida a la gravedad que experimenta la parte móvil que tiene un volumen de 11 cm^3 es

$$F_g = mg = 7.85 \times 10^{-3} \times 11 \times 9.81 = 0.847 \text{ N}$$

Para que la parte móvil permanezca estacionaria, la fuerza de gravedad debe ser igual a la fuerza magnética. Al igualar ambas fuerzas se obtiene

$$I = 14.28 \text{ A}$$

La inductancia del circuito magnético en $x = 1$ cm es 83.4 μH. Luego, la energía almacenada en el campo magnético es

$$W_f = \frac{1}{2} LI^2 = 0.5 \times 83.4 \times 10^{-6} \times 14.28^2 = 8.5 \text{ mJ}$$

■

Ejemplo 3.5

Determine la cantidad mínima de corriente que se precisa para mantener a la placa magnética a una distancia de 1 mm de las caras polares de un electroimán que tiene 1000 vueltas, cuando el par ejercido por el resorte con un radio efectivo de 20 cm es

de 20 N • m, como se muestra en la figura 3.9. Suponga que cada cara polar es un cuadrado de 3 cm por lado y que son despreciables los requerimientos de fuerza magnetomotriz (fmm) para el electroimán y la placa magnética en comparación con el entrehierro.

• Solución

La fuerza que ejerce el resorte sobre la placa magnética es

$$F_s = \frac{20}{0.2} = 100 \text{ N}$$

Para conservar la placa magnética en equilibrio, el electroimán debe ejercer una fuerza de atracción de 100 N sobre la placa magnética. Si la longitud del entrehierro es x, entonces su reluctancia es

$$\mathfrak{R} = \frac{2x}{4\pi \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{-4}} = 1.768 \times 10^9 x \text{ H}^{-1}$$

La inductancia es

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = \frac{1000^2}{1.768x \times 10^9} = \frac{565.49 \times 10^{-6}}{x} \text{H}$$

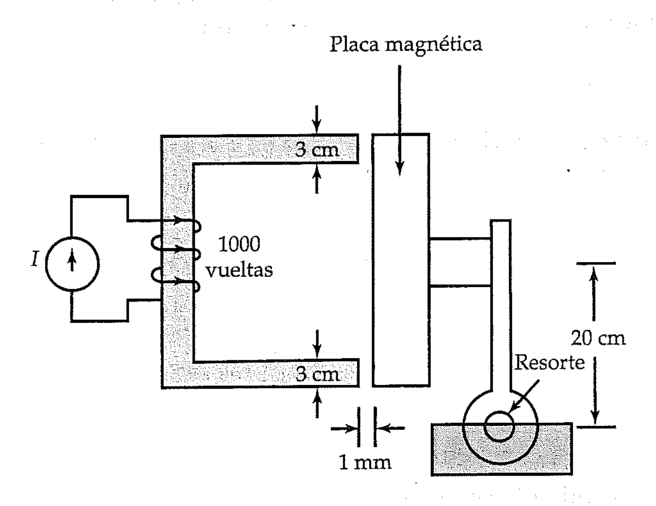


Figura 3.9. Circuito magnético para el ejemplo 3.5.

Por tanto, la fuerza magnética que ejerce el electroimán, según la ecuación 3.23, es

$$F_m = \frac{1}{2}I^2\frac{\partial L}{\partial x} = -282.74 \times 10^{-6}\left[\frac{I}{x}\right]^2$$

Así, la fuerza de atracción a una distancia de x = 1 mm es de 282.74 I^2. Al hacer la fuerza de atracción igual a 100 N se obtiene

$$I = 0.595 \text{ A}$$

■

Ejercicios

3.3. Repita el ejemplo 3.4 empleando el concepto de campo. [*Recomendación*: suponga que B_o es la densidad de flujo en las ramas exteriores; entonces, $2B_o$ es la densidad de flujo en la rama central. Calcule la fuerza que actúa sobre la parte móvil en términos de B_o.]

3.4. En la figura E3.4 se muestra el circuito magnético de un émbolo. Calcule la fuerza que actúa sobre el émbolo cuando la distancia x es de 2 cm y la corrien-

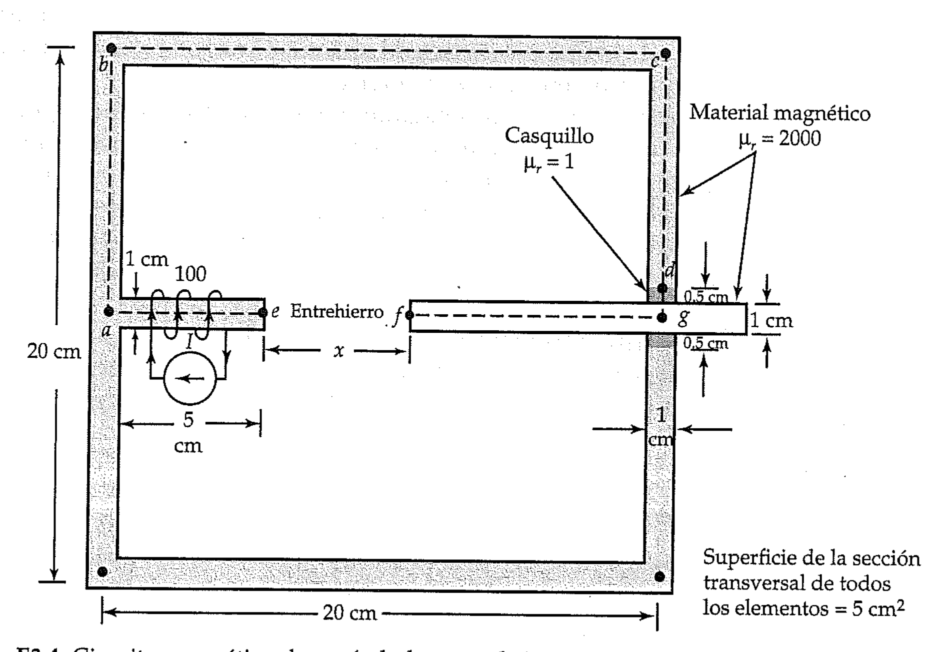


Figura E3.4. Circuito magnético de un émbolo para el ejercicio 3.4.

te en la bobina de 100 vueltas es de 5 A. La permeabilidad relativa del material magnético es 2000. Suponga que el casquillo es no magnético.

3.4. Bobina en un campo magnético uniforme

Como se señaló en el capítulo precedente, cuando una bobina gira en un campo magnético uniforme (constante) se induce una fuerza electromotriz (fem). El causante de la fem inducida es el movimiento relativo entre los conductores y el campo magnético constante. Por tanto, no importa si el campo es estacionario y la bobina gira o viceversa, la bobina está fija y el campo se hace girar. Las máquinas de corriente continua (cc) y las síncronas se basan en este principio.

El diseño de una máquina de cc requiere el establecimiento de un campo magnético estacionario en donde gire la bobina. Por otro lado, en todas las máquinas síncronas las bobinas se mantienen estacionarias y el campo magnético es el que gira. Por ello, una máquina síncrona recibe el nombre de *máquina de dentro hacia fuera.* En los capítulos siguientes se exponen de forma pormenorizada las ventajas y desventajas de cada diseño.

Una máquina rotatoria tiene dos partes esenciales: una estacionaria (estator) y una rotatoria (rotor). El rotor de una máquina de cc se conoce generalmente como *armadura.* El diámetro exterior del rotor es más pequeño que el diámetro interior del estator, de modo que aquél puede girar con libertad dentro de este último. Entonces, una máquina rotatoria es un dispositivo con un entrehierro continuo y uniforme.

Tanto el estator como el rotor están hechos de materiales magnéticos sumamente permeables, de manera que la reluctancia de cada uno es despreciable en comparación con la reluctancia del entrehierro. Por tanto, casi toda la fuerza magnetomotriz (fmm) en el circuito magnético de una máquina rotatoria se consume en establecer el flujo que se requiere en el entrehierro.

El campo magnético constante puede establecerse tanto por un electroimán como por un imán permanente. Un electroimán se construye enrollando una bobina alrededor de un material magnético. Una máquina con electroimanes se llama *máquina devanada.* Se dice que una máquina es de *imán permanente* (o PM, *permanent magnet*) cuando el campo es establecido por imanes permanentes. La ventaja de una máquina devanada es que puede controlarse el flujo en ella controlando la corriente en la bobina. La máquina PM tiene las ventajas de que *a*) su tamaño es más pequeño y *b*) su eficiencia es mayor que la de una máquina devanada con la misma especificación de potencia. En bien de la explicación y sin menoscabo de la generalidad, usaremos imanes permanentes para establecer el campo magnético.

Acción generadora

En la figura 3.10 se muestra la sección transversal de una bobina de una sola vuelta que gira en la dirección de las manecillas del reloj en un campo magnético constante establecido por dos imanes permanentes. Se trata de una máquina bipolar en la que cada imán cubre la mitad de la circunferencia, es decir, el arco máximo posible

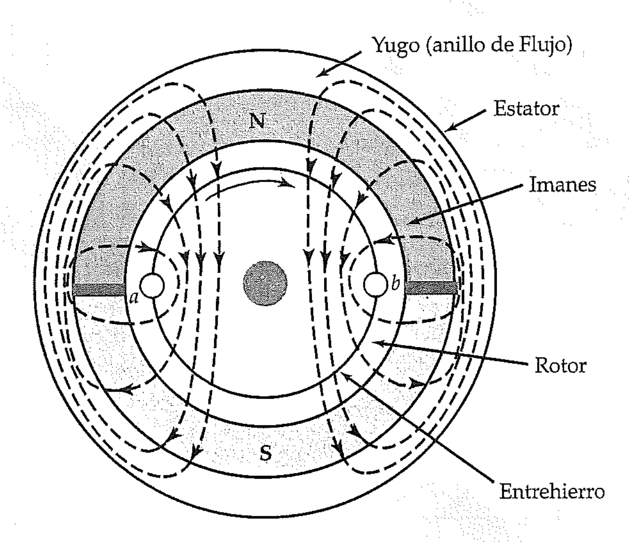


Figura 3.10. Máquina rotatoria bipolar.

que puede subtender un polo en una máquina bipolar es de 180° (mecánicos). Pronto se demostrará que *a*) el ángulo mecánico θ_m en una máquina bipolar también es igual al ángulo eléctrico θ y *b*) el arco máximo que un polo puede subtender siempre es de 180° eléctricos.

Los dos lados de la bobina están colocados diametralmente opuestos (separados 180°). Por tanto, cuando un lado de la bobina apenas entra (sale) de la región bajo el polo norte, el otro hace lo mismo bajo el polo sur. Cuando el arco que subtiende la bobina es igual a 180° eléctricos, se le llama *bobina de paso completo*.

En una máquina "real", el polo no subtiende un ángulo eléctrico de 180° ni la bobina es de paso completo. El ángulo que subtiende el polo generalmente se encuentra entre 120° y 135° eléctricos. Esto es especialmente cierto para las máquinas devanadas. Cuando el paso de la bobina es menor que 180° eléctricos se habla de una bobina de *paso fraccionario*. Aunque no se muestra en la figura 3.10, la periferia del rotor tiene múltiples ranuras. Si en el rotor hubiera, por ejemplo, 10 ranuras por polo, la bobina podría cubrir un máximo de nueve ranuras. En este caso, el paso de la bobina es de 162° eléctricos (180 × 9/10).

Ahora giremos la bobina en la dirección de las manecillas del reloj. Cuando la bobina se halla en la posición descrita en la figura 3.11*a*, el flujo que enlaza la bobina es máximo y su tasa de cambio es cero. Por tanto, en la bobina no hay voltaje inducido.

Conforme la bobina se mueve a la posición que se muestra en la figura 3.11*b*, el flujo que enlaza la bobina se reduce. Este cambio en el flujo induce una fem en la bobina de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. Para determinar la dirección de la fem inducida, visualice una resistencia conectada entre los dos extremos *a* y *b* de la bobina. Debe haber una corriente en la bobina, cuya dirección ha de ser tal que establezca un campo magnético opuesto al cambio en el flujo que pasa a través de la bobina. Debido a que el flujo que enlaza la bobina disminuye, la corriente en la bo-

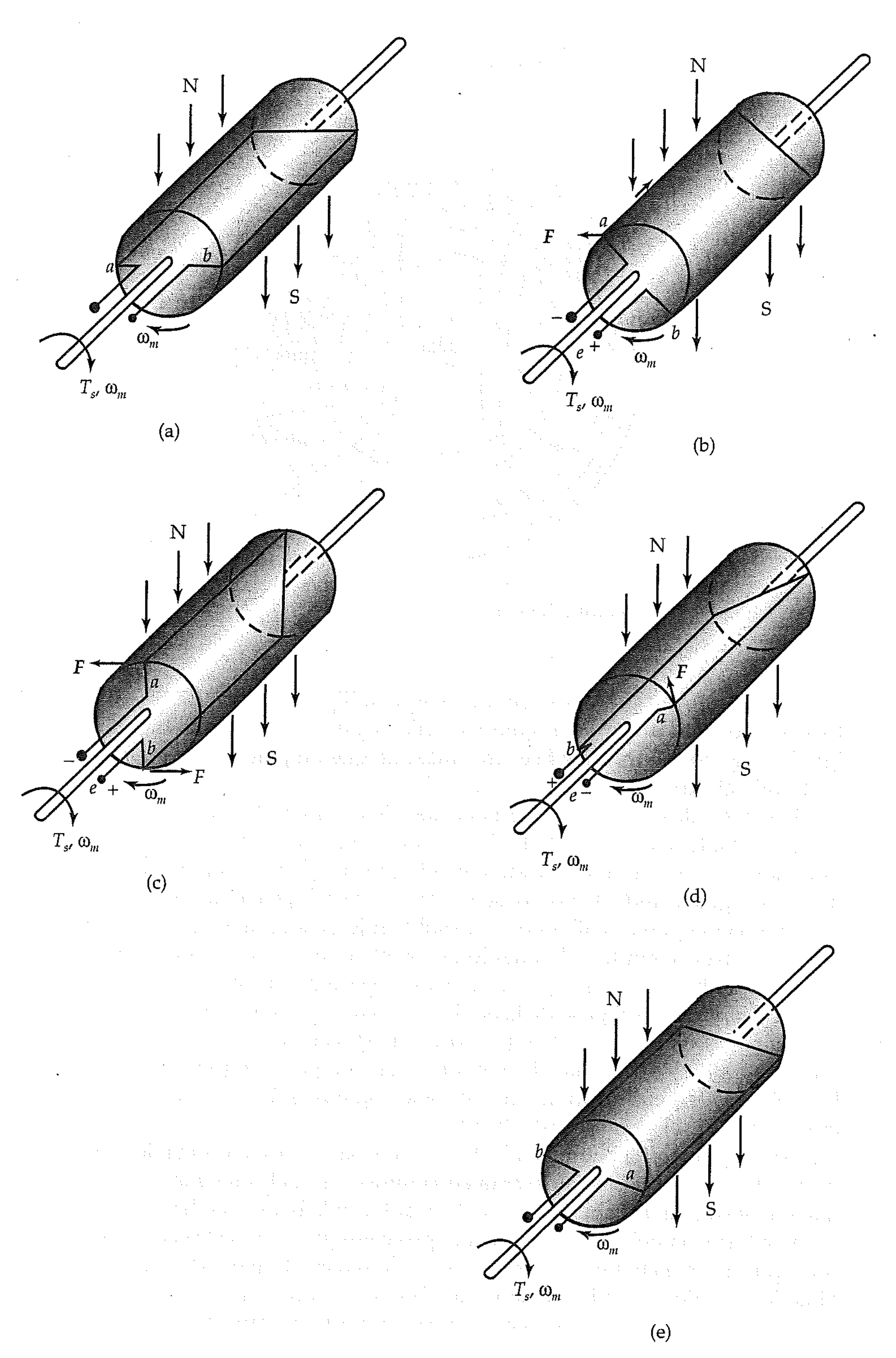


Figura 3.11. Bobina rotatoria de una vuelta en un campo magnético establecido por dos imanes permanentes.

bina debe ir de a a b, como se indica en la figura, a fin de oponerse a la reducción en el flujo que pasa a través de la bobina. Luego, la fem inducida entre los extremos b y a de la bobina es positiva.

Ahora supongamos que la bobina se ha movido a su posición vertical, como se ilustra en la figura 3.11*c*. El ángulo de rotación mecánico de la bobina es de 90°. El flujo que enlaza la bobina es mínimo. Sin embargo, la tasa de cambio del flujo que enlaza la bobina es máximo. Por tanto, la fem inducida y la corriente a través de la resistencia son máximas. Es fácil entender esto si se piensa en la posición de la bobina justo antes de que alcance los 90°.

En la figura 3.11*d* se muestra la bobina en una posición en la que ha girado un ángulo mayor de 90°. Como el flujo que enlaza la bobina está en aumento, la dirección de la corriente en la bobina debida a la fem inducida debe oponerse al cambio. Por tanto, la corriente en la bobina todavía va de a a b, como se indica en la figura. Conforme la bobina se mueve hacia la posición ilustrada en la figura 3.11*e* el flujo que enlaza la bobina está en aumento y su tasa de cambio está disminuyendo. Cuando la bobina alcanza la posición en la figura 3.11*e*, el flujo que enlaza la bobina es máximo y la fem inducida es cero.

A medida que el conductor a de la bobina se ha movido bajo el polo norte, la fem inducida en la bobina ha pasado de cero a su máximo y después ha regresado a cero. Por ende, la bobina giratoria en un campo magnético constante funciona como una fuente de fem variable en el tiempo. En pocas palabras, la máquina en estudio es un *generador de corriente alterna (ca) bipolar*.

El esquema de una máquina con sus dos polos como se ilustra en la figura 3.12*a* se conoce como *diagrama desarrollado*, el cual permite ver lo que ocurre bajo cada polo.

Si Φ_P es el flujo por polo (fig. 3.12*b*), el flujo que enlaza la bobina puede expresarse como una función coseno (fig. 3.12*c*). Es decir,

$$\Phi = \Phi_P \cos\theta$$

donde θ es la posición angular de la bobina en grados eléctricos. Luego la fem inducida en la bobina es

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_P \operatorname{sen}\theta \, \frac{d\theta}{dt}$$

donde $d\theta/dt$ es la frecuencia angular, ω, de la bobina. Por tanto, la ecuación anterior puede volver a escribirse como

$$e = \Phi_P \omega \operatorname{sen} \omega t \tag{3.25}$$

En el generador bipolar que se analiza, cuando el conductor a gira bajo el polo norte en dirección de las manecillas del reloj se genera un medio ciclo positivo de la fem inducida. El otro medio ciclo se produce cuando el conductor b se mueve bajo el

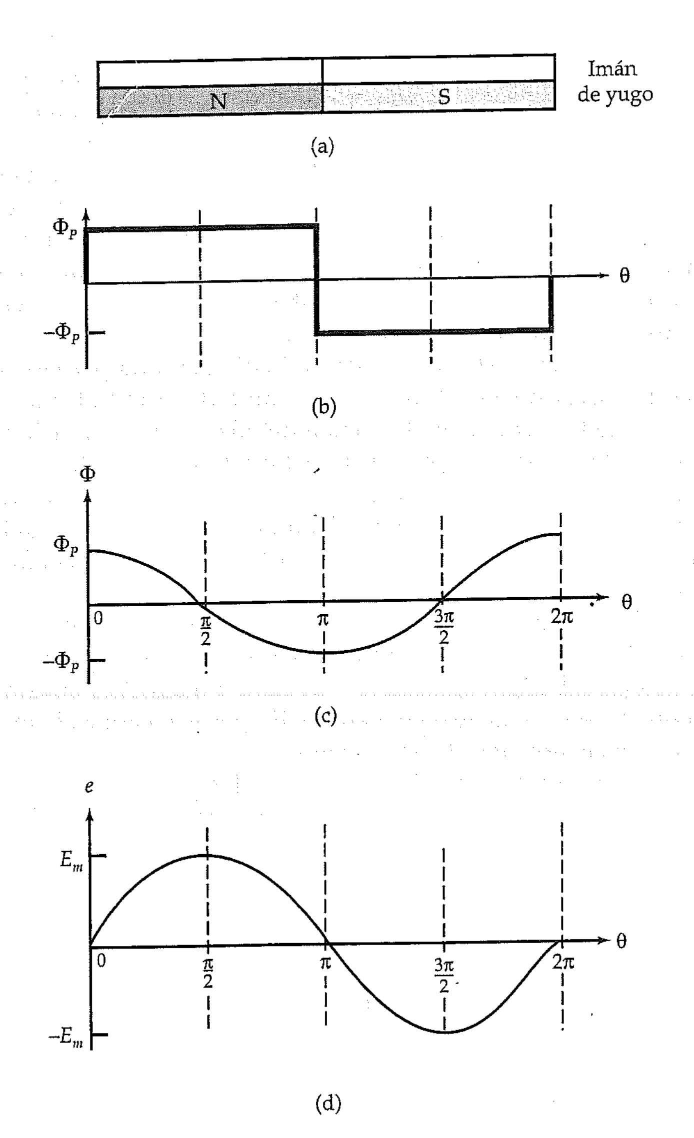


Figura 3.12. (a) Diagrama desarrollado de una máquina bipolar. **(b)** Flujo por polo establecido por los imanes. **(c)** Flujo que pasa a través de una bobina que gira con velocidad constante. **(d)** Fuerza electromotriz inducida en la bobina.

polo norte. En otras palabras, se genera un ciclo (360° eléctricos) de la onda cuando la bobina gira una revolución (360° mecánicos), como se aprecia en la figura 3.12*d*. Si θ_m representa el ángulo mecánico de rotación, entonces $\theta = \theta_m$ en una máquina bipolar.

A fin de tener acceso a las terminales giratorias y poder conectar una resistencia de modo que realmente pueda fluir corriente a través de ella, los extremos giratorios de la bobina se conectan a un par de *anillos rozantes*, como se indica en la figura 3.13. La parte exterior de cada anillo rozante es un conductor al que está conectado uno de los extremos de la bobina. La parte interior del anillo rozante es un aislador que —valga la tautología— aísla su parte externa del eje del rotor. Sobre los anillos rozantes se deslizan escobillas provistas con resortes que permiten establecer las conexiones externas a la carga. Una corriente alterna fluye a través de R conforme se gira la bobina en un campo magnético estacionario.

Cuando la máquina está diseñada específicamente para proveer corriente alterna a la carga (un generador de ca) es posible eliminar los anillos rozantes y las escobillas colocando los imanes en el rotor e instalando la bobina dentro de las ranuras del miembro estacionario. Todos los generadores de ca (*generadores síncronos* o *alternadores*) están diseñados de este modo. Como ahora la fem se induce en el devanado sobre el miembro estacionario, es frecuente referirse al estator de una máquina síncrona como *armadura*.

Si se reemplazan los dos anillos rozantes ilustrados en la figura 3.13 con un *anillo bipartido*, como se muestra en la figura 3.14*a*, el extremo *a* de la bobina queda conectado en forma permanente a una parte del anillo bipartido y el extremo *b* a la otra. Conforme la bobina gira en el campo magnético estacionario, la escobilla superior siempre queda conectada a la parte del anillo bipartido que es negativa. Así, la polaridad de la escobilla superior siempre es negativa. Por otro lado, la escobilla inferior siempre tiene polaridad positiva. En otras palabras, la corriente en la resistencia de carga siempre circula de A hacia B. La corriente en la carga, por tanto, es una corriente alterna rectificada de onda completa, como se aprecia en la figura 3.14*b*. El meca-

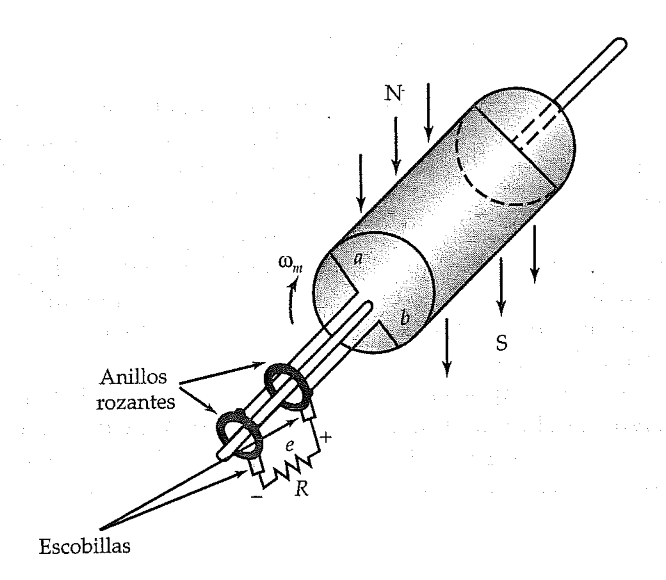


Figura 3.13. Generador elemental con anillos rozantes y escobillas.

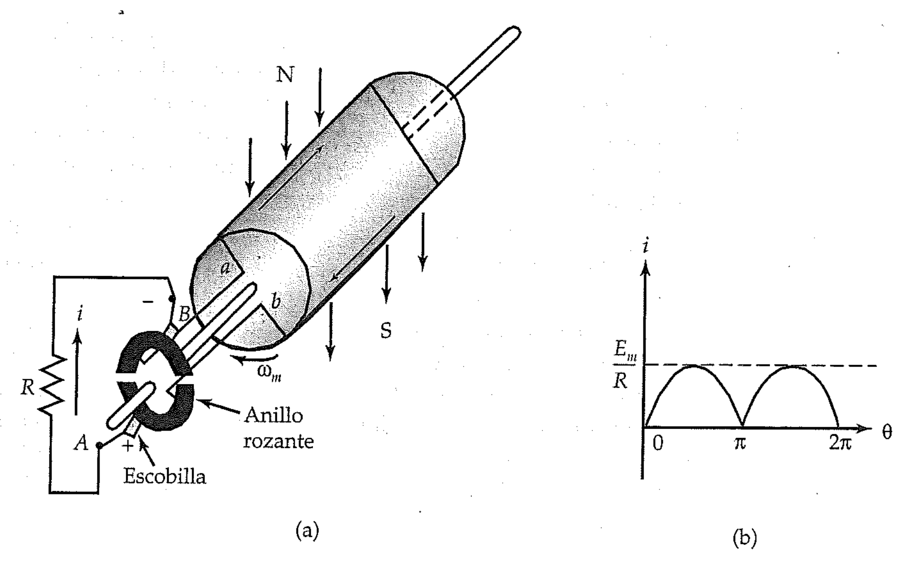


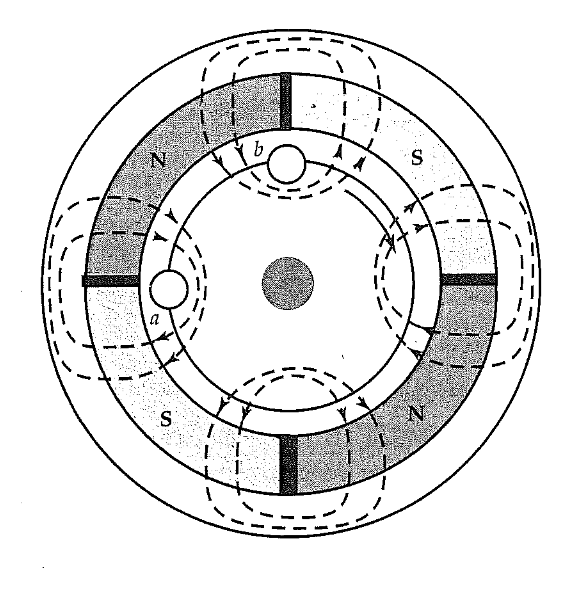
Figura 3.14. (a) Un anillo bipartido convierte un generador de ca en un generador de cc. **(b)** La onda de corriente a través de la resistencia de carga.

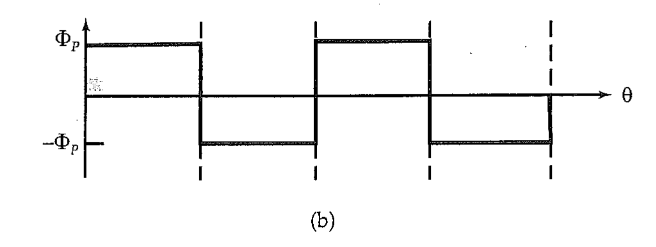
nismo de anillo bipartido se conoce comúnmente como *conmutador*, y su función es convertir corriente alterna en continua. Tal proceso de conversión se denomina *proceso de conmutación*. De hecho, convierte un generador de ca en un *generador de cc*. En realidad, todas las máquinas de cc tienen una construcción similar.

Máquinas multipolares

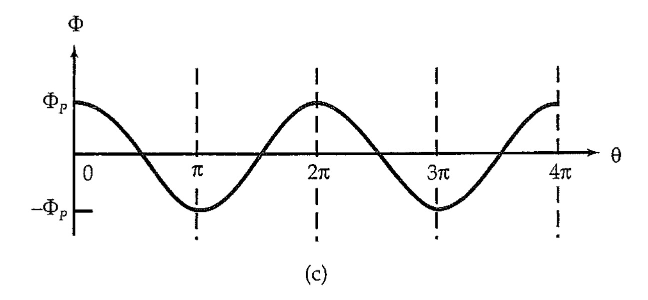
En la figura 3.15*a* se muestra una máquina tetrapolar, en la que la bobina está devanada de forma que abarca un polo. Por tanto, la distancia entre los dos lados de la bobina es de una cuarta parte de la circunferencia del rotor. Si ahora se gira la bobina en dirección de las manecillas del reloj, comenzando en la posición indicada, se encuentra que por cada revolución hay dos ciclos completos de fem inducida. Así, θ es de 720°, mientras que θ_m sigue siendo de 360°. Dicho de otro modo, el ángulo eléctrico de la fem inducida es dos veces el ángulo mecánico de rotación. El flujo por polo, el flujo que enlaza la bobina y la fem inducida en la bobina se describen en las figuras 3.15*b*, 3.15*c* y 3.15*d*, respectivamente.

Como se aprecia en la figura 3.16, la bobina abarca ahora un sexto de la circunferencia del rotor en una máquina hexapolar. Una vez más, la bobina abarca un polo, según se muestra. Por tanto, es una bobina de paso completo. Cuando se gira la bobina suceden tres ciclos de fem inducida por revolución. Por consiguiente, para $\theta_m = 360°$, $\theta = 1080°$. Es decir, el ángulo eléctrico de la fem inducida es tres veces el ángulo mecánico de rotación. El flujo por polo, el flujo que enlaza la bobina y la fem inducida también se indican en la figura.

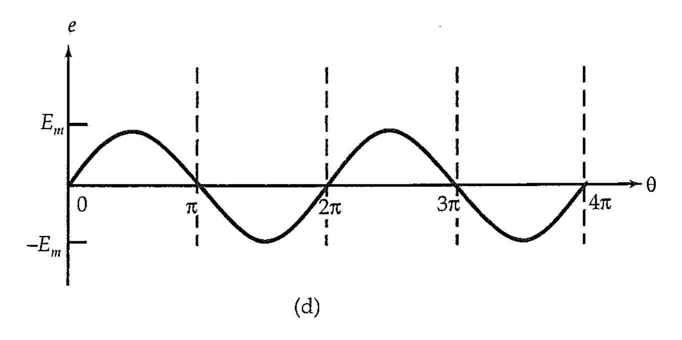




(a)



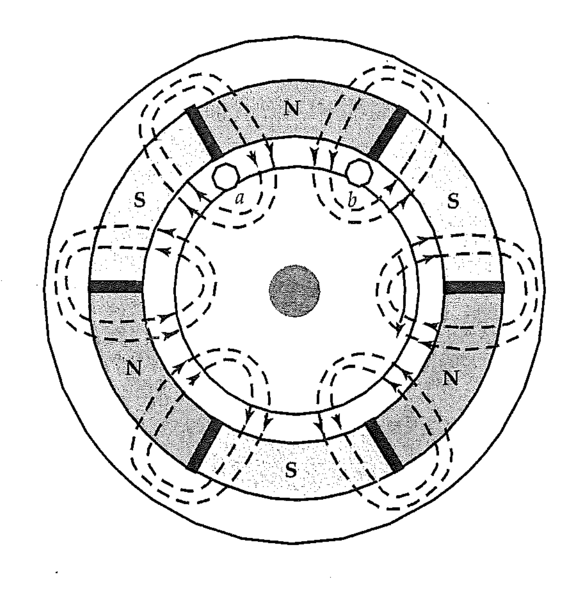
(b)

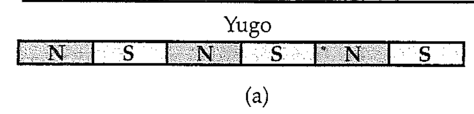


(c)

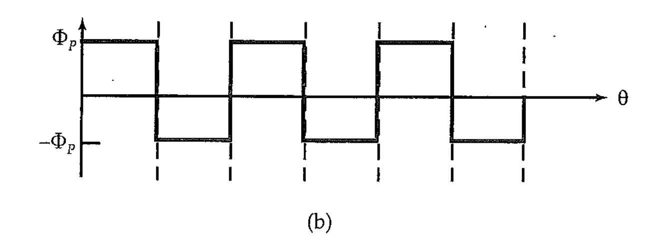
(d)

Figura 3.15. (a) Diagrama desarrollado de un generador de corriente alterna tetrapolar. **(b)** Flujo por polo establecido por los imanes. **(c)** Flujo que pasa a través de la bobina rotatoria a velocidad constante. **(d)** Fuerza electromotriz inducida en la bobina.

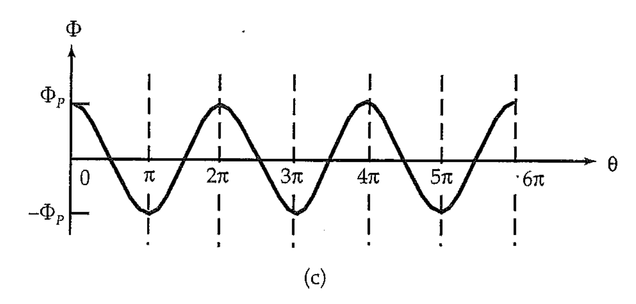




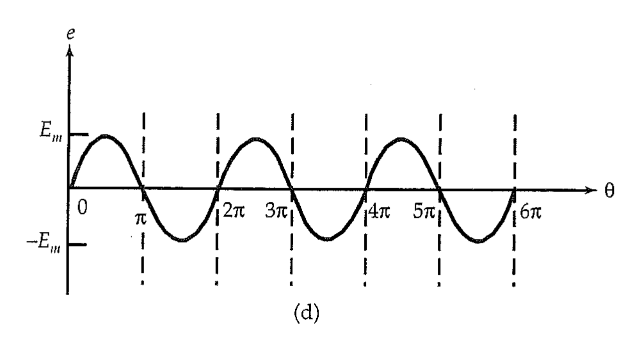
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.16. Generador hexapolar de ca. **(a)** El diagrama desarrollado. **(b)** Flujo por polo establecido por los imanes. **(c)** Flujo que pasa a través de la bobina que gira a velocidad constante. **(d)** Fuerza electromotriz inducida en la bobina.

Del análisis anterior es evidente que un par de polos es responsable de un ciclo de la fem inducida. Si en una máquina hay P polos se tiene

$$\theta = \frac{P}{2}\theta_m \tag{3.26}$$

La ecuación anterior establece un vínculo entre el ángulo mecánico de rotación y el ángulo de la fem inducida. Ésta es una de las relaciones más importantes en el estudio de las máquinas rotatorias. Al derivar la ecuación 3.26 se obtiene

$$\omega = \frac{P}{2}\omega_m \tag{3.27}$$

donde ω es la frecuencia angular (rad/s) de la fem inducida y ω_m es la velocidad angular (rad/s) del rotor. Al hacer $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia (Hz) de la fem inducida, se obtiene

$$f = \frac{P}{4\pi}\omega_m \tag{3.28}$$

Si la bobina gira a una velocidad de N_m revoluciones por minuto (rpm), entonces la velocidad angular de rotación es

$$\omega_m = \frac{2\pi}{60}N_m \tag{3.29}$$

Por tanto, la ecuación 3.28 puede volver a escribirse como

$$f = \frac{P}{120}N_m \tag{3.30a}$$

o

$$N_m = \frac{120f}{P} \tag{3.30b}$$

De la ecuación, 3.25 el valor máximo de la fem inducida en una bobina de una sola vuelta es

$$\begin{aligned} E_m &= \Phi_P\omega \\ &= \frac{P}{2}\Phi_P\omega_m \\ &= \frac{2\pi P}{120}\Phi_P N_m \end{aligned} \tag{3.31}$$

En una máquina de cc, el valor promedio del voltaje inducido en una bobina de una sola vuelta es

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{2}{\pi} E_m \\ &= \frac{P}{\pi} \Phi_P \omega_m \\ &= \frac{P}{30} \Phi_P N_m \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ésta es otra ecuación importante, y nuestro estudio de las máquinas de cc comenzará con ella.

Fuerza sobre un conductor

Cuando en un campo magnético se coloca un conductor que porta corriente, experimenta una fuerza que tiende a impartir movimiento al conductor de acuerdo con la ecuación de fuerza de Lorentz. Esto es,

$$\vec{F} = \int_c i\,\vec{d\ell} \times \vec{B}$$

donde $\vec{d\ell}$ es la longitud del elemento portador de corriente y $\vec{B}$ es la densidad de flujo magnético. De la ecuación anterior se desprende que la fuerza que actúa sobre un conductor lineal que conduce corriente situado en un campo magnético es, según se muestra en la figura 3.17

$$\vec{F} = i\,\vec{L} \times \vec{B} \tag{3.33}$$

donde L es la longitud del conductor expuesto al campo magnético.

Acción motora

Considere una máquina bipolar, semejante a la que se muestra en la figura 3.10. En vez de girar la bobina, apliquemos una corriente a través de la bobina conectándola a una fuente de voltaje constante, como en la figura 3.18. Un conductor que lleve co-

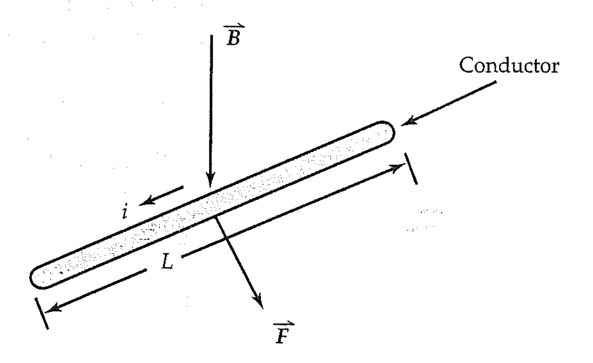


Figura 3.17. Conductor que porta corriente inmerso en un campo magnético y que experimenta una fuerza según se ilustra.

rriente inmerso en un campo magnético experimenta una fuerza como se ilustra en la figura 3.17. Para la dirección de la corriente indicada, la fuerza sobre el conductor superior *a* de la bobina es

$$\vec{F} = iLB\,\vec{a_\phi} \tag{3.34a}$$

donde *L* es la longitud efectiva del conductor. En todas las máquinas, la longitud del imán (electroimán) es igual a la longitud del conductor. Observe que la longitud del con-

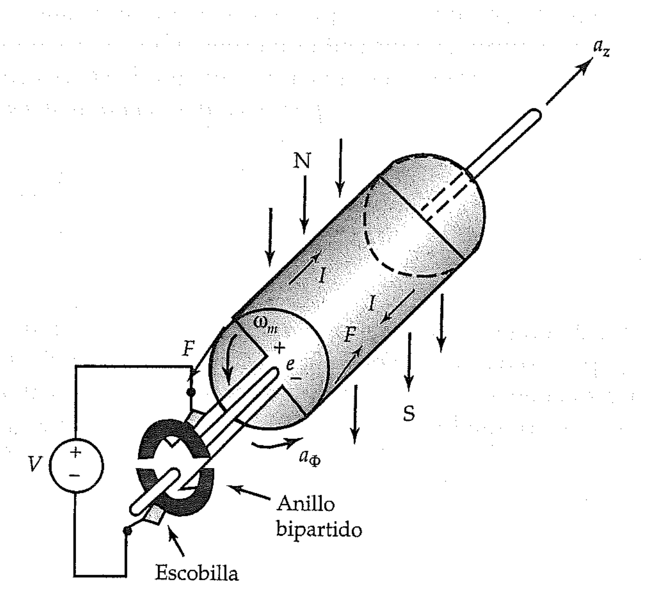


Figura 3.18. Motor de cc de dos polos.

ductor L es perpendicular a la densidad de flujo magnético $\vec{B}$. En forma semejante, la fuerza que se ejerce sobre el conductor b de la bobina es

$$\vec{F} = iLB\,\vec{a_\phi} \qquad (3.34b)$$

Ambas fuerzas actúan en la misma dirección. Por tanto, la magnitud de la fuerza total que experimentan los dos conductores es

$$F_e = 2iBL \qquad (3.34c)$$

La fuerza anterior ejerce un par sobre la bobina de una sola vuelta. Es decir,

$$T_e = F_e r = 2BiLr \qquad (3.35)$$

donde r es el radio en el que se sitúa cada conductor. El par resultante tiene la tendencia a girar el rotor en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Esto se conoce como *acción motora.*

Con objeto de mantener la bobina girando en dirección de las manecillas del reloj *(acción generadora)*, debe acoplarse a una fuente de fuerza motriz que provea un par igual al par desarrollado por la máquina. En otras palabras, el par externo aplicado (T_s) debe ser igual y opuesto al par interno desarrollado (T_e).

En cuanto la bobina comienza a girar en sentido contrario a las manecillas del reloj, se induce una fem en la bobina de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. La polaridad de la fem inducida también se muestra en la figura. En un motor, la fem inducida recibe el nombre de *fuerza contraelectromotriz* o *fuerza electromotriz inversa*. La fuerza contraelectromotriz se opone al voltaje aplicado.

En suma, un conductor que porta corriente y que está inmerso en un campo magnético siempre experimenta una fuerza que actúa sobre él (acción motora), y un conductor que se mueve en un campo magnético experimenta una fem inducida en él (acción generadora). *En cualquier máquina rotatoria, ambas acciones están presentes al mismo tiempo.*

Ejemplo 3.6

El rotor de un generador tetrapolar está devanado con una bobina de 100 vueltas. Si el flujo por polo es de 4.5 mWb y el rotor gira a una velocidad de 1800 rpm, determine *a*) la frecuencia de la fem inducida en el rotor, *b*) el valor máximo del voltaje inducido, *c*) el valor medio cuadrático (rms) del voltaje inducido para un generador de ca, y *d*) el valor promedio del voltaje inducido en un generador de cc.

- Solución

$$\omega_m = \frac{2 \times \pi \times 1800}{60} = 188.496 \text{ rad/s}$$

a) La frecuencia de la fem inducida es, según la ecuación 3.30*a*,

$$f = \frac{4 \times 1800}{120} = 60 \text{ Hz} \qquad \text{o} \qquad \omega = 2\pi f \approx 377 \text{ rad/s}$$

b) Según la ecuación 3.31, el valor máximo de la fem inducida por vuelta es

$$E_m = \frac{2\pi \times 4}{120} \times 4.5 \times 10^{-3} \times 1800 = 1.6965 \text{ V}$$

Luego, el valor máximo de la fem inducida en la bobina de 100 vueltas es

$$E_{mc} = 100 \times 1.6965 = 169.65 \text{ V}$$

c) El valor efectivo (rms) de la fem inducida es

$$E_{ef} = \frac{E_{mc}}{\sqrt{2}} = \frac{169.65}{\sqrt{2}} \approx 120 \text{ V}$$

d) El valor promedio del voltaje inducido es

$$E_c = \frac{2}{\pi} E_{mc} = \frac{2}{\pi} \times 169.65 = 108 \text{ V}$$

Ejercicios

3.5. Si la frecuencia de la fem inducida en una máquina de ocho polos es de 50 Hz, ¿a qué velocidad gira el rotor?

3.6. Un conductor de 10 cm de largo está colocado en forma perpendicular en un campo magnético, la intensidad del cual es de 1.2 T. Si la corriente en el conductor es de 120 A, calcule la fuerza que experimenta el conductor.

3.7. Un conductor único se mueve en forma perpendicular a un campo magnético. La intensidad del campo magnético es de 0.8 T. La longitud del conductor bajo la influencia del campo magnético es de 15 cm. Si el conductor se mueve a una velocidad de 2 m/s, ¿cuál es el voltaje inducido en el conductor? Si se conecta una resistencia de 0.2 Ω a través del conductor, ¿cuál es la fuerza que ejerce el campo sobre el conductor?

3.8. Una bobina de 120 vueltas sobre el rotor de un motor bipolar conduce una corriente de 10 A. La densidad de flujo por polo es de 1.2 T. Si el diámetro del núcleo es de 25 cm y su longitud de 10 cm, determine *a*) la fuerza por conductor, *b*) la fuerza que actúa sobre la bobina, y *c*) el par que actúa sobre el rotor.

3.5 Bobina en un campo magnético variable en el tiempo

Entre las numerosas posibilidades de los campos magnéticos variables en el tiempo, centraremos la atención en un campo magnético variable senoidal (alterno, o ca). En todas las máquinas rotatorias que utilizan un campo magnético variable en el tiempo el devanado del campo se realiza sobre el estator y la bobina se devana sobre el rotor. Cuando el devanado del campo se conecta a una fuente de corriente alterna y la bobina se cortocircuita, la máquina se llama *motor de inducción*. Luego, el rotor de un motor de inducción recibe su alimentación (energía) en forma inductiva y la convierte en fuerza mecánica útil (energía). Por esa razón, la bobina en cortocircuito (lazo cerrado) en el rotor se conoce como *devanado de inducción*. Aunque sólo se considera un lazo cerrado para explicar el desarrollo del par de un motor de inducción, en realidad existen muchos lazos cerrados en el rotor.

Sin entrar en demasiados detalles por el momento, en esta sección pretendemos mostrar lo siguiente:

a) Cuando los devanados del estator de una máquina de inducción polifásica se conectan a un suministro polifásico, producen un campo magnético giratorio.
b) La intensidad del campo magnético giratorio es constante.
c) El campo gira a una distancia abrazada por dos polos para cada ciclo de la onda de entrada.
d) La fuerza que actúa sobre los conductores de la bobina devanada sobre el rotor ocasiona que éste gire en la misma dirección del campo giratorio.
e) El rotor gira a una velocidad menor que la del campo giratorio.

El motor polifásico usado más comúnmente es el trifásico, ya que la fuerza trifásica se genera y distribuye en todo el mundo. Rara vez se diseñan motores de inducción bifásicos, pues no existe acceso directo al suministro de fuerza bifásica. Sin embargo, un motor de inducción monofásico está diseñado para simular en forma primitiva un motor bifásico a fin de facultarlo con una característica de autoarranque. Por tanto, es esencial explorar cómo desarrollan los campos giratorios tanto los motores trifásicos como los bifásicos.

Campo giratorio de un motor trifásico

El estator de un motor de inducción trifásico está devanado con bobinas idénticas interconectadas para formar tres fases. Los devanados de fase están espaciados 120° eléctricos (la ubicación real de las bobinas se explica en el capítulo 7). En la figura 3.19 se muestra el arreglo del devanado de fase de un motor trifásico bipolar. Con objeto de explicar el principio, sólo se ilustra una bobina de paso completo por fase. Las bobinas sin superíndice 1, 2 y 3 son para un polo y las bobinas con superíndice 1′, 2′ y 3′ son para el otro. Los números 1, 2 y 3 se refieren a las tres fases del motor.

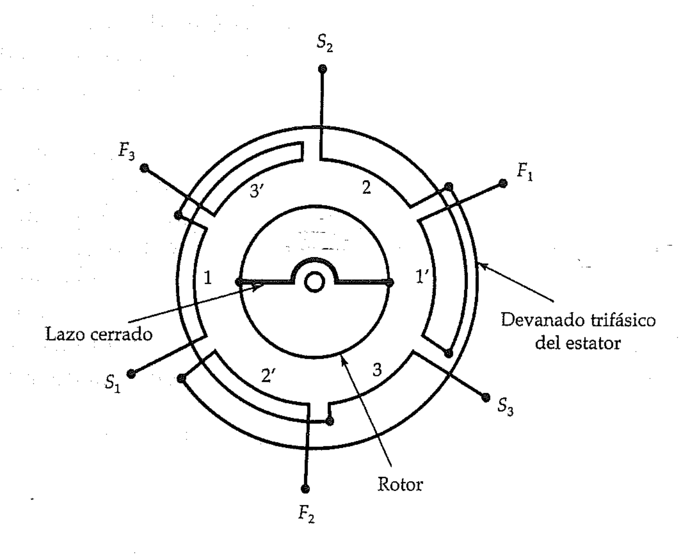


Figura 3.19. Disposición de los devanados de un motor de inducción trifásico de dos polos.

Cuando los devanados están conectados a una fuente trifásica equilibrada, se espera que las corrientes en todos los devanados sean de la misma magnitud pero con un desplazamiento de fase de 120°. El diseño de cada devanado de fase es tal que la distribución espacial del flujo en el entrehierro debido sólo a ese devanado de fase es casi senoidal. Si se toma como referencia la corriente en la fase 1, entonces las corrientes en las tres fases son (como lo describe la figura 3.20 para una secuencia positiva de fases)

$$i_1 = I_m \text{sen}\, \omega t \tag{3.36a}$$

$$i_2 = I_m \text{sen}\, (\omega t - 120°) \tag{3.36b}$$

$$i_3 = I_m \text{sen}\, (\omega t + 120°) \tag{3.36c}$$

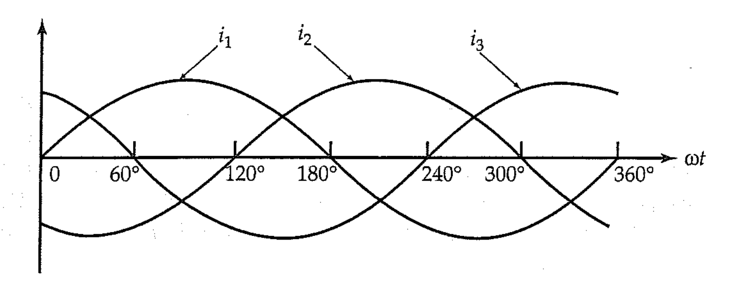


Figura 3.20. Formas de las ondas de corriente en los devanados del estator de un motor trifásico.

donde I_m s la amplitud de cada corriente de fase y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular de la fuente. En condiciones lineales, el flujo producido por cada corriente también varía en forma senoidal. Por tanto, las ondas de corriente pueden llamarse asimismo *ondas de flujo*.

En la explicación que sigue se supone que la corriente fluye del punto S (el extremo de inicio) de una bobina hacia el F (el extremo final) durante el medio ciclo positivo. En otras palabras, durante el medio ciclo positivo la corriente en una bobina de fase ocurre en la dirección de las manecillas del reloj, y produce un flujo que apunta hacia dicha bobina como si se observara desde el interior del estator.

A continuación considérense tres instantes de tiempo para demostrar que el campo resultante tiene magnitud constante y gira alrededor de la periferia del rotor a velocidad constante determinada por la frecuencia de la fuente que se aplica.

Instante I ($\omega t = 0$). En el principio, las corrientes de fase son

$$\begin{aligned} i_1 &= 0 \\ i_2 &= -0.866 I_m \\ i_3 &= 0.866 I_m \end{aligned}$$

La dirección positiva de las corrientes en las bobinas se muestra en la figura 3.21*a*. Si Φ_m es la amplitud del flujo producido por I_m ($\Phi \propto i$), entonces las magnitudes de flujo correspondientes son

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 0 \\ \Phi_2 &= 0.866\Phi_m \\ \Phi_3 &= 0.866\Phi_m \end{aligned}$$

y sus direcciones son las que se indican en la figura 3.21*a*. El ángulo entre Φ_2 y Φ_3 es de 60°. El flujo resultante es

$$\begin{aligned} \Phi_{r1} &= \sqrt{\Phi_2^2 + \Phi_3^2 + 2\Phi_2\Phi_3 \cos(60°)} \\ &= 1.5\Phi_m \end{aligned} \tag{3.37}$$

El flujo resultante está dirigido verticalmente hacia abajo dentro del motor. Veamos una explicación sencilla acerca de la dirección de las corrientes en los devanados. Debido a que las corrientes en las dos fases tienen la misma magnitud, las bobinas de fase 2 y 3′ actúan como una sola y forman el polo norte. Por otro lado, las bobinas de fase 3 y 2′ se unen para formar el polo sur. Éstos son los dos polos norte y sur de un motor trifásico de dos polos cuando $\omega t = 0$. Por tanto, el eje magnético se presenta a lo largo de la línea vertical.

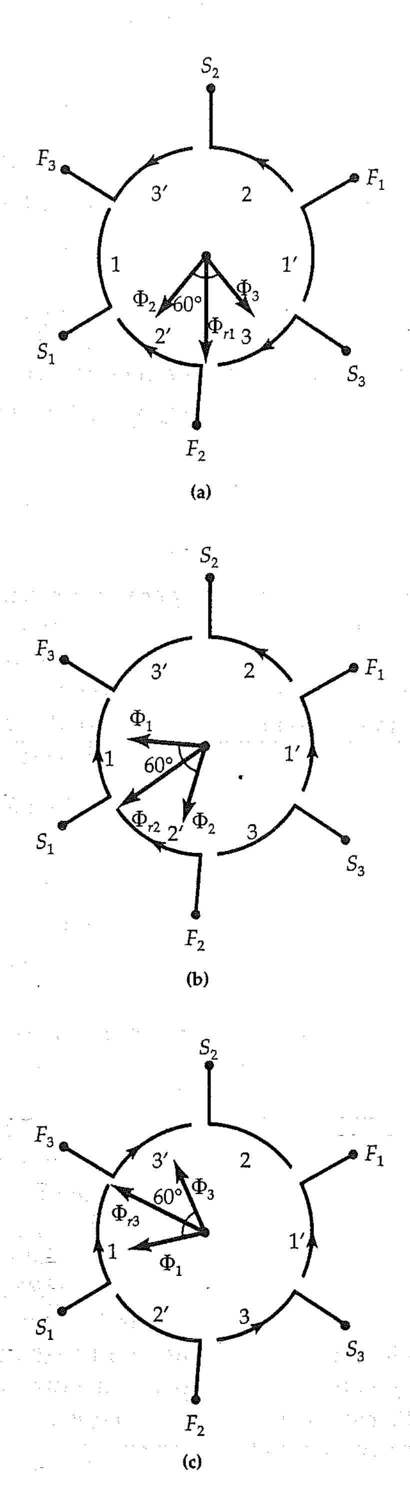


Figura 3.21. Campo giratorio en un motor de inducción trifásico de dos polos en tres instantes de tiempo **(a)** $\omega t = 0°$, **(b)** $\omega t = 60°$, y **(c)** $\omega t = 120°$.

Instante II (ωt = 60°). Un sexto de ciclo más tarde, las corrientes son

$$i_1 = 0.866 I_m$$
$$i_2 = -0.866 I_m$$
$$i_3 = 0$$

La magnitud del flujo creado por i_1 o por i_2 es $0.866\Phi_m$. La dirección positiva de las corrientes y los flujos se muestran en la figura 3.21*b*. De nuevo, se tienen dos flujos, cada uno de magnitud $0.866\Phi_m$ y espaciados 60° en tiempo de fase. Por tanto, el flujo resultante es

$$\Phi_{r2} = 1.5\Phi_m$$

Observe que Φ_{r2} es igual a Φ_{r1} pero su dirección es 60° en dirección de las manecillas del reloj desde Φ_{r1}. En otras palabras, un avance de 60° en el tiempo de fase de las corrientes ha cambiado el flujo resultante en 60° eléctricos en el espacio. Advierta que las bobinas de fase 1′ y 2 actúan como un polo norte único, y las bobinas de fase 2′ y 1 se comportan como un polo sur único. Parece como si los dos polos magnéticos hubieran sido girados 60° eléctricos en dirección de las manecillas del reloj.

Instante III (ωt = 120°). Un tercio de ciclo más tarde, las corrientes en las bobinas de fase son

$$i_1 = 0.866 I_m$$
$$i_2 = 0$$
$$i_3 = -0.866 I_m$$

La magnitud del flujo producido por i_1 o por i_3 es $0.866\Phi_m$. La dirección positiva de cada flujo y la corriente en cada bobina se aprecian en la figura 3.21*c*. Al combinar los dos flujos se encuentra que el flujo resultante Φ_{r3} tiene la misma magnitud que Φ_{r1} y se dirige 120° en el sentido de las manecillas del reloj desde Φ_{r1}. En otras palabras, un cambio de fase de 120° en el dominio del tiempo ha girado espacialmente al flujo 120°. Las bobinas de fase 3 y 1′ actúan ahora como el polo norte, mientras que las bobinas 1 y 3′ se comportan como el polo sur. En este momento, los dos polos han girado 120° en dirección de las manecillas del reloj.

Otros 60° después se advierte que las bobinas 2′ y 3 actúan como un polo norte y las bobinas 3′ y 2 como un polo sur. En este momento, las posiciones de los polos se han invertido. En otras palabras, el flujo resultante con magnitud de $1.5\Phi_m$ ha girado 180° (un arco cubierto por un polo) cuando cada corriente ha experimentado un cambio de medio ciclo. Consecuentemente, *el campo resultante gira 360° a lo largo de la periferia del entrehierro cuando las corrientes sufren un cambio de un ciclo.*

En un motor bipolar, el tiempo en que el flujo completa una revolución a lo largo de la periferia del entrehierro es el mismo que el periodo de tiempo T de la onda de entrada ($T = 1/f$). Como en una máquina tetrapolar una revolución equivale a 720°

eléctricos, el tiempo en que el flujo completa una rotación es $2T$. El tiempo que el flujo requiere para girar una vez alrededor del entrehierro es $3T$ para un motor hexapolar. Si T_s es el tiempo en que el flujo gira a lo largo de la periferia de un motor de P polos, entonces

$$T_s = \frac{P}{2}T \tag{3.38}$$

Si n_s es la velocidad del campo giratorio en revoluciones por segundo, llamada con más propiedad *velocidad síncrona*, entonces

$$n_s = \frac{1}{T_s} = \frac{2f}{P} \tag{3.39a}$$

La ecuación 3.39*a* también puede expresarse en revoluciones por minuto (N_s) o radianes por segundo (ω_s) como

$$N_s = \frac{120f}{P} \tag{3.39b}$$

o

$$\omega_s = \frac{4\pi f}{P} = \frac{2}{P}\omega \tag{3.39c}$$

De la ecuación anterior resulta evidente que la *velocidad síncrona del campo giratorio es constante para una fuente de frecuencia constante.*

En nuestro análisis hemos supuesto tácitamente que los devanados de fase están dispuestos en la dirección de las manecillas del reloj y que el suministro de fuerza tiene una secuencia de fase positiva. Esta combinación dio origen a un campo giratorio uniforme que gira a velocidad constante en la dirección de las manecillas del reloj. Sin embargo, es posible forzar el campo para que gire en dirección contraria (levógira) con sólo intercambiar dos de las tres conexiones del suministro.

Conforme el flujo gira, induce una fem en la bobina. Como la bobina forma un lazo cerrado, la fem inducida da origen a una corriente en el lazo, como se indica en la figura 3.22. Un conductor que lleva corriente y que está inmerso en un campo magnético experimenta una fuerza que tiende a moverlo. En este caso, la fuerza que actúa sobre cada conductor del lazo obliga al rotor a girar en dirección del campo giratorio. Sin carga (no hay nada acoplado al eje del rotor), el rotor alcanza una velocidad ligeramente menor que la velocidad síncrona. El rotor de un motor de inducción nunca puede girar a velocidad síncrona por lo siguiente: si lo hiciera (es decir, si el rotor girara a velocida síncrona), el lazo cerrado sobre él encontraría un flujo constante que pasaría a través suyo. Luego, no habría en él una fem inducida. En ausencia de ésta, no habría corriente en el lazo cerrado ni fuerza que actuara sobre los conductores. Por ende, el rotor tendería a disminuir su velocidad como resultado de las pérdidas

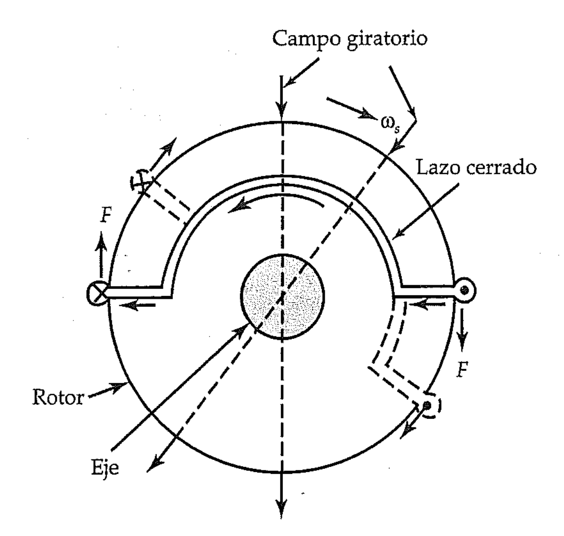


Figura 3.22. Fuerza ejercida por el campo giratorio constante sobre cada conductor de un lazo cerrado.

rotacionales debidas a la fricción y al efecto del viento. En cambio el rotor disminuye su velocidad, experimenta un cambio en el flujo, lo que induce una fem y también corriente en el lazo cerrado. La corriente crea una fuerza sobre los conductores que tiende a incrementar la velocidad del rotor. Cuando se llega al estado estable, el rotor alcanza la velocidad a la que el par que desarrolla es igual y opuesto al par aplicado. A medida que se incrementa la carga aplicada al motor, la velocidad del rotor disminuye aún más. Por tanto, *la velocidad de un motor de inducción depende de la carga aplicada al motor.*

La diferencia entre la velocidad síncrona y la velocidad del rotor se llama *velocidad de deslizamiento.* Si N_m (ω_m) es la velocidad del rotor, la velocidad de deslizamiento es

$$N_r = N_s - N_m \tag{3.40a}$$

o

$$\omega_r = \omega_s - \omega_m \tag{3.40b}$$

Si imaginamos dos puntos, uno en el campo giratorio y el otro en el rotor, entonces la velocidad de deslizamiento es la velocidad relativa a la que el punto en el campo giratorio se mueve por delante del punto en el rotor. A menudo la velocidad de deslizamiento se define en términos de la velocidad síncrona y recibe el nombre de *deslizamiento por unidad* o *deslizamiento*. Es decir,

$$s = \frac{\omega_r}{\omega_s} = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} \tag{3.41}$$

En términos del deslizamiento y de la velocidad síncrona, la velocidad del rotor es, según la ecuación anterior,

$$\omega_m = (1 - s)\omega_s \tag{3.42a}$$

o

$$N_m = (1 - s)N_s \tag{3.42b}$$

Ejemplo 3.7

Calcule la velocidad síncrona de un motor de inducción tetrapolar trifásico de 50 Hz. ¿Cuál es el porcentaje de deslizamiento si el rotor gira a una velocidad de 1200 rpm?

- Solución

$$N_s = \frac{120f}{P} = \frac{120 \times 50}{4} = 1500 \text{ rpm, o } 157.08 \text{ rad}/s$$

$$s = \frac{1500 - 1200}{1500} = 0.2$$

Así, el deslizamiento es 0.2, o bien, el porcentaje de deslizamiento es 20%.

■

Campo giratorio de un motor bifásico

En la figura 3.23*a* se muestra un motor bifásico cuyos devanados de fase están colocados en el espacio en cuadratura. En la figura 3.23*b* se ilustran las ondas de corriente en los dos devanados cuando se conectan a una fuente bifásica equilibrada, donde la fase 1 se ha tomado como referencia. Es decir,

$$i_1 = I_m \text{ sen } \omega t \tag{3.43a}$$

$$i_2 = I_m \text{ sen } (\omega t - 90°) = -I_m \cos \omega t \tag{3.43b}$$

Los valores correspondientes de los flujos instantáneos producidos por las dos corrientes son

$$\Phi_1 = \Phi_m \text{ sen } \omega t \tag{3.44a}$$

$$\Phi_2 = -\Phi_m \cos \omega t \tag{3.44b}$$

De nuevo, la dirección positiva de la corriente va de S a F. Asimismo, cada devanado de fase ha sido enrollado de manera tal que produce un polo sur como si se viera desde el interior de la bobina cuando la corriente en ella va en dirección de las manecillas del reloj.

En el principio, $\omega t = 0$, la corriente en las bobinas 1 y 1′ es cero. Por tanto, este devanado no produce flujo. En el devanado de la segunda fase la corriente es máxima y fluye de F_2 a S_2, como se indica en la figura 3.24*a*. El flujo establecido por esta

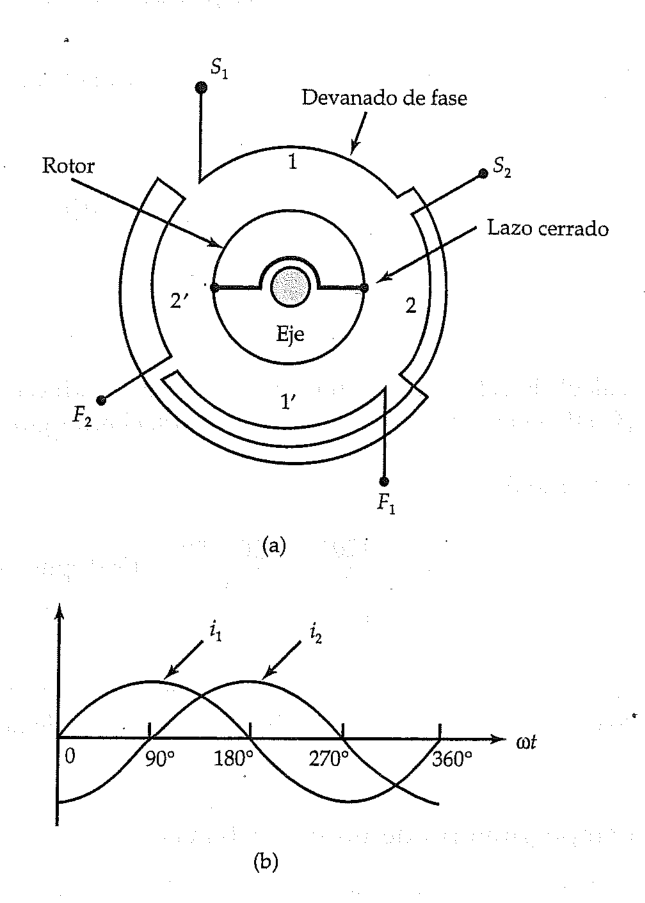


Figura 3.23. (a) Arreglo del devanado de un motor de inducción bifásico de dos polos. **(b)** Formas de las ondas de la corriente en los devanados del estator.

corriente es máximo, es decir, $\Phi_{r1} = \Phi_m$, y está dirigido de la bobina 2 a la 2'. Así, la bobina de fase 2 actúa como un polo norte, mientras que la 2' es un polo sur.

Un octavo de ciclo después, $\omega t = 45°$, las corrientes en los dos devanados son

$$i_1 = 0.707 I_m$$
$$i_2 = -0.707 I_m$$

Como la magnitud de las corrientes en los dos devanados es la misma, la magnitud del flujo creado por cada devanado es $0.707\Phi_m$. La direcciones de los dos flujos se muestran en la figura 3.24*b*. Como los dos flujos son ortogonales, el flujo resultante es

$$\Phi_{r2} = \sqrt{(0.707\Phi_m)^2 + (0.707\Phi_m)^2} = \Phi_m \tag{3.45}$$

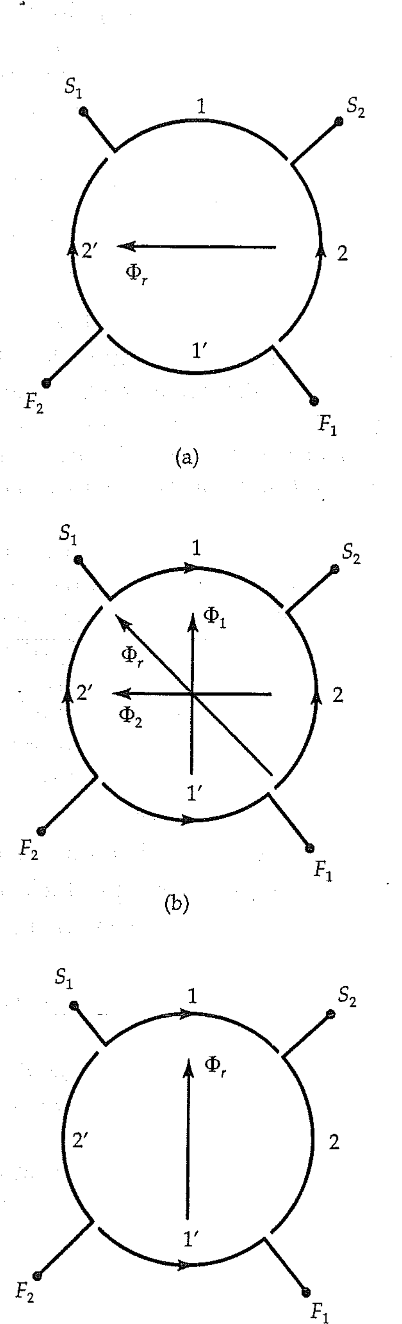


Figura 3.24. Campo giratorio en un motor de inducción bifásico de dos polos en **(a)** $\omega t = 0°$, **(b)** $\omega t = 45°$ y **(c)** $\omega t = 90°$.

Observe que Φ_{r2} tiene la misma magnitud que Φ_{r1} y ha avanzado espacialmente un ángulo de 45°, como aparece en la figura. En ésta es evidente que las bobinas 1′ y 2 actúan ahora como un polo norte, y las bobinas 2′ y 1 forman un polo sur. Un cambio de 45° en el tiempo ha girado a los polos 45° espacialmente en dirección de las manecillas del reloj.

Un cuarto de ciclo más tarde, $\omega t = 90°$, las dos corrientes son

$$i_1 = I_m$$
$$i_2 = 0$$

En este instante, sólo el devanado de la primera fase lleva una corriente máxima y produce un flujo máximo, el cual se dirige de la bobina 1′ a la 1, como se describe en la figura 3.24*c*. El flujo resultante, $\Phi_{r3} = \Phi_m$, tiene igual magnitud que Φ_{r1} pero lo adelanta con un ángulo de 90° en dirección de las manecillas del reloj. Ahora, la bobina 1′ es un polo norte y la bobina 1 es un polo sur. Un incremento de 90° en el tiempo de fase de las corrientes de fase ha girado espacialmente los dos polos magnéticos en 90° eléctricos. La intensidad de cada polo es Φ_m.

Si este proceso es continuo, se encontraría que tras un ciclo completo de corrientes en las dos fases de un motor bifásico, el flujo constante habría completado una revolución alrededor de la periferia del rotor. Esta situación es similar a la que se estudió previamente para un motor de inducción trifásico. Por tanto, todas las ecuaciones que se formularon para un motor trifásico también son válidas para uno bifásico.

Como el flujo establecido por un devanado monofásico pulsa en el tiempo a lo largo del mismo eje magnético, no gira. Por ende, el número mínimo de fases debe ser dos a fin de producir un campo giratorio de magnitud constante.

De lo anterior se concluye lo siguiente:

1. La magnitud del campo giratorio en un motor bifásico es constante y es igual a Φ_m, donde Φ_m es el flujo máximo producido por cualquier devanado.
2. La magnitud del campo giratorio en una máquina trifásica es constante e igual a $1.5\Phi_m$.
3. Es posible demostrar que la magnitud del campo giratorio en una máquina de n fases es $0.5\, n\, \Phi_m$.
4. El campo giratorio gira —valga la expresión— con una velocidad síncrona determinada por la frecuencia de la fuente aplicada y por el número de polos del motor.
5. La velocidad del rotor nunca puede ser igual a la velocidad síncrona, a menos que el rotor sea impulsado por un agente motriz externo.

Ejercicios

3.9. Un motor de inducción trifásico hexapolar opera a partir de un suministro cuya frecuencia es de 60 Hz. Calcule *a*) la velocidad síncrona del campo giratorio y *b*) la velocidad del rotor si el porcentaje de deslizamiento es 5%.

3.10. Demuestre que la intensidad del campo giratorio para una máquina de seis fases es $3\Phi_m$, donde Φ_m es el flujo máximo producido por cada devanado de fase.

3.11. Sin carga, la velocidad del rotor de un motor de inducción trifásico es 895 rpm. Calcule *a*) el número de polos, *b*) la frecuencia de la fuente, *c*) la velocidad síncrona, y *d*) el porcentaje de deslizamiento.

3.6. Motor síncrono

El estator de un motor síncrono polifásico está devanado exactamente de la misma forma que un motor de inducción polifásico. Sin embargo, el rotor de un motor síncrono tiene dos devanados, uno de los cuales es idéntico al de un motor de inducción y se conoce como *devanado de inducción*. Este devanado tiene la forma de lazos cerrados. El otro devanado, al que se llama *devanado de campo*, está diseñado para llevar una corriente constante (cc) de modo que produzca un flujo constante en el entrehierro, como se muestra en la figura 3.25.

Cuando se conecta el devanado del estator a un suministro de fuerza polifásica, produce un campo constante que gira alrededor de la periferia del rotor. El devanado de campo no está excitado en el momento de la puesta en marcha. El campo giratorio induce una fem en el lazo cerrado, lo que origina que fluya una corriente. Un conductor portador de corriente inmerso en un campo magnético experimenta una fuerza que crea el par impulsor. En suma, el motor síncrono arranca como un motor de inducción.

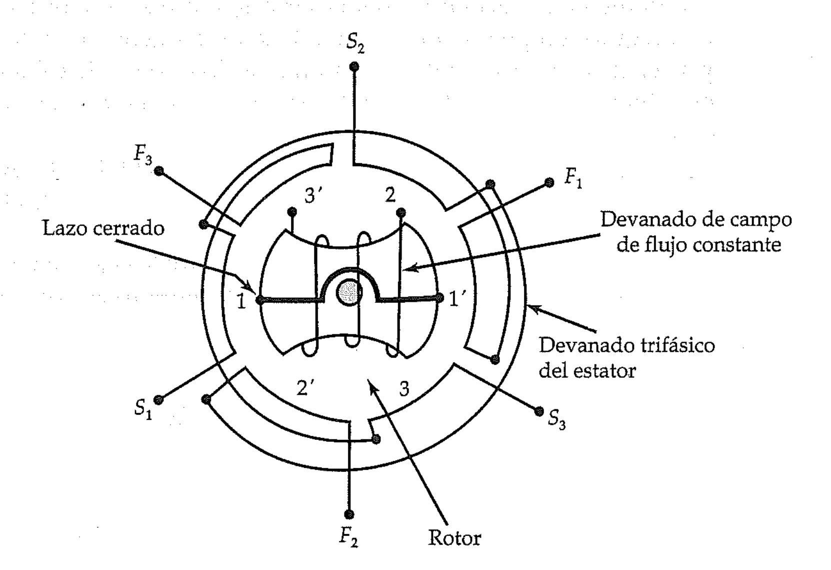


Figura 3.25. Arreglo del devanado de un motor síncrono trifásico con inducción y devanados de flujo constante en el rotor.

En cuanto el rotor adquiere una velocidad superior a 75% de la velocidad síncrona, la corriente constante se aplica gradualmente al devanado de campo en el rotor. Los polos magnéticos así creados en la superficie del rotor "se traban" con el campo giratorio y permiten al rotor "entrar" a la velocidad síncrona.

La posición de alineación de los polos magnéticos depende de la carga en la máquina. El ángulo δ por el que el eje magnético del rotor se atrasa respecto del eje magnético del campo giratorio se denomina *ángulo de potencia*, o *ángulo del par*. Posteriormente demostraremos que la potencia (par) desarrollada por un motor síncrono es proporcional a sen δ. Luego, en condiciones de no carga, δ se acerca a cero. Por otro lado, el par desarrollado es máximo cuando $\delta = 90°$. Si el par aplicado (también conocido como *par de freno*) excede al par máximo que un motor síncrono puede desarrollar, ocasiona que el rotor "salga" de sincronismo. Así, un motor síncrono gira a su velocidad síncrona mientras el par aplicado sea menor que el par máximo desarrollado por él.

Resulta muy interesante observar que una vez que el rotor comienza a girar a velocidad síncrona, el devanado de inducción se vuelve ineficaz porque no hay en él fem inducida. Sin embargo, cumple otro propósito importante: ayuda a estabilizar el motor siempre que ocurre un cambio súbito en la carga sobre la máquina. En el capítulo 8 se ahondará en este atributo del devanado de inducción.

3.7. Motor de reluctancia

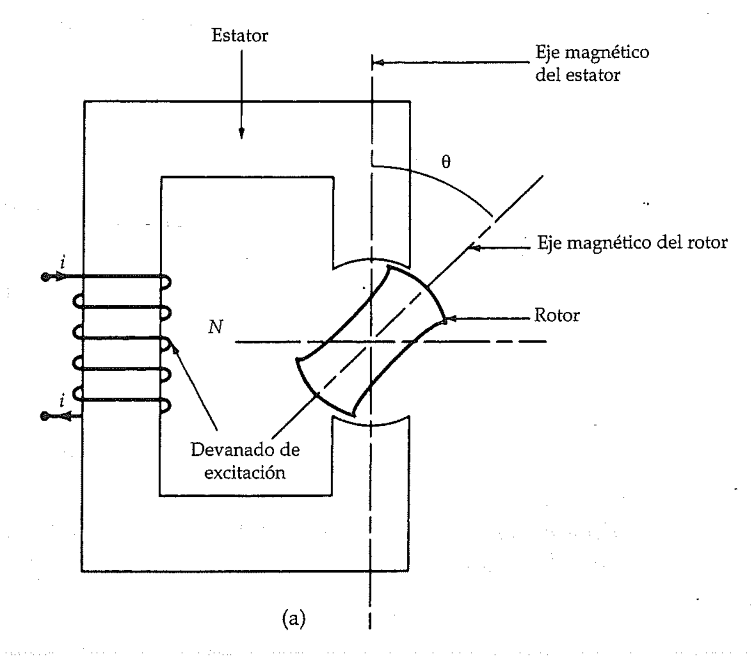
El motor de reluctancia es, en esencia, un motor síncrono cuya reluctancia cambia en función del desplazamiento angular θ. Debido a su velocidad constante de operación, comúnmente se usa en relojes eléctricos, tocadiscos y otros equipos que requieren una regulación precisa del tiempo. Este motor generalmente es del tipo monofásico y se encuentra disponible en el rango de fracciones de caballo de fuerza. Un motor de reluctancia difiere de un motor síncrono en que no tiene devanado de campo en el rotor.

En la figura 3.26*a* se muestra un motor elemental de reluctancia, monofásico, bipolar. Con objeto de simplificar el desarrollo teórico, se supone que toda la reluctancia del circuito magnético se localiza en el entrehierro.

Cuando el desplazamiento angular θ entre los ejes magnéticos del rotor y el estator es cero (posición directa o eje *d*), el entrehierro efectivo es mínimo. La reluctancia del circuito magnético,

$$\mathcal{R}(0) = \frac{2g}{\mu_0 A} \tag{3.46}$$

donde g es el entrehierro efectivo y A es el área por polo, también es mínima. En consecuencia, la inductancia del circuito magnético es máxima porque la inductancia es inversamente proporcional a la reluctancia.



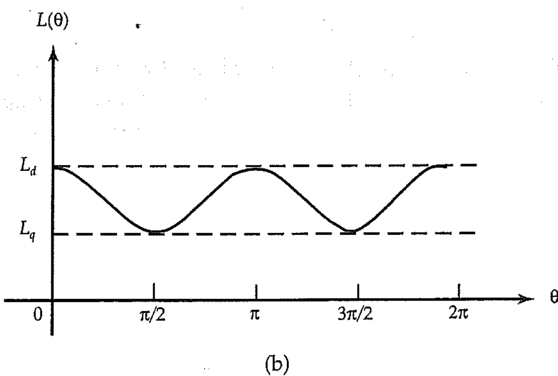


Figura 3.26. **(a)** Motor de reluctancia monofásico. **(b)** Variación en la inductancia de un motor de reluctancia como función del ángulo de desplazamiento θ.

Cuando los ejes magnéticos del rotor y el estator forman ángulos rectos entre sí (posición de cuadratura o eje q), la reluctancia es máxima, y se adelanta a una inductancia mínima. Conforme el rotor gira a velocidad constante ω_m, la inductancia pasa de máxima a mínima, como se ilustra en la figura 3.26*b*.

La inductancia como función de θ puede expresarse como

$$L(\theta) = 0.5(L_d + L_q) + 0.5(L_d - L_q)\cos 2\theta \tag{3.47}$$

El par desarrollado por un sistema rotatorio puede obtenerse de la ecuación 3.23 como

$$T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{3.48}$$

Luego, el par que se ejerce sobre el rotor de un motor de reluctancia es

$$T_e = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \text{ sen } 2\theta \tag{3.49}$$

Sin embargo, θ puede expresarse como

$$\theta = \omega_m t + \delta \tag{3.50}$$

donde δ es la posición inicial del eje magnético del rotor con respecto al eje magnético del estator. Ahora el par que experimenta el rotor puede volver a escribirse como

$$T_e = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \text{ sen } [2(\omega_m t + \delta)] \tag{3.51}$$

Es evidente que el par inicial (en $t = 0$) que experimenta el rotor vale cero si $\delta = 0°$ y es máximo si $\delta = 45°$. La presencia del signo negativo en la ecuación anterior pone de manifiesto que el par tiende a alinear el rotor bajo el polo más cercano del estator y, así, define la dirección de rotación.

Para una variación senoidal de la corriente,

$$i = I_m \cos \omega t$$

el par desarrollado por el motor de reluctancia es

$$T_e = -0.5 I_m^2 (L_d - L_q) \cos^2 \omega t \text{ sen}(2\omega_m t + 2\delta)$$

Mediante las identidades trigonométricas siguientes,

$$2 \cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

y

$$2 \text{ sen } \alpha \cos \beta = \text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta$$

la expresión del par se convierte en

$$T_e = -0.25(L_d - L_q) I_m^2 [\text{sen}(2\omega_m t + 2\delta) + 0.5 \text{ sen}\{2(\omega + \omega_m)t + 2\delta\} - 0.5 \text{ sen}\{2(\omega - \omega_m)t - 2\delta\}]$$

A partir de esta expresión es obvio que el par promedio desarrollado por el motor de reluctancia es cero a menos que su velocidad ω_m sea igual a ω y $\delta \neq n\pi$, donde $n = 0, 1, 2,...$ Por tanto, para que el motor de reluctancia desarrolle un par promedio, su velocidad angular debe ser igual a la frecuencia angular de la fuente. En otras palabras, el motor debe girar a su velocidad síncrona. El par promedio que se desarrolla a la velocidad síncrona es

$$T_{e|\text{prom}} = -0.125\,(L_d - L_q)\,I_m^2 \text{ sen } 2\delta \tag{3.52}$$

el cual es máximo cuando $\delta = 45°$.

Ejemplo 3.8

La alimentación de corriente a un motor de reluctancia bipolar a 60 Hz es de 10 A (rms). Los valores mínimo y máximo de las inductancias son 2 H y 1 H, respectivamente. Determine *a*) la velocidad del rotor y *b*) el par promedio desarrollado por el motor.

- Solución

La velocidad del rotor es: $\omega_m = \omega = 2\pi f = 2\pi \times 60 \approx 377$ rad/s, o 3600 rpm

El par promedio desarrollado por el motor es

$$T_{e|\text{prom}} = -0.125(2-1)\left(10 \times \sqrt{2}\right)^2 \text{sen } 2\delta$$

$$= -25 \text{ sen } 2\delta$$

El par promedio desarrollado es de 25 N • m cuando $\delta = 45°$.

■

Ejercicios

3.12. La inductancia de un motor bipolar de reluctancia se define como

$$L(\theta) = 5 + 2\cos 2\theta \text{ H}$$

Calcule el par desarrollado por el motor cuando la corriente en una bobina de 150 vueltas es de 5 A y $\theta = 25°$. Calcule las inductancias mínima y máxima del motor. Bosqueje el par desarrollado como una función del desplazamiento angular θ.

3.13. En el motor del ejercicio anterior, si la corriente es 5 sen 314*t* A, determine la velocidad del motor. Bosqueje el par promedio que desarrolla el motor como una función de la posición inicial del rotor (δ).

3.8. Relés electromagnéticos

Un relé electromagnético es fundamentalmente un circuito magnético en el que un elemento magnético está separado del otro por medio de un entrehierro (o entrehierros). En general, cada elemento magnético está hecho de un material magnético sumamente permeable, de modo que su reluctancia es insignificante en comparación con la reluctancia del entrehierro (o entrehierros). Comúnmente, uno de los dos elementos es estacionario (fijo en su lugar), en tanto que el otro es móvil. La parte movible del relé se llama *armadura,* y se mantiene en su posición original mediante un resorte de retención. Se utiliza una bobina bien diseñada y devanada alrededor de la parte estacionaria, la cual, sujeta a excitación, provee la fuerza magnetomotriz (fmm) necesaria para operar el relé. Los circuitos magnéticos con entrehierros múltiples semejantes a los que se muestran en las figuras 3.6, 3.7 y 3.9 pueden diseñarse para operar como relés. En la figura 3.27 se muestra un relé con un solo entrehierro. Se aprecia un extremo de la armadura conectado por medio de un gozne a la parte estacionaria mientras que un resorte mantiene en posición al otro extremo.

El diseño de cada relé obliga a que exista una corriente mínima I_0 suficiente para apenas superar la fuerza de retención del resorte. Si la corriente en la bobina es menor que I_0 la armadura permanece en su estado original (inactivo). Para moverla de su posición original hacia el elemento estacionario se requiere una corriente mayor que I_0. En tanto que la corriente en la bobina sea mayor que I_0, el relé permanecerá en su estado activo y el entrehierro casi desaparecerá. Generalmente la bobina del relé recibe el nombre de *bobina de voltaje,* cuando el relé está diseñado para operar a cierto voltaje V_0. En un relé controlado por voltaje, la corriente en el relé excede I_0 cuando el voltaje a través de la bobina de relé es por lo menos V_0. Por otro lado, se dice que una bobina de relé es *bobina de corriente* cuando se diseña el relé para que opere con cierta corriente, la cual, por supuesto, debe ser mayor que I_0. Además, un relé puede diseñarse de forma que sea sensible a variaciones en el voltaje, en la corriente o en ambos. Observe que es el movimiento de la armadura lo que se aprovecha para *hacer* (cerrar) o *romper* (abrir) un circuito eléctrico.

Con base en el estado previo a la activación, el relé se denomina *normalmente abierto* (NO, *normally open*) o *normalmente cerrado* (NC, *normally closed*). El relé que se muestra en la figura 3.27 es del tipo NC debido al cortocircuito a través de los dos contactos del relé. Aunque la bobina y los contactos forman parte del mismo conjunto, constituyen dos circuitos diferentes y se muestran como tales para el diagrama de alambrado. La bobina se señala con un círculo con una letra para designar al relé. Se usa la misma letra para indicar el contacto de éste. En las figuras 3.28*a* y 3.28*b* se muestran un relé normalmente cerrado y otro normalmente abierto, respectivamente, desde el punto de vista del alambrado.

Por tanto, un relé es sencillamente un interruptor controlado que *hace* o *rompe* un circuito eléctrico en condiciones predeterminadas. La bobina recibe una señal controladora desde un circuito eléctrico y la armadura responde abriendo o cerrando otro circuito eléctrico.

Un relé puede usarse para proteger un dispositivo eléctrico contra los excesos de corriente, voltaje o térmicos, para arrancar o detener un motor eléctrico, para cambiar luces de señalización que indican el estado de una máquina, para controlar a distancia un circuito con voltaje elevado que lo hace peligroso, etcétera.

En la figura 3.29 se muestra el uso de un relé electromagnético para arrancar un motor de inducción monofásico tal como un motor de fase dividida. Como se explicó en la sección 3.5, un motor desarrolla un par inicial si y sólo si tiene por lo menos dos devanados de fase con sus ejes magnéticos desplazados en el espacio en cuadratura y excitados por una fuente bifásica. El primer requisito se satisface devanando cada motor monofásico con dos devanados: uno principal y otro auxiliar. La causa de que se hayan desarrollado varios tipos de motores monofásicos radica en la carencia de un suministro bifásico. En un motor de fase dividida, el devanado principal permanece energizado en todo momento, en tanto que el devanado auxiliar se desconecta luego de que el motor ha alcanzado cierta velocidad. Para crear un motor seudobifásico, el devanado principal se hace altamente inductivo y el auxiliar altamente resistivo. Cuando se conectan los dos devanados a través de la fuente monofásica, la corriente en el devanado auxiliar se adelanta a la corriente en el devanado principal. Las dos corrientes no son de la misma magnitud ni tienen la diferencia de fase de 90°, pero sí producen un campo giratorio no equilibrado que imparte rotación (*véase* el capítulo 10). En la mayor parte de los motores monofásicos, el devanado auxiliar se desconecta por medio de un interruptor centrífugo montado internamente y sensible a la velocidad. Sin embargo, en los motores herméticamente sellados que se utilizan en las unidades de refrigeración, sería imposible dar servicio o reemplazar un interruptor centrífugo averiado. Por ello, un relé normalmente abierto, montado en el exterior y controlado por corriente se utiliza para desempeñar la función del interruptor centrífugo.

La corriente de arranque de un motor de fase dividida es, en general, de 300 a 500% mayor que la de su estado estable de operación. Es esta corriente elevada la que activa el relé y conecta el devanado auxiliar a la fuente monofásica. La corriente en el devanado principal disminuye conforme el motor adquiere velocidad. A cierta velocidad, la corriente en el devanado principal cae por debajo del requerimiento mínimo del relé y el devanado auxiliar se desconecta de la fuente.

Para analizar el circuito magnético del relé que se muestra en la figura 3.27, despreciaremos las reluctancias del elemento estacionario y de la armadura. Si x es la longitud y A el área de la sección transversal del entrehierro, entonces la reluctancia de éste es

$$\mathcal{R} = \frac{x}{\mu_o A}$$

donde μ_o es la permeabilidad del aire.

Sea i la corriente en la bobina de N vueltas; entonces la inductancia del circuito magnético sería

$$L = \frac{\mu_o A N^2}{x}$$

Por último, según la ecuación 3.23 la fuerza magnética que actúa sobre la armadura es

$$F_m = -\frac{\mu_o A N^2 i^2}{2x^2} \tag{3.53}$$

La presencia del signo menos en la ecuación anterior destaca el hecho de que la fuerza magnética tiende a atraer la armadura hacia el elemento estacionario a fin de disminuir el entrehierro. Observe que la fuerza magnética es directamente proporcional al cuadrado de la corriente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la armadura y el elemento estacionario. El movimiento de la armadura ocasiona que la x disminuya y que F_m aumente. Por tanto, la acción del relé es muy rápida.

Ejemplo 3.9

Un motor de fase dividida usa un relé con un solo entrehierro del tipo que se ilustra en la figura 3.27. La corriente en el devanado principal cuando el motor opera a su velocidad especificada a plena carga es 4.2 A. La bobina tiene 500 vueltas. La longitud y el área de la sección transversal del entrehierro son 2 mm y 2.25 cm^2, respectivamente. Si el relé está diseñado para operar a 150% de la corriente de especificación del motor, determine la fuerza de retención del resorte.

- Solución

La corriente mínima necesaria para activar el relé es

$$i = 4.2 \times 1.5 = 6.3 \text{ A}$$

De acuerdo con la ecuación 3.53, la magnitud de la fuerza magnética que actúa sobre la armadura es

$$F_m = 4\pi \times 10^{-7} \times 2.25 \times 10^{-4} \times 0.5 \times \left[\frac{500 \times 6.3}{0.002}\right]^2$$

$$= 350.69 \text{ N}$$

Así, la fuerza de retención del resorte debe ser al menos de 350 N.

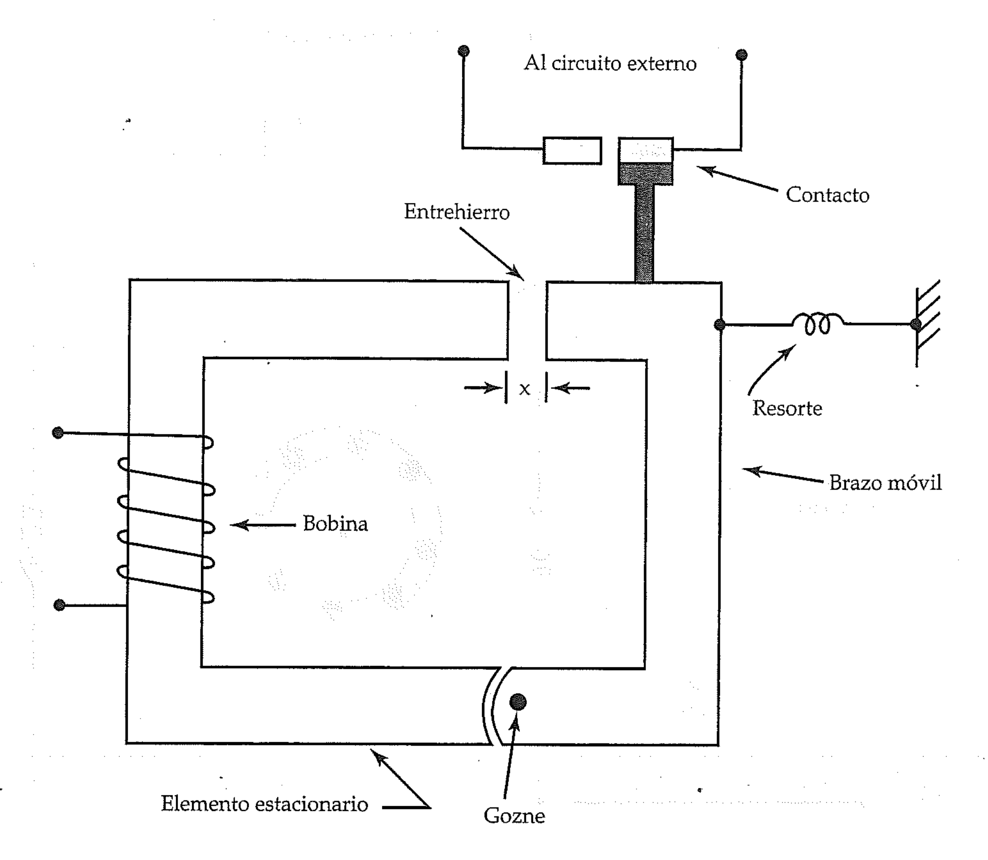


Figura 3.27. Relé normalmente abierto.

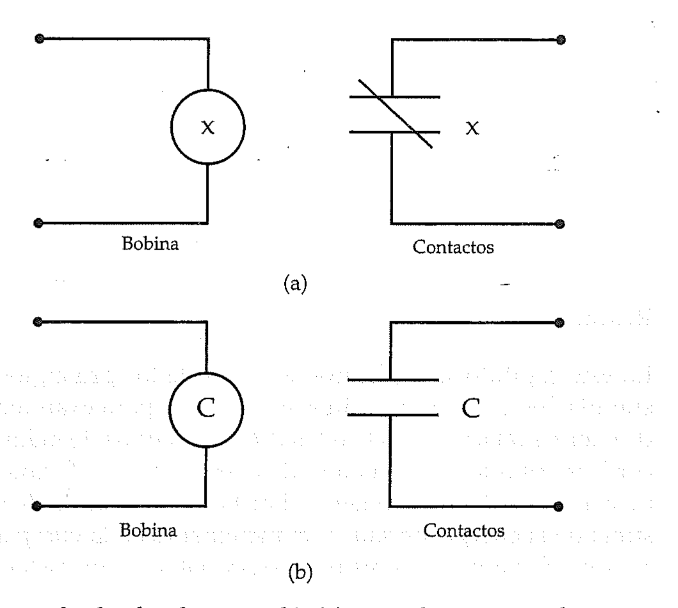


Figura 3.28. Diagramas de alambrado para relés **(a)** normalmente cerrados **y (b)** normalmente abiertos.

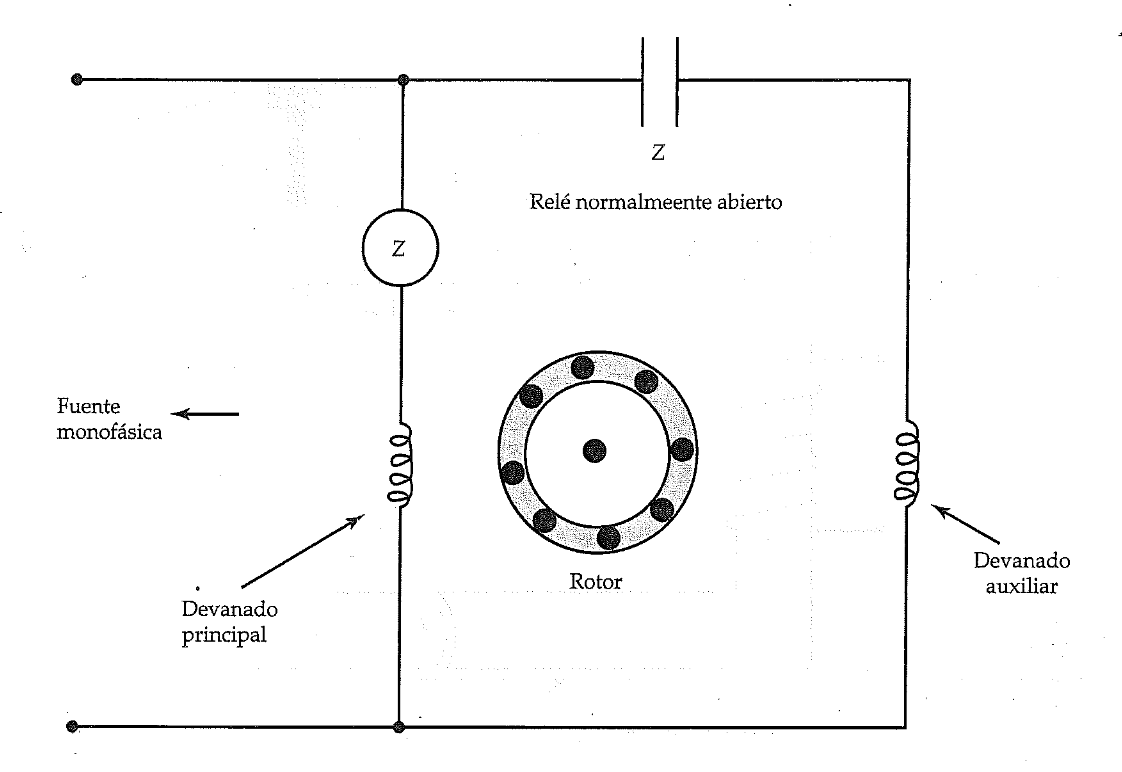


Figura 3.29. Motor de inducción monofásico con un relé normalmente abierto que opera en el momento en que el motor se conecta a una fuente monofásica.

Resumen

En este capítulo se explicaron algunos de los principios básicos de la conversión de energía, los cuales se usarán extensamente para examinar los procesos de conversión de energía relacionados con los diferentes tipos de máquinas. Un punto que ha de recordarse es que la conversión de energía de una forma en otra satisface el principio de conservación de la energía. Por tanto, la energía de entrada es siempre igual a la suma de la energía de salida, el incremento en la energía almacenada y la pérdida de energía. Si tal pérdida resulta despreciable en un sistema de conversión de energía, se dice que es un *sistema sin pérdidas*. En un sistema "de la vida real", siempre hay alguna pérdida de energía, por pequeña que sea.

Para la conversión de energía eléctrica es posible usar como medio un campo eléctrico o uno magnético. Sin embargo, la cantidad de energía que un equipo puede convertir con el campo eléctrico como medio es relativamente pequeña. Un condensador de placas paralelas es un buen ejemplo del proceso de conversión de energía que usa el campo eléctrico como medio. Si V es la diferencia de potencial entre las placas y x es la separación entre ellas, la fuerza de atracción entre las placas es

$$F_e = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

donde la capacitancia C es función de la distancia x entre las dos placas.

Cuando se precisa una gran cantidad de energía eléctrica, el campo magnético es el medio que debe elegirse. La fuerza magnética que actúa en una parte del circuito magnético está dada en términos de su inductancia como

$$F_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}$$

donde la inductancia L es función del desplazamiento lineal x.

En un sistema rotacional, la ecuación anterior se expresa comúnmente en términos del par como

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Cuando se hace girar una bobina de una sola vuelta en un campo magnético uniforme dirigido radialmente, la fem inducida en la bobina es

$$e = \Phi_P \omega \operatorname{sen} \omega t$$

donde

$$\omega = \frac{P}{2} \omega_m$$

es la frecuencia angular de la fem inducida, P es el número de polos y ω_m es la velocidad angular del rotor. En términos de la frecuencia de la fem inducida, la velocidad del rotor en rpm es

$$N_m = \frac{120f}{P}$$

Por otro lado, un conductor portador de corriente inmerso en un campo magnético experimenta una fuerza dada por

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Cuando se monta un conductor en la periferia del rotor, la fuerza magnética que actúa en el conductor ejerce un par sobre el rotor. Este par tiene la tendencia a hacer girar el rotor (acción motora).

Cuando el estator de un motor de inducción o síncrono está devanado con un devanado polifásico y se excita desde una fuente polifásica, establece un campo magnético que gira a velocidad síncrona. Para un motor de P polos, la velocidad síncrona (en rpm), es

$$N_s = \frac{120f}{P}$$

La intensidad del campo magnético giratorio es constante y está dada por

$$\Phi_r = \frac{n}{2}\Phi_m$$

donde n es el número de fases en el motor y Φ_m es el flujo máximo que produce cada una de ellas.

Un lazo cerrado (devanado de inducción) colocado en la periferia del rotor de un motor de inducción polifásico causa el giro del rotor en la dirección de la velocidad síncrona. Sin embargo, el rotor nunca puede girar a velocidad síncrona. Además del devanado de inducción, el rotor de un motor síncrono también tiene un devanado de campo, el cual, cuando se excita, permite que el rotor gire en sincronía con el campo giratorio.

Para las aplicaciones de par reducido, comúnmente se utiliza un motor de reluctancia como motor síncrono. El motor desarrolla el par porque su inductancia es función del desplazamiento angular del rotor.

Preguntas de repaso

3.1. Explique por qué son forzadas las cargas positivas hacia una dirección y las negativas hacia la otra cuando un conductor en movimiento se coloca en un campo magnético.

3.2. Si un conductor de longitud L se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, demuestre que la fem inducida entre sus dos extremos es $e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}$.

3.3. Si $\vec{v}$, $\vec{B}$ y $\vec{L}$ son mutuamente perpendiculares, demuestre que la fem inducida en un conductor es $e = BLv$.

3.4. Si β es el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{v}$, y α es el ángulo entre $\vec{L}$ y el plano que contiene a $\vec{v}$ y $\vec{B}$, demuestre que la fem inducida es $e = BLv \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$.

3.5. Explique el principio de operación de un generador de ca.

3.6. Explique el principio de operación de un generador de cc.

3.7. Explique la diferencia entre los anillos rozantes y un anillo bipartido.

3.8. ¿Qué es un conmutador?

3.9. ¿Cuál es la diferencia entre un generador y un motor?

3.10. Enuncie la ley de Faraday. ¿Está de acuerdo con ella la fem inducida en un conductor que se mueve en un campo magnético?

3.11. ¿Cuál es el efecto del número de polos en la fem inducida en un generador de ca?

3.12. ¿Qué efecto tiene el número de polos en la velocidad síncrona del campo giratorio?

3.13. ¿Por qué es necesario tener un devanado de campo de cc en el rotor de un motor síncrono?

3.14. ¿Es posible que un motor síncrono desarrolle un par de arranque en ausencia de un devanado de inducción?

3.15. ¿Cuál es la diferencia entre un devanado de inducción y el devanado de campo de un motor síncrono?

3.16. Si un conductor portador de corriente se coloca paralelo al campo magnético, ¿experimentará una fuerza? Dé las razones.

3.17. Cuando se coloca un conductor portador de corriente en un campo magnético uniforme, ¿qué sucede al campo en la cercanía del conductor? Bosqueje las líneas de campo para explicar su respuesta.

3.18. ¿Por qué no hay fem inducida en el devanado de inducción de un motor síncrono cuando el motor gira a su velocidad síncrona?

3.19. ¿Qué sucede cuando la velocidad de un motor síncrono con devanado de inducción tiende a disminuir de su valor síncrono?

3.20. ¿Qué ocurre cuando la velocidad de un motor síncrono con un devanado de inducción tiende a aumentar sobre su valor síncrono?

3.21. Si la superficie de la cara polar de un electroimán se disminuye ligeramente, ¿cuál será el efecto sobre su fuerza de elevación?

3.22. Si la superficie de la cara polar de un electroimán se incrementa ligeramente, ¿cuál será el efecto sobre su fuerza de elevación?

3.23. Si un motor de reluctancia tiene un rotor redondo, ¿se ejercerá un par sobre el rotor?

3.24. Si el devanado de campo de un motor de reluctancia lleva una corriente constante, ¿habrá un par promedio desarrollado por el motor?

3.25. ¿Cuál es la naturaleza de la corriente en la bobina de la armadura de un generador de cc?

3.26. La fem inducida e_{ab} entre los dos extremos abiertos a y b de una bobina aparece como fuente de voltaje v_{ab} para un circuito externo que puede conectarse a la bobina. Exprese v_{ab} en términos de e_{ab}.

3.27. Explique el desarrollo de un campo giratorio en un motor de inducción trifásico.

3.28. Explique el desarrollo de un campo giratorio en un motor de inducción bifásico.

3.29. ¿Realmente gira el campo en una máquina polifásica?

3.30. Explique el principio de operación de un motor de reluctancia.

3.31. Defina *deslizamiento*. Explique el deslizamiento por unidad y el deslizamiento porcentual.

3.32. Explique cómo se desarrolla el par en el rotor de un motor de inducción.

Problemas

3.1. La placa superior de un condensador de placas paralelas se mantiene fija, mientras que la inferior tiene libertad de movimiento. La superficie de cada placa es de 40 cm^2. La masa de cada placa es de 8 g. ¿Cuál debe ser la diferencia de potencial entre las placas para mantener una separación de 4 mm entre ellas? ¿Cuál es la energía eléctrica almacenada en el campo eléctrico?

3.2. Dos placas paralelas, que miden 20×20 cm, se mantienen con una separación de 5 mm entre ambas. Si la fuerza que experimenta cada placa es de 285 μN, ¿cuál debe ser la diferencia de potencial entre ellas? ¿Cuál es la energía almacenada en el campo eléctrico?

3.3. La energía almacenada en un condensador de placas paralelas es 30 mJ. La diferencia de potencial entre las placas es de 50 kV. Si la separación entre las

placas es de 4 mm, calcule *a*) la superficie de cada placa y *b*) la fuerza de atracción entre ellas.

3.4. El área de cada placa de un condensador de placas paralelas es de 50 cm^2. La diferencia de potencial entre las placas es de 50 kV. La masa de cada placa es de 100 g. Si la placa superior está fija y la inferior tiene libertad para moverse, ¿cuál debe ser la separación entre las dos placas para que se mantengan estacionarias?

3.5. La densidad de flujo magnético en el espacio libre es de 0.8 T. Calcule la densidad de energía en la región.

3.6. La energía almacenada en un circuito magnético está dada por $W_m = -5\ln\lambda - \lambda$. ¿Cuál es la relación entre la corriente aplicada y los concatenamientos de flujo? Calcule la inductancia del circuito magnético cuando la corriente es de 2 A.

3.7. Determine la fuerza que actúa sobre la parte móvil que se ilustra en la figura P3.7 cuando la bobina de 100 vueltas lleva una corriente de 20 A. La permeabilidad relativa del material magnético es 1000.

3.8. Un electroimán con permeabilidad relativa de 1000 y espesor uniforme de 10 cm tiene las dimensiones que se muestran en la figura P3.8. ¿Cuál debe ser la corriente en las bobinas conectadas en serie de modo que el electroimán se encuentre a punto de levantar una barra ferromagnética que tiene una permeabilidad de 300 y masa de 20 kg?

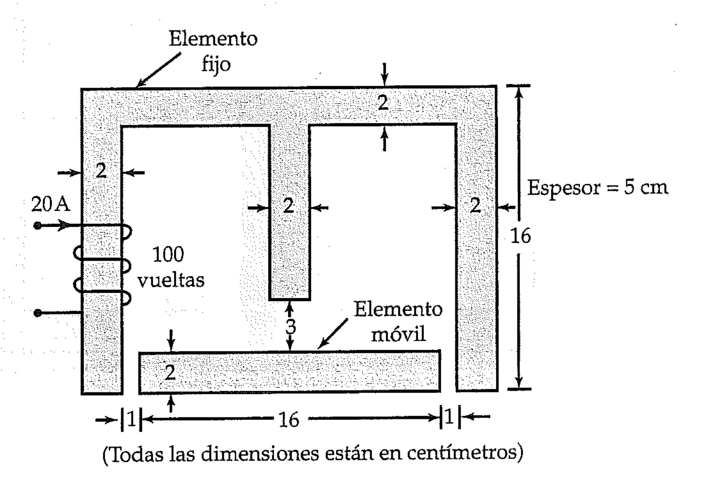


Figura P3.7. Circuito magnético para el problema 3.7.

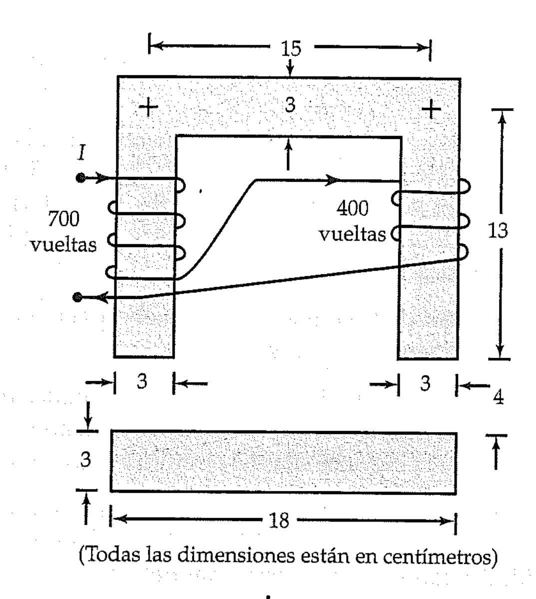


Figura P3.8. Electroimán para el problema 3.8.

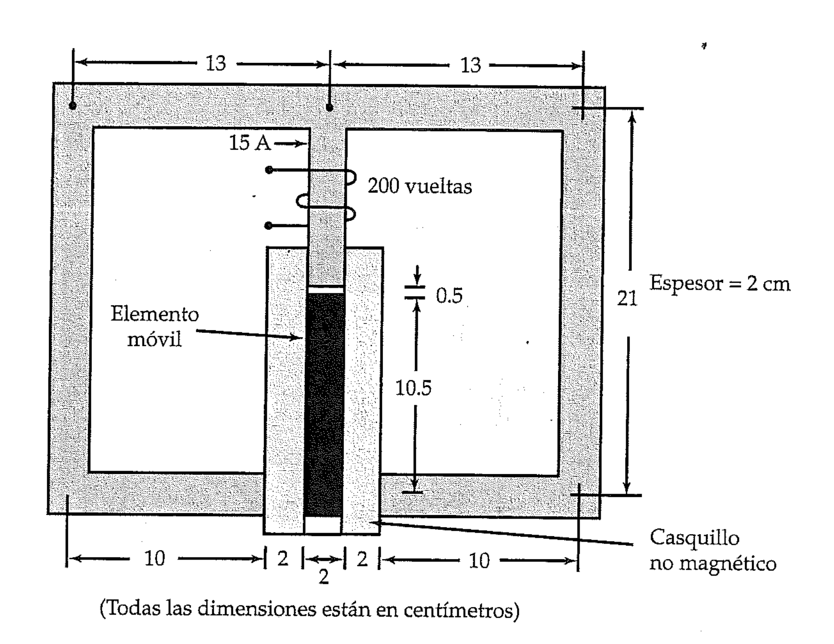


Figura P3.9. Émbolo magnético para el problema 3.9.

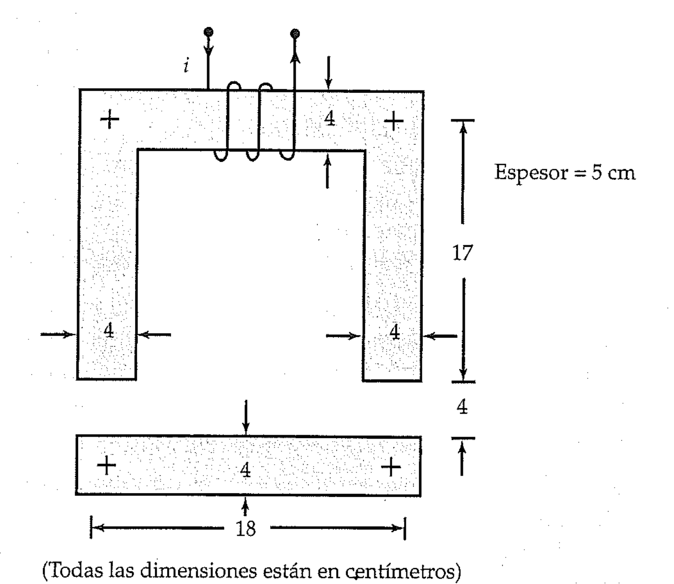


Figura P3.10. Electroimán para el problema 3.10.

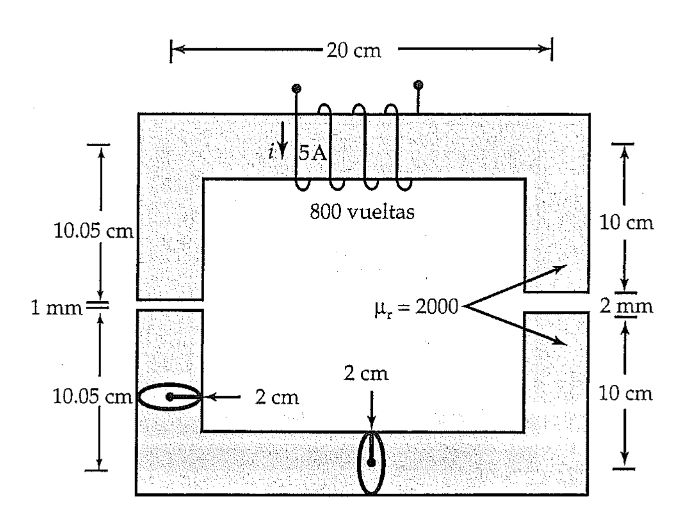


Figura P3.12. Circuito magnético para el problema 3.12.

3.9. En la figura P3.9 se muestra el circuito magnético de un émbolo. Determine *a*) los concatenamientos totales de flujo, *b*) la energía almacenada en el circuito magnético, y *c*) la fuerza que actúa sobre el émbolo. La permeabilidad relativa del material magnético es 1500.

3.10. La bobina de 400 vueltas del electroimán que se ilustra en la figura P3.10 conduce una corriente de 150 sen(377*t*) A. Bosqueje la fuerza que experimenta la barra magnética fija como función del tiempo. ¿Cuál es el valor promedio de la fuerza? La permeabilidad relativa del material magnético es 800.

3.11. Se necesita un electroimán con forma de U para elevar una barra de hierro que se encuentra a una distancia de 1 mm. El área de la sección transversal de cada polo es de 12 cm^2. La densidad de flujo en cada entrehierro es de 0.8 T. Si el material magnético es infinitamente permeable, ¿cuál será la fuerza ejercida por el imán sobre la barra de hierro?

3.12. En la figura P3.12 se muestra un circuito magnético con sección transversal circular uniforme. Calcule *a*) la fuerza que actúa sobre cada polo, *b*) la energía almacenada en cada entrehierro, *c*) la energía almacenada en la región magnética, y *d*) la energía total almacenada en el circuito magnético. Compruebe la energía total almacenada en el circuito magnético aplicando el concepto de inductancia.

3.13. En la figura P3.13 se indican las dimensiones de un electroimán cilíndrico en contacto estrecho con un disco de hierro de 2 cm de espesor. La densidad del hierro es 7.85 g/cm^3 y su permeabilidad relativa es 500. La permeabilidad relativa del electroimán es 2000. ¿Cuál debe ser la corriente en la bobina de 500 vueltas? También calcule la inductancia y la energía total almacenada en el sistema.

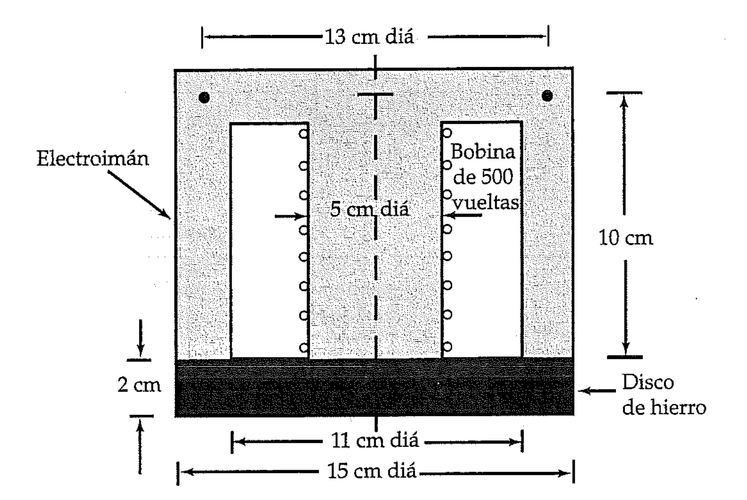


Figura P3.13. Electroimán cilíndrico para el problema 3.13.

3.14. Determine el número de polos de un generador de ca que opera a una velocidad de 2400 rpm si la frecuencia del voltaje inducido es de 120 Hz.

3.15. Determine la velocidad de rotación si la frecuencia de la fem inducida en una máquina de 12 polos es *a*) 25 Hz, *b*) 50 Hz, *c*) 60 Hz, *d*) 120 Hz, y *e*) 400 Hz.

3.16. Un conductor de 50 cm de largo pasa 20 veces por segundo bajo la cara polar de un imán cuadrado. Si cada lado del imán mide 20 cm de longitud y la densidad de flujo es de 0.5 T, encuentre la fem inducida en el conductor.

3.17. Una bobina de 200 vueltas gira a una velocidad de 3600 rpm en un generador tetrapolar. El flujo por polo es de 2 mWb. Calcule *a*) la frecuencia de la fem inducida, *b*) el valor máximo de la fem inducida, *c*) el valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida en un generador de ca, y *d*) el valor promedio de la fem inducida en un generador de cc.

3.18. El valor promedio de la fem inducida por conductor en un generador tetrapolar de cc es de 1.5 V. Si el valor promedio de la fem inducida es 240 V, encuentre el número de vueltas en la bobina. Si la bobina gira a una velocidad de 800 rpm, ¿cuál es el flujo por polo?

3.19. Determine la fuerza ejercida sobre el rotor de una máquina de cc por un conductor de 10 cm de largo cuando conduce una corriente de 100 A. La densidad de flujo magnético es 0.8 T.

3.20. Una tira de cobre de longitud L sostenida por un cojinete en un extremo está en libertad para girar a una velocidad angular de ω en un campo magnético

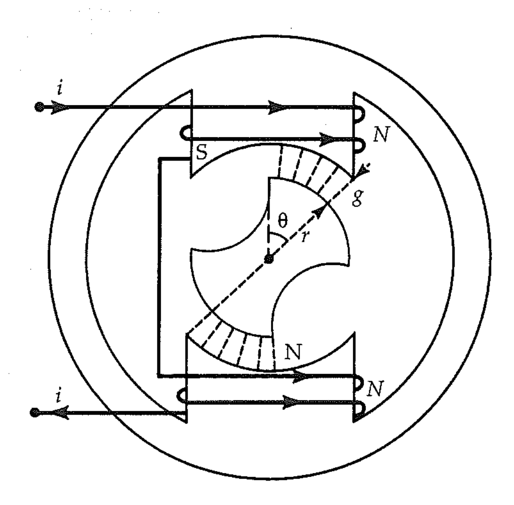


Figura P3.28. Motor de reluctancia para el problema 3.28.

uniforme. Si el campo es perpendicular al plano de la tira y la densidad de flujo es B_o, determine la fem inducida entre los dos extremos de la banda.

3.21. Una tira de cobre con una longitud de $2L$ sostenida por un cojinete en su punto medio gira con velocidad angular de ω en un campo magnético uniforme. La densidad de flujo es B_o. El plano de la tira es perpendicular al campo magnético. Determine la fem inducida *a*) entre sus puntos extremos y *b*) entre el punto medio y uno de sus extremos.

3.22. Un motor de inducción trifásico tetrapolar de 230 V y 60 Hz funciona a una velocidad de 1725 rpm cuando tiene carga plena. Determine *a*) la velocidad síncrona en rpm, *b*) la velocidad síncrona en rps, *c*) la velocidad síncrona en rad/s, *d*) el deslizamiento por unidad, y *e*) el deslizamiento porcentual.

3.23. Un generador (alternador) síncrono tiene 12 polos y se opera a 600 rpm. ¿Cuál es la frecuencia de la fem inducida?

3.24. ¿Cuál debe ser el número de polos en un motor síncrono de manera que el campo giratorio gire —valga la tautología— a la velocidad máxima cuando la frecuencia sea de 50 Hz?

3.25. Repita el problema 3.24 si la frecuencia es de 60 Hz.

3.26. El rotor de un motor de inducción trifásico hexapolar de 50 Hz y 208 V gira a una velocidad de 980 rpm. Calcule *a*) la velocidad síncrona, *b*) el deslizamiento por unidad, y *c*) el deslizamiento porcentual.

3.27. Un motor de inducción de 12 polos, 460 V y 50 Hz gira con un deslizamiento porcentual de 3%. Determine la velocidad del rotor.

3.28. Deduzca una expresión para el par del motor de reluctancia bipolar que se muestra en la figura P3.28. Suponga que *a*) toda la reluctancia del circuito magnético está en el entrehierro y *b*) el área efectiva de cada entrehierro es igual al área de traslape. Calcule el par cuando la bobina de 100 vueltas conduce 2 A, el diámetro del rotor es de 15 cm, la longitud del motor es de 10 cm, el ángulo de desplazamiento es de 30° y la longitud del entrehierro es de 2 mm.

3.29. La reluctancia de un motor bipolar está dada por

$$R(\theta) = 1500 - 850 \cos 2\theta \text{ H}^{-1}$$

Calcule el par desarrollado por el motor cuando la corriente en la bobina de 150 vueltas es de 5 A. Grafique el par como función de θ.

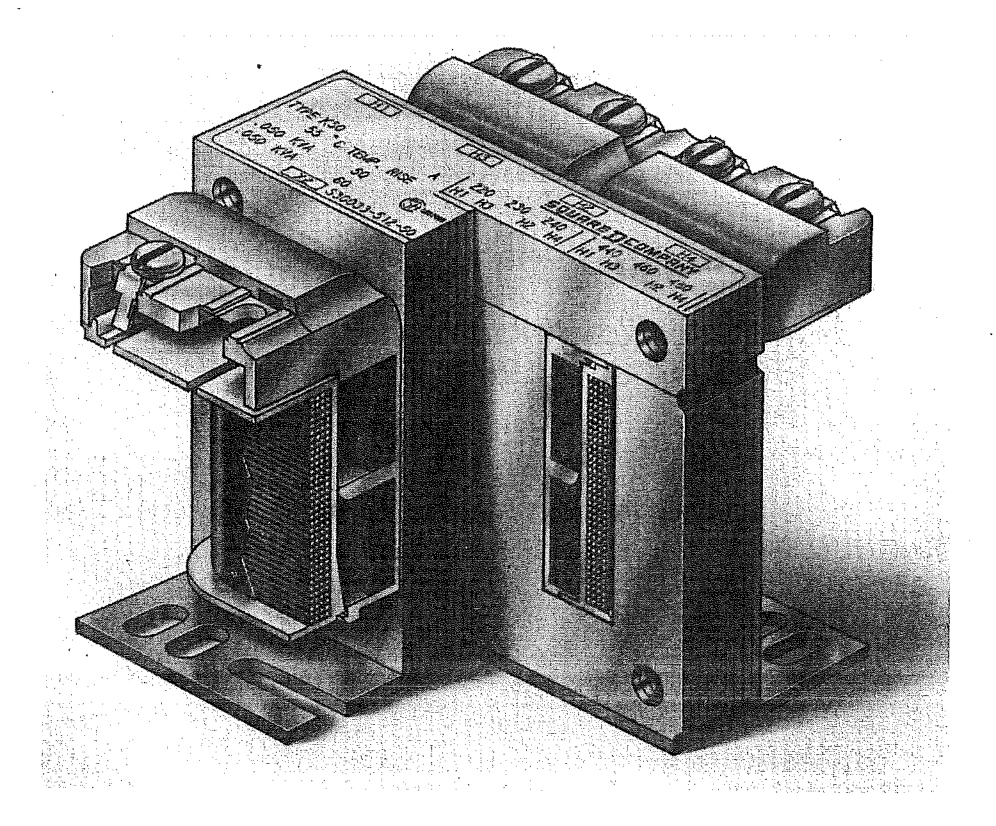
3.30. La inductancia de un motor de reluctancia bipolar está dada por

$$L(\theta) = 4 + 2\cos 2\theta + \cos 4\theta \text{ H}$$

Calcule el par desarrollado por el motor cuando la corriente en una bobina de 200 vueltas es de 10 A. Bosqueje el par que desarrolla el motor como función de θ.

4

Transformadores



Vista "en corte" de un transformador monofásico. (*Cortesía de Square D Company.*)

4.1. Introducción

Si se colocan dos bobinas eléctricamente aisladas en forma tal que el flujo variable en el tiempo producido por una de ellas ocasione una fuerza electromotriz (fem) que se inducirá en la otra, se dice que constituyen un *transformador*. En otras palabras, un transformador es un dispositivo que implica bobinas acopladas magnéticamente. Si sólo una parte del flujo que produce una de las bobinas se enlaza con la otra, se dice que las bobinas tienen *acoplamiento flojo*.[1] En este caso, la operación del transformador no es muy eficiente.

Con objeto de incrementar el acoplamiento entre las bobinas, éstas se devanan sobre un núcleo común. Si el núcleo está hecho de un material no magnético, se dice que se trata de un *transformador con núcleo de aire*. Cuando el núcleo está constituido por un material ferromagnético con permeabilidad relativamente alta, se trata de un *transformador con núcleo de hierro*. Un núcleo magnético sumamente permeable asegura que *a)* casi todo el flujo que crea una de las bobinas se enlaza con la otra y *b)* la reluctancia de la trayectoria magnética sea baja. Esto da como resultado una eficiencia de operación máxima del transformador.

En su forma más simple, un transformador consta de dos bobinas eléctricamente aisladas una de otra pero devanadas sobre el mismo núcleo magnético. Una corriente variable en el tiempo en una bobina establece en el núcleo magnético un flujo también variable en el tiempo. Debido a la elevada permeabilidad del núcleo, la mayor parte del flujo se enlaza con la otra bobina e induce en ella una fem variable en el tiempo (voltaje). La frecuencia de la fem inducida en la otra bobina es la misma que la de la corriente en la primera bobina. Si se conecta la otra bobina a una carga, la fem inducida en la bobina establece en ella una corriente. Así, la energía se transfiere de una bobina a otra por medio del flujo magnético en el núcleo.

La bobina a la que la fuente suministra la fuerza se llama *devanado primario*. La bobina que envía fuerza a la carga se denomina *devanado secundario*. Cualquiera de los devanados puede conectarse a la fuente o a la carga.

Como la fem inducida en una bobina es proporcional al número de vueltas que tiene, es posible que haya un voltaje más elevado a través del devanado secundario que el aplicado al primario. En tal caso se habla de un *transformador elevador*, el cual se usa para conectar una línea de transmisión de voltaje relativamente alto a un generador de voltaje relativamente bajo. En el caso opuesto, un *transformador reductor* tiene un voltaje más bajo en el lado secundario. Un ejemplo de un transformador reductor es uno para soldadura, cuyo devanado secundario está diseñado para suministrar una corriente elevada a la carga.

Cuando el voltaje que se aplica al primario es igual a la fem inducida en el secundario, se dice que el transformador tiene una *razón uno a uno*. Un transformador con razón uno a uno se emplea básicamente para aislar en forma eléctrica el lado secundario del primario. Un transformador semejante recibe el nombre de *transformador de aislamiento*, y se utiliza para aislar corriente continua (cc). Es decir, si el voltaje

[1] Cuando la mayor parte del flujo producido por una bobina enlaza a la otra, se dice que el acoplamiento es rígido. (N. del R. T.)

de entrada en el lado primario consta de ambas componentes de corriente, corriente continua (cc) y corriente alterna (ca), el voltaje en el lado secundario tendrá naturaleza de ca pura.

4.2. Construcción de un transformador

A fin de mantener al mínimo la pérdida en el núcleo, éste se construye con laminaciones delgadas de material ferromagnético sumamente permeable, como la lámina de acero al silicio. Se usa acero al silicio por sus propiedades de no envejecimiento y de pérdidas magnéticas bajas. El espesor de la laminación va de 0.014 a 0.024 pulgadas. En ambas caras de la laminación se aplica un recubrimiento delgado de barniz aislante para proporcionar una resistencia alta entre las laminaciones. El proceso de cortar las laminaciones al tamaño adecuado ocasiona esfuerzos por troquelado y corte. Estos esfuerzos causan un aumento en la pérdida del núcleo. A fin de eliminar los esfuerzos por troquelado y corte, las laminaciones se sujetan durante cierto tiempo a temperaturas elevadas en un ambiente controlado. Esto se conoce como *proceso de revenido.*

Básicamente, hay dos tipos de construcción de transformadores: de *tipo acorazado* o *concha* y de *tipo núcleo*. En la construcción del transformador de tipo acorazado, los dos devanados suelen efectuarse en la misma rama del núcleo magnético, como se muestra en la figura 4.1. En un transformador de tipo núcleo (fig. 4.2) cada devanado puede incluso dividirse y devanarse en ambas ramas del núcleo rectangular. Los nombres *tipo acorazado* y *tipo núcleo* se deben a que en el primero el transformador encierra a los devanados, mientras que en el segundo son éstos los que encierran al núcleo.

Para aplicaciones de potencia relativamente baja con especificaciones de voltaje moderadas, los devanados pueden arrollarse en forma directa sobre el núcleo del transformador. Sin embargo, para los transformadores de alto voltaje, potencia elevada, o ambos, las bobinas generalmente se devanan primero y después se ensamblan en el núcleo.

En un transformador, tanto la pérdida en el núcleo (pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas) como en el cobre (pérdida eléctrica) generan calor, el cual a su vez incrementa la temperatura de operación del transformador. Para aplicaciones de baja

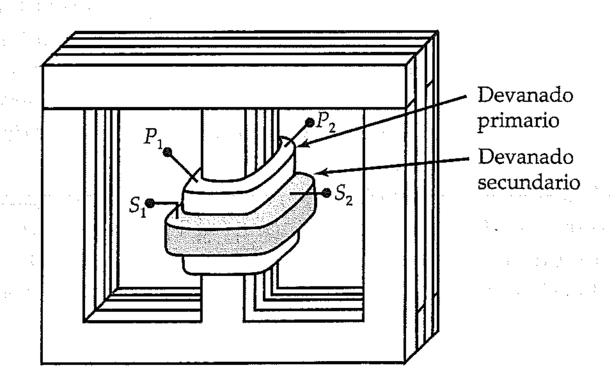


Figura 4.1. Transformador tipo acorazado.

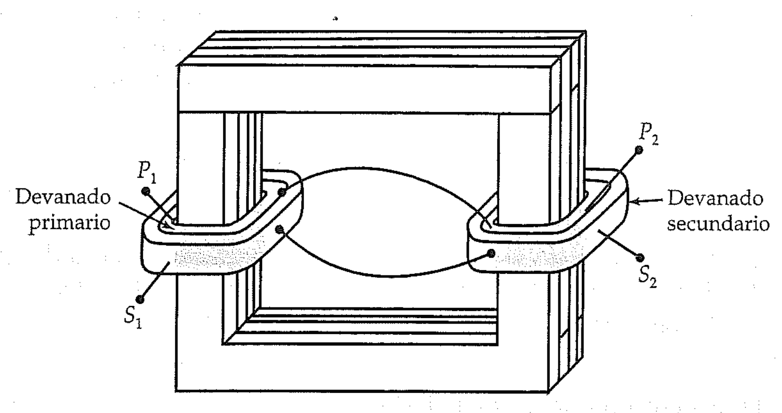


Figura 4.2. Transformador tipo núcleo.

potencia, la circulación natural del aire podría ser suficiente para mantener la temperatura del transformador dentro de un límite aceptable. Si el incremento de temperatura no puede controlarse mediante la circulación natural del aire, es posible enfriar el transformador forzando la circulación de aire entre el núcleo y los devanados. Si tampoco basta la circulación forzada de aire, es posible sumergir el transformador en aceite especial para transformador, el cual conduce el calor a las paredes del tanque que lo contiene. A fin de incrementar la superficie de radiación del tanque, puede dotársele de aletas soldadas, o bien construirlo con lámina de acero corrugado. Éstos son algunos de los métodos que se usan para limitar el exceso de temperatura en un transformador.

4.3. El transformador ideal

En la figura 4.3 se muestra un transformador con dos devanados que operan cada uno como parte de un circuito eléctrico diferente. Sean N_1 y N_2 el número de vueltas en los devanados primario y secundario. El devanado primario está conectado a una fuente

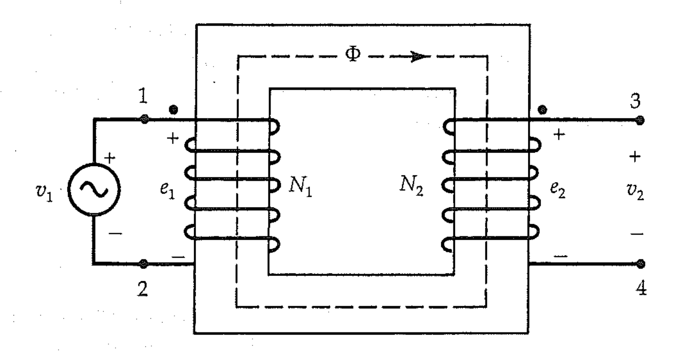


Figura 4.3. Transformador ideal sin carga.

de voltaje variable en el tiempo v_1, mientras que el devanado secundario se dejó abierto. Para entenderlo mejor, considérese primero un transformador ideal en el que no hay pérdidas ni flujo de dispersión. En otras palabras, se postula lo siguiente:

1. El núcleo del transformador es sumamente permeable, en el sentido de que requiere una fuerza magnetomotriz (fmm) pequeñísima para establecer el flujo Φ que se muestra en la figura.
2. En el núcleo no se aprecian corrientes parásitas ni pérdidas por histéresis.
3. Todo el flujo está restringido a circular dentro del núcleo.
4. La resistencia de cada devanado es despreciable.

De acuerdo con la ley de la inducción de Faraday, el flujo magnético Φ en el núcleo induce una fem e_1 en el devanado primario que se opone al voltaje aplicado v_1. Para las polaridades del voltaje aplicado y la fem inducida, según se indica en la figura para el devanado primario, es posible escribir

$$e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \tag{4.1}$$

En forma semejante, la fem inducida en el devanado secundario es:

$$e_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{4.2}$$

con su polaridad según se aprecia en la figura.

En el caso ideal supuesto, las fem inducidas e_1 y e_2 son iguales a los voltajes en las terminales v_1 y v_2, respectivamente. Luego, de las ecuaciones 4.1 y 4.2 se obtiene

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} \tag{4.3}$$

que establece que *la relación entre las fem inducidas primaria a secundaria es igual a la relación entre el número de vueltas del primario y el secundario.*

Es práctica común definir la relación entre las vueltas del primario al secundario como *relación a*, o *relación de transformación*. Es decir,

$$\frac{N_1}{N_2} = a \tag{4.4}$$

Sea i_2 la corriente a través del devanado secundario cuando se conecta a una carga, como aparece en la figura 4.4. La magnitud de i_2 depende de la impedancia de la carga; sin embargo, su dirección es tal que tiende a debilitar el flujo en el núcleo Φ y

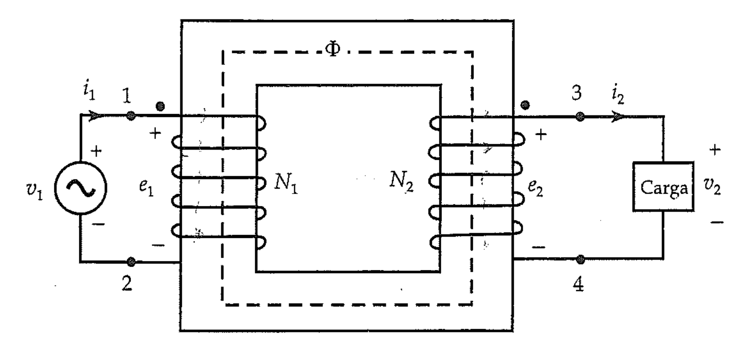


Figura 4.4. Transformador ideal con carga.

a disminuir la fem inducida en el primario e_1. Para el transformador ideal, e_1 siempre debe ser igual a v_1. En otras palabras, el flujo en el núcleo siempre debe ser igual a su valor original sin carga. Con objeto de restablecer el flujo en el núcleo a su valor original sin carga, la fuente v_1 establece una corriente i_1 en el devanado primario, como se indica en la figura. De acuerdo con nuestros supuestos, la fmm de la corriente primaria $N_1 i_1$ debe ser igual y opuesta a la fmm de la secundaria $N_2 i_2$. Es decir,

$$N_1 i_1 = N_2 i_2$$

o

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} = a \tag{4.5}$$

que establece que *las corrientes primaria y secundaria se transforman en relación inversa al número de vueltas.*

Con base en las ecuaciones 4.3 y 4.5 es claro que

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \tag{4.6}$$

Esta ecuación confirma simplemente nuestro supuesto de que no hay pérdidas en un transformador ideal. Destaca el hecho de que en cualquier instante *la potencia de salida (suministrada a la carga) es igual a la potencia de entrada (suministrada por la fuente).*

Para las variaciones senoidales en el voltaje aplicado, el flujo magnético en el núcleo también varía senoidalmente, en condiciones ideales. Si el flujo en el núcleo en cualquier instante t está dado como

$$\Phi = \Phi_m \operatorname{sen} \omega t$$

donde Φ_m es la amplitud del flujo y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular; entonces la fem inducida en el primario es

$$e_1 = N_1 \omega \Phi_m \cos \omega t$$

La ecuación anterior puede expresarse en forma fasorial en términos de su valor medio cuadrático (rms, *root mean square*) o valor efectivo como

$$\tilde{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} N_1 \omega \Phi_m \underline{/0^\circ} = 4.44 f N_1 \Phi_m \underline{/0^\circ} \tag{4.7}$$

Asimismo, la fem inducida en el devanado secundario es

$$\tilde{E}_2 = 4.44 f N_2 \Phi_m \underline{/0^\circ} \tag{4.8}$$

Con base en las ecuaciones 4.7 y 4.8 se obtiene

$$\frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_2} = \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \tag{4.9}$$

donde $\tilde{V}_1 = \tilde{E}_1$ y $\tilde{V}_2 = \tilde{E}_2$ en condiciones ideales. De la ecuación anterior es evidente que las fem inducidas se encuentran en fase. *Para un transformador ideal, los voltajes en las terminales también están en fase.*

De los requerimientos para la fmm también es posible deducir que

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = a \tag{4.10}$$

donde $\tilde{I}_1$ e $\tilde{I}_2$ son las corrientes en forma de fasor a través de los devanados primario y secundario. *La ecuación anterior define que para un transformador ideal $\tilde{I}_1$ e $\tilde{I}_2$ deben estar en fase.*

La ecuación 4.6 también puede expresarse en términos de cantidades fasoras como

$$\tilde{V}_1 \tilde{I}_1^* = \tilde{V}_2 \tilde{I}_2^* \tag{4.11}$$

Es decir, *la potencia compleja que suministra la fuente al devanado primario es igual a la potencia compleja que suministra el devanado secundario a la carga.* En términos de las potencias aparentes, la ecuación anterior se transforma en

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \tag{4.12}$$

Si $\hat{Z}_2$ es la impedancia de la carga en el lado secundario, entonces

$$\hat{Z}_2 = \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{I}_2} = \frac{1}{a^2}\frac{\tilde{V}_1}{\tilde{I}_1}$$

$$= \frac{1}{a^2}\hat{Z}_1$$

o

$$\hat{Z}_1 = a^2\hat{Z}_2 \tag{4.13}$$

donde $\hat{Z}_1 = \tilde{V}_1/\tilde{I}_1$ es la impedancia de la carga referida al lado primario. La ecuación 4.13 establece que *la impedancia de la carga como la observa la fuente en el lado primario es igual a a^2 veces la impedancia real de la carga en el lado secundario.* Esta ecuación indica que un transformador también puede utilizarse para equiparar las impedancias. Una impedancia conocida puede aumentarse o disminuirse para que concuerde con el resto del circuito a fin de lograr una transferencia de potencia máxima.

Polaridad del transformador

Un transformador puede tener devanados múltiples conectados en serie, para incrementar el voltaje de especificación, o en paralelo, para aumentar la corriente especificada. Sin embargo, antes de hacer las conexiones es necesario conocer la polaridad de cada devanado. Se entiende por polaridad la dirección relativa de la fem inducida en cada devanado.

Examinemos al transformador que se muestra en la figura 4.4. Sea la polaridad de la fuente variable en el tiempo conectada al devanado primario, en cualquier instante, la que se indica en la figura. Puesto que la fem inducida e_1 en el primario de un transformador ideal debe ser igual y opuesta al voltaje aplicado v_1, la terminal 1 del primario es positiva respecto de la terminal 2. La dirección del arrollamiento del devanado primario, según se aprecia en la figura, es responsable de la dirección dextrógira del flujo Φ en el núcleo del transformador. Este flujo debe inducir una fem e_2 en el devanado secundario, que resulta en la corriente i_2, como se indica. La dirección de la corriente i_2 es tal que produce un flujo que se opone al cambio en el flujo original Φ. Para la dirección del arrollamiento del devanado secundario, como se aprecia en la figura, la terminal 3 debe ser positiva respecto de la terminal 4. Como la terminal 3 tiene la misma polaridad que la 1, se dice que una sigue a la otra. En otras palabras, las terminales 1 y 3 tienen igual polaridad. Se colocaron puntos en esas terminales para indicar su relación de igual polaridad.

Especificaciones del transformador

La placa de identificación de un transformador provee la información sobre la potencia aparente y capacidad de manejo de voltaje de cada devanado. De los datos de

una placa que dice: transformador reductor, 5 kVA, 500/250 V, se concluye lo siguiente:

1. La carga plena o especificación de potencia nominal del transformador es de 5 kVA, es decir, el transformador puede suministrar 5 kVA continuamente.
2. Como se trata de un transformador reductor, el voltaje primario (nominal) es $V_1 = 500$ V y el secundario (nominal) es $V_2 = 250$ V.
3. Las magnitudes nominales de las corrientes primaria y secundaria a plena carga son

$$I_1 = \frac{5000}{500} = 10 \text{ A}$$

e

$$I_2 = \frac{5000}{250} = 20 \text{ A}$$

4. Como el fabricante no suele proporcionar la información sobre el número de vueltas, la relación a se determina con base en los voltajes terminales (nominales), de este modo

$$a = \frac{500}{250} = 2$$

Ejemplo 4.1

El núcleo de un transformador de dos devanados como el que se muestra en la figura 4.5*a* está sujeto a la variación de flujo que se indica en la figura 4.5*b*. ¿Cuál es la fem inducida en cada devanado?

• Solución

Puesto que las polaridades se encuentran marcadas en los devanados, se aprecia que las terminales b y c tienen polaridad igual. Para el intervalo de tiempo de 0 a 0.06 s, el flujo magnético se incrementa linealmente como

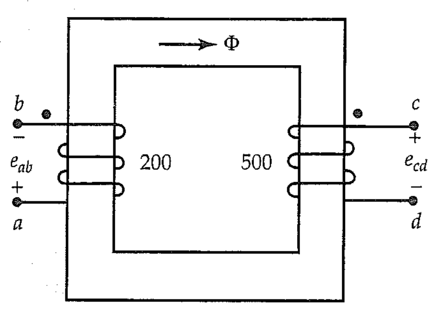
$$\Phi = 0.15\, t \text{ Wb}$$

Luego, la fem inducida entre las terminales a y b es

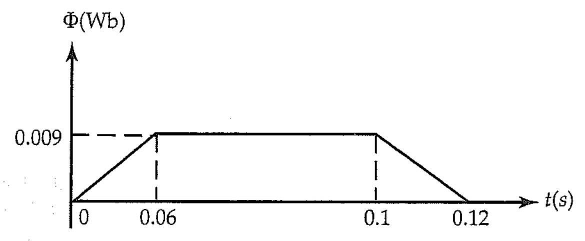
$$e_{ab} = -e_{ba} = -N_{ab}\frac{d\Phi}{dt} = -200 \times 0.15 = -30 \text{ V}$$

y la fem inducida entre las terminales c y d es

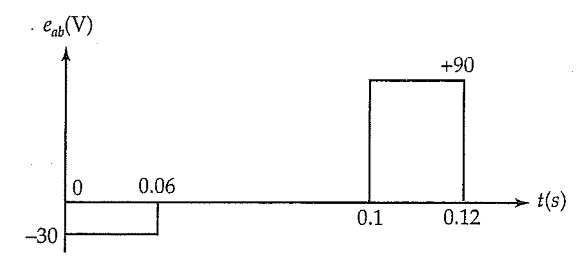
$$e_{cd} = N_{cd}\frac{d\Phi}{dt} = 500 \times 0.15 = 75 \text{ V}$$



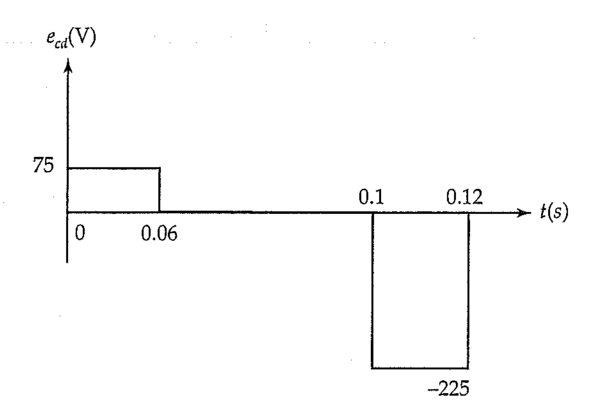
(a) Transformador ideal.



(b) Variaciones de flujo en el núcleo del transformador que se muestra en el inciso (a).



(c) Voltaje inducido e_{ab} como función del tiempo.



(d) Voltaje inducido e_{cd} como función del tiempo.

Figura 4.5. Transformador ideal y formas de onda relacionadas, para el ejemplo 4.1.

Entre 0.06 y 0.1 s, las fem inducidas valen cero, puesto que no existe variación en el flujo. En el intervalo de tiempo de 0.1 a 0.12 s, la tasa de cambio del flujo es −0.45 Wb/s. Por tanto, las fem inducidas son

$$e_{ab} = -200 \times (-0.45) = 90 \text{ V} \quad \text{y} \quad e_{cd} = 500 \times (-0.45) = -225 \text{ V}$$

Las ondas para las fem inducidas se ilustran en las figuras 4.5*c* y *d* para los devanados primario y secundario, respectivamente.

■

Ejemplo 4.2

Un transformador ideal tiene un primario de 150 vueltas y uno secundario de 750. El primario está conectado a una fuente de 240 V y 50 Hz. El devanado secundario alimenta una carga de 4 A con un factor de potencia en atraso (fp) de 0.8. Determine *a)* la relación *a*, *b)* la corriente en el primario, *c)* la potencia suministrada a la carga, y *d)* el flujo en el núcleo.

- **Solución**

a) La relación *a* es: $a = 150/750 = 0.2$

b) Puesto que $I_2 = 4$ A, la corriente en el primario es

$$I_1 = \frac{I_2}{a} = \frac{4}{0.2} = 20 \text{ A}$$

c) El voltaje en el lado secundario es

$$V_2 = \frac{V_1}{a} = \frac{240}{0.2} = 1200 \text{ V}$$

Luego, la potencia suministrada a la carga es

$$P_L = V_2 I_2 \cos\theta = 1200 \times 4 \times 0.8 = 3840 \text{ W}$$

d) El flujo máximo en el núcleo es

$$\Phi_m = \frac{E_1}{4.44 f N_1} = \frac{V_1}{4.44 f N_1} = \frac{240}{4.44 \times 50 \times 150} = 7.21 \text{ mWb}$$

■

Ejercicios

4.1. La densidad de flujo magnético en el núcleo de un transformador reductor de 4.4 kVA, 4400/440 V y 50 Hz es de 0.8 T (rms). Si la fem inducida por vuelta es de 10 V, determine *a)* el número de vueltas en los devanados primario y secundario, *b)* el área de la sección transversal del núcleo, y *c)* la corriente a plena carga en cada devanado.

4.2. Una bobina de 200 vueltas está sumergida en un flujo de 60 Hz con valor efectivo de 4 mWb. Obtenga una expresión para el valor instantáneo de la fem inducida. Si se conecta un voltímetro entre sus dos extremos, ¿cuál será su lectura?

4.3. El número de vueltas en el primario y secundario de un transformador ideal son 200 y 500, respectivamente. El transformador tiene las especificaciones de 10 kVA, 250 V y 60 Hz en el lado primario. El área de la sección transversal del núcleo es de 40 cm^2. Si el transformador opera a plena carga con un factor de potencia de 0.8 en atraso, determine *a)* la densidad de flujo efectivo en el núcleo, *b)* la especificación del voltaje del secundario, *c)* las corrientes en los devanados primario y secundario, y *d)* la impedancia de la carga en el lado secundario como se observa desde el lado primario.

4.4. El transformador no ideal

En la sección previa se establecieron muy pocas restricciones para obtener relaciones útiles para un transformador ideal. En esta sección nuestro objetivo es aumentar las restricciones para desarrollar el circuito equivalente para un transformador no ideal.

Resistencia del devanado

Todo devanado presenta alguna resistencia, sin importar cuán pequeña pueda ser. No obstante, es posible reemplazar un transformador no ideal por otro ideal agregando una resistencia en serie con cada devanado, igual a la resistencia de éste. Como se observa en la figura 4.6, R_1 y R_2 son las resistencias de los devanados primario y secundario, respectivamente. La inclusión de las resistencias de los devanados define que *a)* la potencia de entrada debe ser mayor que la potencia de salida, *b)* el voltaje en las terminales no es igual a la fem inducida, y *c)* la eficiencia (la razón de la potencia de salida a la potencia de entrada) de un transformador no ideal es menor que 100%.

Flujos de dispersión

No todo el flujo que crea un devanado se confina al núcleo magnético en el que está devanado. Una parte del flujo, conocida como *flujo de dispersión*, sigue su camino a través del aire. Por tanto, cuando ambos devanados de un transformador conducen

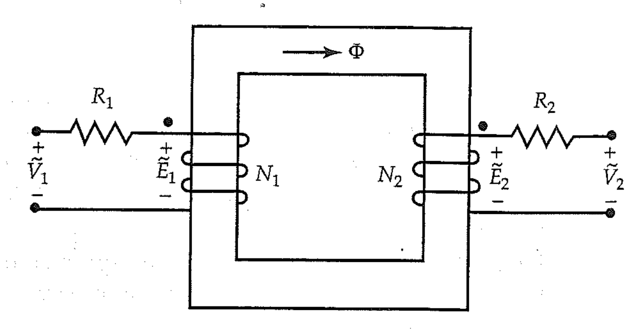


Figura 4.6. Transformador ideal con resistencias del devanado modeladas como resistencias agregadas.

corrientes, cada uno crea su propio flujo de dispersión, como se ilustra en la figura 4.7. El *flujo de dispersión primario*, establecido por el primario, no enlaza al secundario. De manera similar, el *flujo de dispersión secundario* se restringe al secundario y no enlaza al primario. El flujo común que circula en el núcleo y llega a ambos devanados se denomina *flujo mutuo*.

Aunque el flujo de dispersión es una pequeña fracción del flujo total que crea un devanado, afecta el rendimiento del transformador. Es posible modelar un devanado como si constara de dos devanados: uno responsable de crear el flujo de dispersión hacia el aire y el otro de circundar el núcleo. En la figura 4.8 se describe una disposición hipotética de los devanados en la forma descrita para un transformador de dos devanados. Como puede observarse, los dos devanados que envuelven al núcleo satisfacen las condiciones de un transformador ideal.

El flujo de dispersión asociado con cualquier devanado es responsable de la caída de voltaje a través de él. Por tanto, es posible representar la caída de voltaje debida al flujo de dispersión con una *reactancia de dispersión*, como se explicó en el capítulo 2. Si X_1 y X_2 son las reactancias de dispersión de los devanados primario y secundario, un transformador práctico puede representarse en términos de un transformador ideal con resistencias de devanado y reactancias de dispersión, según se ilustra en la figura 4.9.

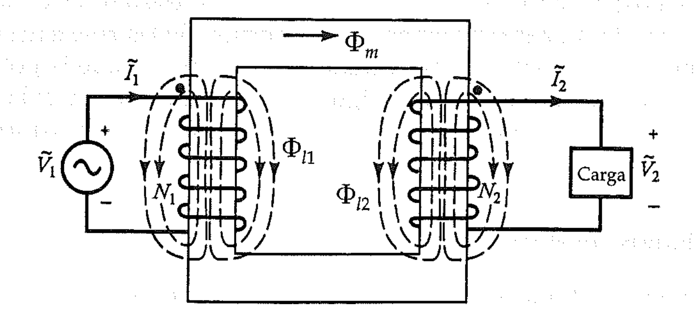


Figura 4.7. Transformador con flujos de dispersión y flujo mutuo.

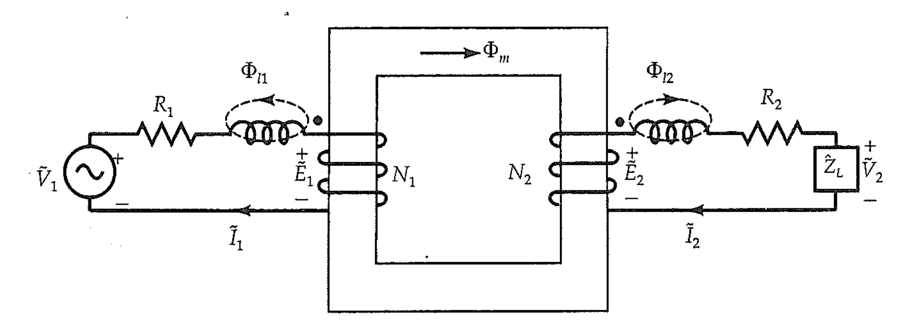


Figura 4.8. Devanados hipotéticos que muestran los flujos de dispersión y mutuo por separado.

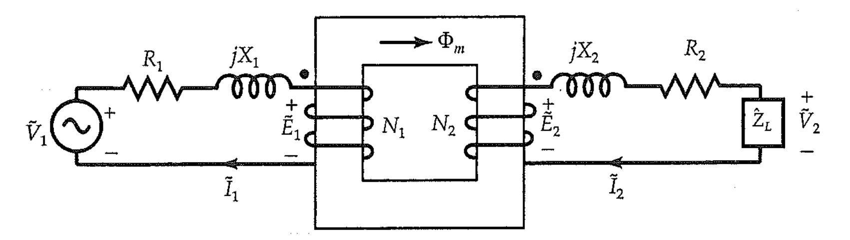


Figura 4.9. Transformador no ideal representado en términos de un transformador ideal con resistencias del devanado y reactancias de dispersión.

En el caso de un transformador no ideal,

$$\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_2} = \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

$$\tilde{V}_1 = \tilde{E}_1 + (R_1 + jX_1)\,\tilde{I}_1$$

y

$$\tilde{V}_2 = \tilde{E}_2 - (R_2 + jX_2)\,\tilde{I}_2$$

Obsérvese que en un transformador no ideal, $\tilde{V}_1 \neq \tilde{E}_1$ y $\tilde{V}_2 \neq \tilde{E}_2$. El ejemplo siguiente muestra cómo calcular el voltaje en las terminales y la eficiencia de un transformador con esas características.

Ejemplo 4.3

Un transformador reductor de 23 kVA, 2 300/230 V y 60 Hz tiene los valores siguientes de resistencia y reactancia de dispersión: $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 0.04\ \Omega$, $X_1 = 12\ \Omega$, y $X_2 = 0.12\ \Omega$. El transformador opera a 75% de su carga especificada. Si el factor de potencia de la carga es de 0.866 en adelanto, determine la eficiencia del transformador.

- Solución

Puesto que el transformador opera a 75% de su carga especificada, el valor efectivo de la corriente en el devanado secundario es

$$I_2 = \frac{23\,000}{230} \times 0.75 = 75 \text{ A}$$

Si se toma como referencia el voltaje de la carga, la corriente de la carga con un factor de potencia de 0.866 en adelanto, en forma de fasor, es

$$\tilde{I}_2 = 75\underline{/30°} \text{ A}$$

La impedancia del devanado secundario es

$$\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 0.04 + j0.12 \, \Omega$$

La fem inducida en el devanado secundario es

$$\tilde{E}_2 = \tilde{V}_2 + \tilde{I}_2\hat{Z}_2 = 230 + (75\underline{/30°})(0.04 + j0.12)$$
$$= 228.287\underline{/2.33°} \text{ V}$$

Como la relación de transformación es

$$a = \frac{2300}{230} = 10$$

es posible determinar la fem inducida y la corriente en el lado primario como

$$\tilde{E}_1 = a\tilde{E}_2 = 2282.87\underline{/2.33°} \text{ V}$$

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{I}_2}{a} = 7.5\underline{/30°} \text{ A}$$

La impedancia del devanado primario es

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 4 + j12 \, \Omega$$

Luego, el voltaje de la fuente debe ser

$$\tilde{V}_1 = \tilde{E}_1 + \tilde{I}_1\hat{Z}_1 = 2282.87\underline{/2.33°} + (7.5\underline{/30°})(4 + j12)$$
$$= 2269.578\underline{/4.7°} \text{ V}$$

La potencia suministrada a la carga es

$$P_o = \text{Re}\left[\tilde{V}_2\tilde{I}_2^*\right] = \text{Re}[230 \times 75\underline{/-30°}\,] = 14\,938.94 \text{ W}$$

La potencia de entrada es

$$P_{in} = \text{Re}\left[\tilde{V}_1\tilde{I}_1^*\right] = \text{Re}[(2269.578\underline{/4.7°})(7.5\underline{/-30°})] = 15\,389.14 \text{ W}$$

La eficiencia del transformador es

$$\eta = \frac{P_o}{P_{in}} = \frac{14\,938.94}{15\,389.14} = 0.971 \quad \text{o} \quad 97.1\%$$

■

Permeabilidad finita

El núcleo de un transformador no ideal tiene permeabilidad finita y pérdida en el núcleo. Por tanto, aun cuando se deje abierto el secundario (condición de no carga), el devanado primario toma de la fuente algo de corriente, conocida como *corriente de excitación.* Es práctica común suponer que la corriente de excitación, $\tilde{I}_\phi$, es la suma de dos corrientes: la *corriente de pérdida en el núcleo,* $\tilde{I}_c$, y la *corriente de magnetización,* $\tilde{I}_m$. Es decir,

$$\tilde{I}_\phi = \tilde{I}_c + \tilde{I}_m \tag{4.14}$$

La componente de pérdida en el núcleo de la corriente de excitación explica la pérdida magnética (pérdida por histéresis y por corrientes parásitas) en el núcleo del transformador. Si $\tilde{E}_1$ es la fem inducida en el lado primario y R_{c1} es la resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo, se tiene que la corriente de pérdida en el núcleo, $\hat{I}_c$, es

$$\tilde{I}_c = \frac{\tilde{E}_1}{R_{c1}} \tag{4.15}$$

La componente de magnetización de la corriente de excitación es responsable de establecer el flujo mutuo en el núcleo. Como una bobina que porta corriente forma un inductor, la corriente de magnetización, $\tilde{I}_m$, da lugar a una *reactancia de magnetización,* X_{m1}. Luego,

$$X_{m1} = \frac{\tilde{E}_1}{j\tilde{I}_m} \tag{4.16}$$

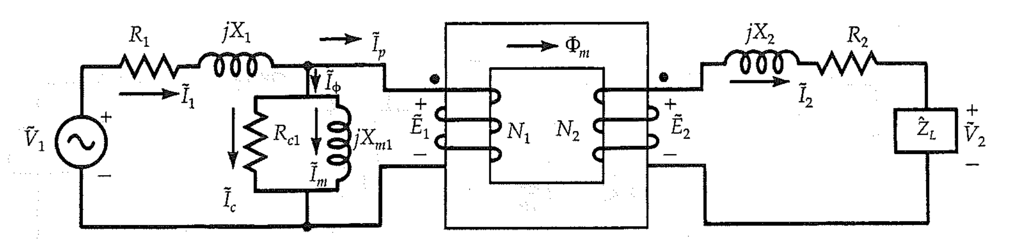


Figura 4.10. Circuito equivalente de un transformador que incluye resistencias del devanado, reactancia de dispersión, resistencia de pérdida en el núcleo, reactancia de magnetización y un transformador ideal.

Ahora es posible modificar el circuito equivalente de la figura 4.9 para que incluya la resistencia de la pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización. En la figura 4.10 se muestra un circuito con esas características.

Al aumentar la carga en el transformador ocurre la secuencia de acontecimientos siguiente:

a) La corriente en el devanado secundario se incrementa.
b) La corriente suministrada por la fuente aumenta.
c) La caída de voltaje a través de la impedancia del devanado primario $\hat{Z}_1$ se incrementa.
d) La fem inducida $\tilde{E}_1$ desciende.
e) Finalmente, el flujo mutuo disminuye debido al decremento en la corriente de magnetización.

Sin embargo, en un transformador bien diseñado, la disminución del flujo mutuo al pasar de una condición sin carga a otra de plena carga es de 1 a 3%, aproximadamente. Por tanto, para todo fin práctico puede suponerse que $\tilde{E}_1$ permanece esencialmente sin cambio. En otras palabras, el flujo mutuo es fundamentalmente el mismo en condiciones normales de carga; por ello no hay un cambio apreciable en la corriente de excitación.

En la representación del circuito equivalente de un transformador rara vez se muestra el núcleo. A veces se dibujan líneas paralelas entre las dos bobinas para señalar la presencia de un núcleo magnético. Utilizaremos una representación como ésa del circuito equivalente. Si las líneas paralelas entre los dos devanados no existen, la interpretación es que el núcleo es no magnético. Con tal supuesto, el circuito equivalente exacto de un transformador práctico se muestra en la figura 4.11, donde también se aprecia un cuadro punteado para indicar que el circuito encerrado por él es el llamado *transformador ideal*. Todas las relaciones del transformador ideal se aplican a este circuito. La corriente de carga $\tilde{I}_2$ en el lado secundario está representada en el lado primario como $\tilde{I}_p$.

La corriente de excitación puede determinarse como

$$\tilde{I}_\phi = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_p = \tilde{I}_1 - \frac{\tilde{I}_2}{a} \tag{4.17}$$

Es posible representar un transformador mediante un circuito equivalente que no utilice un transformador ideal. Tales circuitos equivalentes se trazan con referencia a

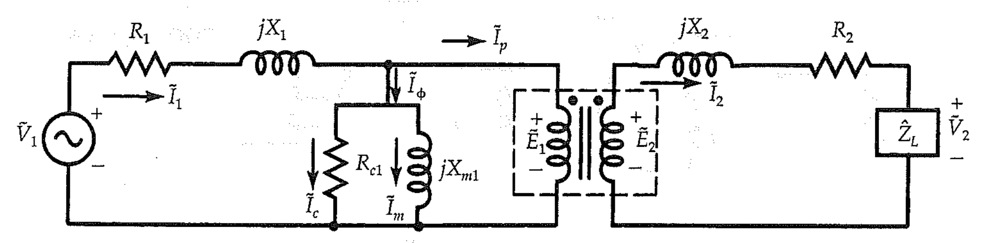


Figura 4.11. Circuito equivalente exacto de un transformador práctico. Los devanados acoplados en el cuadro punteado representan un transformador ideal con núcleo magnético.

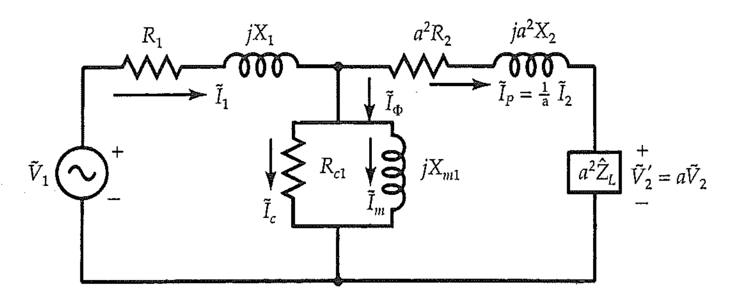


Figura 4.12. Circuito equivalente exacto como se observa desde el lado primario del transformador.

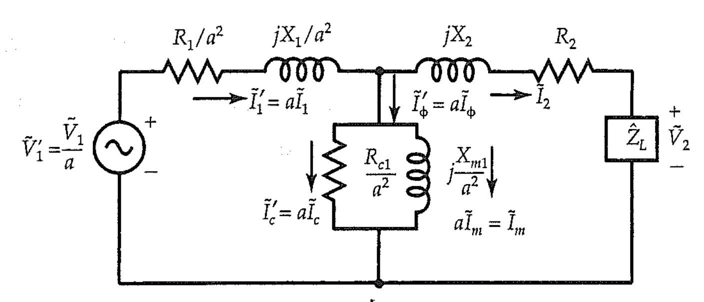


Figura 4.13. Circuito equivalente exacto como se observa desde el lado secundario del transformador.

un devanado específico. En la figura 4.12 se muestra un circuito equivalente como se observa desde el lado primario. Note que los elementos del circuito que estaban en el lado secundario en la figura 4.11 se han transformado en el lado primario en la figura 4.12. En la figura 4.13 aparece el circuito equivalente del mismo transformador referido al lado secundario.

Ejemplo 4.4

La resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización en el lado primario del transformador que se analizó en el ejemplo 4.3 son, respectivamente, 20 kΩ y 15 kΩ. Si el transformador alimenta la misma carga, ¿cuál es su eficiencia?

- **Solución**

Del ejemplo 4.3 se tiene que

$$\tilde{V}_2 = 230 \text{ V} \qquad \tilde{I}_2 = 75\underline{/30^\circ} \text{ A} \qquad \tilde{E}_2 = 228.287\underline{/2.33^\circ} \text{ V}$$

$$a = 10 \qquad \tilde{E}_1 = 2282.87\underline{/2.33^\circ} \text{ V} \qquad \tilde{I}_p = 7.5\underline{/30^\circ} \text{ A}$$

$$P_o = 14\,938.94 \text{ W}$$

Las corrientes de pérdida en el núcleo, magnetización y excitación son

$$\tilde{I}_c = \frac{\tilde{E}_1}{R_{c1}} = \frac{2282.87\underline{/2.33^\circ}}{20\,000} = 0.114\underline{/2.33^\circ}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_m = \frac{\tilde{E}_1}{jX_{m1}} = \frac{2282.87\underline{/2.33^\circ}}{j15\,000} = 0.152\underline{/-87.67^\circ}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_\phi = \tilde{I}_c + \tilde{I}_m = 0.114\underline{/2.33^\circ} + 0.152\underline{/-87.67^\circ} = 0.19\underline{/-50.8^\circ}\text{ A}$$

Luego,

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_p + \tilde{I}_\phi = 7.5\underline{/30^\circ} + 0.19\underline{/-50.8^\circ} = 7.53\underline{/28.57^\circ}\text{ A}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 = \tilde{E}_1 + \tilde{I}_1\hat{Z}_1 &= 2282.87\underline{/2.33^\circ} + (7.53\underline{/28.57^\circ})(4 + j12)\\ &= 2271.9\underline{/4.71^\circ}\text{ V}\end{aligned}$$

La potencia de entrada es

$$P_{in} = \text{Re}\left[\tilde{V}_1\tilde{I}_1^*\right] = 15\,645.35\text{ W}$$

La eficiencia del transformador es

$$\eta = \frac{P_o}{P_{in}} = \frac{14\,938.94}{15\,645.35} = 0.955 \quad \text{o} \quad 95.5\%$$

■

Diagrama fasorial

Cuando un transformador opera en condiciones de estado estable, sus corrientes, voltajes y ángulos de fase se comprenden mejor trazando su diagrama fasorial. Si bien es posible desarrollar un diagrama fasorial tomando como referencia cualquier cantidad fasora, se utiliza el voltaje de la carga porque casi siempre se trata de una cantidad conocida.

Sea $\tilde{V}_2$ el voltaje a través de la impedancia de la carga $\hat{Z}_L$ e $\tilde{I}_2$ la corriente de la carga. Según $\hat{Z}_L$, $\tilde{I}_2$ puede estar en adelanto, en fase o en atraso respecto de $\tilde{V}_2$. En este caso, supongamos que $\tilde{I}_2$ se atrasa respecto de $\tilde{V}_2$ por un ángulo θ_2. Primero se traza una línea horizontal desde el origen de magnitud V_2 para representar el fasor $\tilde{V}_2$, como se observa en la figura 4.14. Ahora se traza la corriente I_2 atrasada respecto de V_2 en θ_2.

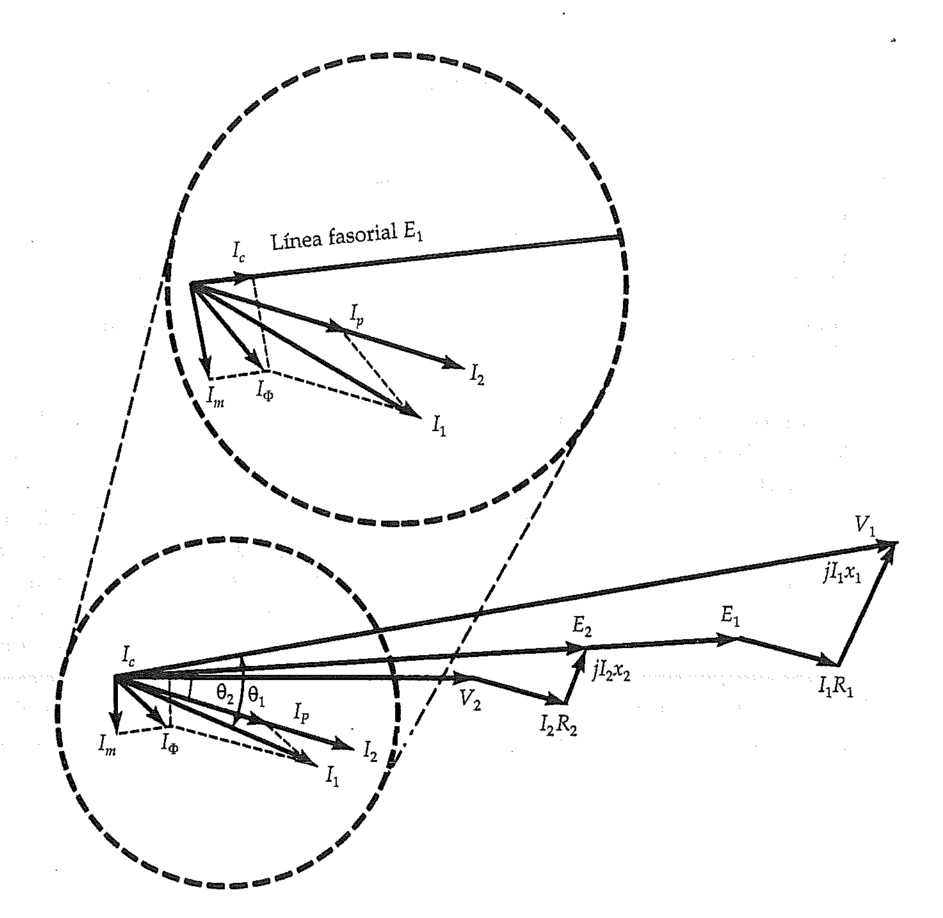


Figura 4.14 Diagrama fasorial de un transformador no ideal como el que se muestra en la figura 4.11.

Del circuito equivalente (fig. 4.11) se tiene que

$$\tilde{E}_2 = \tilde{V}_2 + \tilde{I}_2R_2 + j\tilde{I}_2X_2$$

Ahora se procede a construir el diagrama fasorial para E_2. Como la caída de voltaje $\tilde{I}_2R_2$ está en fase con $\tilde{I}_2$ y va a sumarse a $\tilde{V}_2$, se traza una línea de magnitud I_2R_2 que comienza en el extremo de V_2 y es paralela a I_2. La longitud de la línea desde el origen hasta el extremo de I_2R_2 representa la suma de $\tilde{V}_2$ e $\tilde{I}_2R_2$. Ahora puede sumarse la caída del voltaje $j\tilde{I}_2X_2$ al extremo de I_2R_2 trazando una línea de igual magnitud y en adelanto respecto de $\tilde{I}_2$ en 90°. Una línea del origen al extremo de jI_2X_2 representa la magnitud de $\tilde{E}_2$. Con esto se concluye el diagrama fasorial para el devanado secundario.

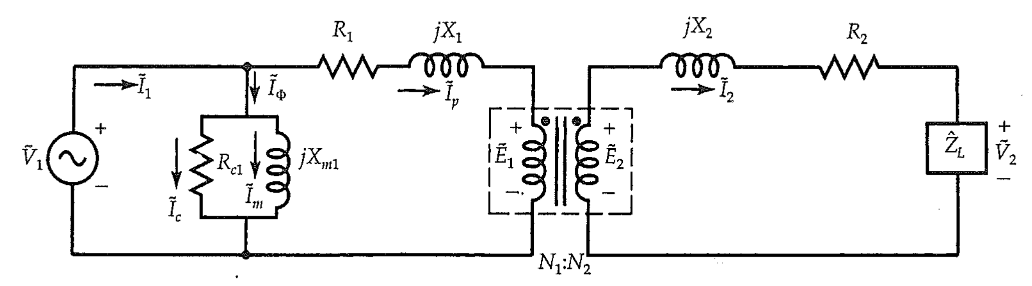


Figura 4.15. Circuito equivalente aproximado de un transformador que incorpora un transformador ideal.

Como $\tilde{E}_2 = a\tilde{E}_2$, la magnitud de la fem inducida en el lado primario depende de la relación a. Supongamos que ésta es mayor que la unidad. En ese caso, $\tilde{E}_1$ es mayor que $\tilde{E}_2$ y puede representarse extendiendo E_2 según se muestra.

La corriente $\tilde{I}_c$ está en fase con $\tilde{E}_1$, e $\tilde{I}_m$ en atraso con $\tilde{E}_1$ en 90°. Estas corrientes se trazan desde el origen, como se indica, y su suma da lugar a la corriente de excitación $\tilde{I}_\phi$. Ahora se construye la corriente de la fuente I_1 por medio de las corrientes I_ϕ e I_2/a, como se aprecia en la figura. A continuación se suma la caída de voltaje a través de la impedancia del devanado primario $\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1$ para obtener el fasor $\tilde{V}_1$. Con esto, el diagrama fasorial queda concluido. En este caso, la corriente de la fuente $\tilde{I}_1$ está en atraso respecto del voltaje de la fuente $\tilde{V}_1$ en un ángulo θ.

Los diagramas fasoriales también pueden trazarse para los circuitos equivalentes exactos, como se aprecia en las figuras 4.12 y 4.13, labor que se deja al lector como ejercicio.

Circuitos equivalentes aproximados

En un transformador bien diseñado las resistencias de los devanados, las reactancias de dispersión y la pérdida en el núcleo se mantienen tan bajas como sea posible. Una pérdida baja en el núcleo implica una resistencia elevada de la pérdida en el núcleo. Una permeabilidad alta del núcleo asegura una reactancia de magnetización elevada.

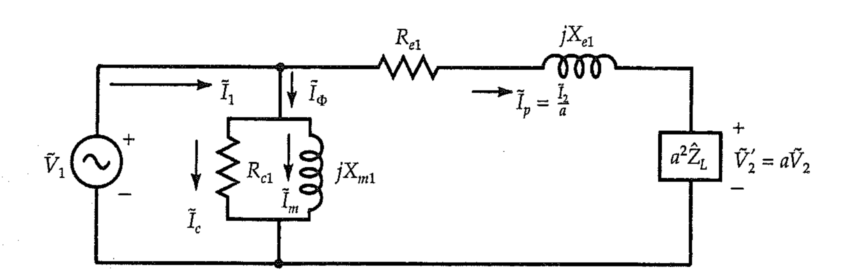


Figura 4.16. Circuito equivalente aproximado de un transformador observado desde el lado primario.

Figura 4.17. Circuito equivalente aproximado de un transformador observado desde el lado secundario.

Por tanto, la impedancia de la llamada *rama paralela* (R_{c1} en paralelo con jX_{m1}) a través del primario es muy alta en comparación con $\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1$ y $\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2$. La impedancia elevada de la rama paralela asegura una baja corriente de excitación. En el análisis de los sistemas de potencia complejos es posible alcanzar un alto grado de simplificación si se desprecia la corriente de excitación.

Como $\hat{Z}_1$ se mantiene baja, la caída de voltaje a través suyo también es baja en comparación con el voltaje aplicado. Puede suponerse que la caída de voltaje a través de la rama paralela es la misma que el voltaje aplicado, sin que ello comporte ningún error apreciable en los cálculos. Tal suposición permite mover la rama paralela como se indica en la figura 4.15 para el circuito equivalente de un transformador que incorpora un transformador ideal. Esto se conoce como *circuito equivalente aproximado de un transformador.*

En la figura 4.16 se aprecia el circuito equivalente aproximado como se observa desde el lado primario, donde

$$\hat{Z}_{e1} = R_{e1} + jX_{e1} \tag{4.18a}$$

$$R_{e1} = R_1 + a^2 R_2 \tag{4.18b}$$

y

$$X_{e1} = X_1 + a^2 X_2 \tag{4.18c}$$

En forma semejante, en la figura 4.17 se ilustra el circuito equivalente aproximado referido al lado secundario del trasformador. En esa figura,

$$\hat{Z}_{e2} = R_{e2} + jX_{e2} \tag{4.19a}$$

$$R_{e2} = R_2 + \frac{R_1}{a^2} \tag{4.19b}$$

$$X_{e2} = X_2 + \frac{X_1}{a^2} \tag{4.19c}$$

$$R_{c2} = \frac{R_{c1}}{a^2} \tag{4.19d}$$

y

$$X_{m2} = \frac{X_{m1}}{a^2} \tag{4.19e}$$

Ejemplo 4.5

Analice el transformador que se estudió en los ejemplos 4.3 y 4.4 utilizando el circuito equivalente aproximado observado desde el lado primario. También trace su diagrama fasorial.

- Solución

$$\tilde{V}_2' = a\tilde{V}_2 = 10 \times 230\underline{/0^\circ} = 2300\underline{/0^\circ}\text{ V}$$

$$\tilde{I}_p = 7.5\underline{/30^\circ}\text{ A}$$

$$R_{e1} = R_1 + a^2R_2 = 4 + (10^2)(0.04) = 8\ \Omega$$

$$X_{e1} = X_1 + a^2X_2 = 12 + (10^2)(0.12) = 24\ \Omega$$

$$\hat{Z}_{e1} = R_{e1} + jX_{e1} = 8 + j24\ \Omega$$

Luego, $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_2' + \tilde{I}_p\hat{Z}_{e1} = 2300\underline{/0^\circ} + (7.5\underline{/30^\circ})(8 + j24) = 2269.59\underline{/4.7^\circ}\text{ V}$

La pérdida en el núcleo y las corrientes de magnetización son:

$$\tilde{I}_c = \frac{2269.59\underline{/4.7^\circ}}{20\,000} = 0.113\underline{/4.7^\circ}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_m = \frac{2269.59\underline{/4.7^\circ}}{j15\,000} = 0.151\underline{/-85.3^\circ}\text{ A}$$

Entonces, $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_p + \tilde{I}_c + \tilde{I}_m = 7.5\underline{/30^\circ} + 0.113\underline{/4.7^\circ} + 0.151\underline{/-85.3^\circ} = 7.54\underline{/28.6^\circ}\text{ A}$

Por tanto, la potencia de salida y la de entrada, así como la eficiencia son:

$$P_o = \text{Re}[(2300\underline{/0^\circ})(7.5\underline{/-30^\circ})] = 14\,938.94\text{ W}$$

$$P_{in} = \text{Re}[(2269.59\underline{/4.7^\circ})(7.54\underline{/-28.6^\circ})] = 15\,645.36\text{ W}$$

$$\eta = \frac{14\,938.94}{15\,645.36} = 0.955 \quad \text{o} \quad 95.5\%$$

El diagrama fasorial correspondiente se muestra en la figura 4.18.

Se invita al lector a comparar los resultados anteriores con los obtenidos en el ejemplo 4.4, a fin de estar consciente de algunos errores introducidos como consecuencia de las aproximaciones efectuadas.

■

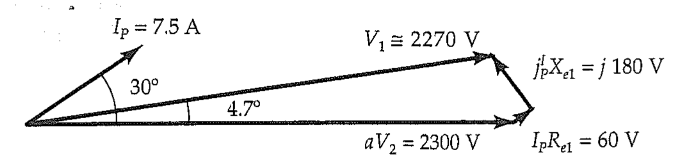


Figura 4.18. Diagrama fasorial del transformador analizado en el ejemplo 4.5.

Ejercicios

4.4. Un transformador reductor de 2.4 kVA, 2 400/240 V y 50 Hz tiene los parámetros siguientes: $R_1 = 1.5\ \Omega$, $X_1 = 2.5\ \Omega$, $R_2 = 0.02\ \Omega$, $X_2 = 0.03\ \Omega$, $R_{c1} = 6$ kΩ y $X_{m1} = 8$ kΩ. Opera a 80% de su carga con un factor de potencia igual a la unidad. Use el circuito equivalente exacto que incorpora al transformador ideal para determinar la eficiencia del transformador. También trace su diagrama fasorial.

4.5. Si el transformador del ejercicio 4.4 alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.8 en atraso, calcule su eficiencia mediante el circuito equivalente aproximado como se observa desde el lado secundario. También trace su diagrama fasorial.

4.6. Si el transformador del ejercicio 4.4 opera a 50% de su carga especificada con un factor de potencia de 0.5 en atraso, calcule su eficiencia mediante los circuitos equivalentes exacto y aproximado referidos al lado primario. Elabore una tabla comparativa de los errores porcentuales en las corrientes, voltajes, potencias y eficiencia debidos a la aproximación.

4.5. Regulación del voltaje

Considere un transformador cuyo voltaje en el devanado primario se ajusta de modo tal que alimenta la carga especificada al voltaje secundario especificado en las terminales. Si se elimina la carga, el voltaje secundario en las terminales se altera debido al cambio en las caídas de voltaje a través de las resistencias en el devanado y las reactancias de dispersión. Una cantidad interesante es el cambio neto en el voltaje del devanado secundario al pasar de la condición sin carga hasta la de plena carga para el mismo voltaje del devanado primario. Cuando el cambio se expresa en forma porcentual de su voltaje especificado se llama *regulación del voltaje* (RV) del transformador. Como porcentaje se expresa de la forma siguiente:

$$RV\% = \frac{V_{2NL} - V_{2PC}}{V_{2PC}} \times 100 \tag{4.20}$$

donde V_{2NL} y V_{2PC} son los valores efectivos de los voltajes sin carga y a plena carga en las terminales secundarias.

La regulación del voltaje es como la medalla al mérito de un transformador. Para un transformador ideal, la regulación del voltaje es igual a cero. Cuanta más pequeña sea tal regulación, mejor opera el transformador.

Las expresiones para la regulación del voltaje en forma porcentual para los circuitos equivalentes aproximados observados desde los lados primario y secundario son:

$$RV\% = \frac{V_1 - aV_2}{aV_2} \times 100 \tag{4.21}$$

$$RV\% = \frac{\frac{V_1}{a} - V_2}{V_2} \times 100 \tag{4.22}$$

donde V_1 es el voltaje a plena carga en el lado primario y V_2 es el voltaje especificado en el secundario.

Ejemplo 4.6

Un transformador reductor de 2.2 kVA, 440/220 V y 50 Hz tiene los parámetros siguientes, referidos al lado primario: $R_{e1} = 3\ \Omega$, $X_{e1} = 4\ \Omega$, $R_{c1} = 2.5\ \text{k}\Omega$ y $X_{m1} = 2\ \text{k}\Omega$. El transformador opera a plena carga con un factor de potencia de 0.707 en atraso. Determine la eficiencia y la regulación del voltaje del transformador.

- Solución

De los datos proporcionados,

$$a = \frac{440}{220} = 2 \qquad \tilde{V}_2 = 220\text{ V} \qquad S = 2200\text{ VA} \qquad I_2 = \frac{2200}{220} = 10\text{A}$$

Para un factor de potencia de 0.707 en atraso, $\theta = -45°$.
Utilizando el voltaje de la carga como referencia, $\tilde{I}_2 = 10\underline{/-45°}$ A.
Con base en el circuito equivalente (fig. 4.16) se tiene que

$$\tilde{I}_p = \frac{\tilde{I}_2}{a} = 5\underline{/-45°}\text{ A}$$

$$\tilde{V}_2' = a\tilde{V}_2 = 440\underline{/0°}\text{ V}$$

Luego, $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_2' + \tilde{I}_p(R_{e1} + jX_{e1}) = 440 + (5\underline{/-45°})(3 + j4)$

$$= 464.762\underline{/0.44°}\text{ V}$$

La pérdida en el núcleo y las corrientes de magnetización son:

$$\tilde{I}_c = \frac{464.762\underline{/0.44^\circ}}{2500} = 0.186\underline{/0.44^\circ}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_m = \frac{464.762\underline{/0.44^\circ}}{j2000} = 0.232\underline{/-89.56^\circ}\text{ A}$$

La corriente suministrada por la fuente es:

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_p + \tilde{I}_c + \tilde{I}_m = 5\underline{/-45^\circ} + 0.186\underline{/0.44^\circ} + 0.232\underline{/-89.56^\circ}$$

$$= 5.296\underline{/-45.33^\circ}\text{ A}$$

La potencia de salida y la de entrada, así como la eficiencia son:

$$P_o = \text{Re}[(440)(5\underline{/45^\circ})] = 1555.63\text{ W}$$

$$P_{in} = \text{Re}[(464.762\underline{/0.44^\circ})(5.296\underline{/45.33^\circ})] = 1716.91\text{ W}$$

$$\eta = \frac{1555.63}{1716.91} = 0.906 \quad \text{o} \quad 90.6\%$$

La regulación del voltaje es:

$$RV\% = \frac{464.762 - 440}{440} \times 100 = 5.63\%$$

■

Ejercicios

4.7. Calcule la regulación del voltaje de un transformador reductor cuyos parámetros son los que se dieron en el ejercicio 4.4, a plena carga y con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. ¿Cuál es la eficiencia a plena carga? Use el circuito equivalente exacto.

4.8. Si el transformador que se analizó en el ejemplo 4.6 opera con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, ¿cuál es su eficiencia a plena carga? ¿Cuál es la regulación del voltaje?

4.9. Un transformador reductor de 100 kVA, 13.2/2.2 kV y 50 Hz tiene una resistencia equivalente a la pérdida en el núcleo de 8 kΩ y reactancia de magnetización de 7 kΩ. La impedancia equivalente en el devanado referido al lado primario es $3 + j12\ \Omega$. Si el transformador alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.707 en atraso, determine su regulación del voltaje y su eficiencia.

4.6. Criterio de la máxima eficiencia

Como se definió, la eficiencia es la razón que hay entre la potencia de salida y la de entrada. En un transformador práctico, la eficiencia siempre es inferior a 100% debido a los dos tipos de pérdidas: la magnética y la del cobre.

La pérdida magnética, a la que comúnmente se alude como *pérdida en el núcleo*, consiste en una pérdida por corriente parásita y una pérdida por histéresis. Para una densidad de flujo dada y la frecuencia de operación, la pérdida por corriente parásita puede reducirse al mínimo por medio de laminaciones muy delgadas. La pérdida por histéresis depende de las características magnéticas del tipo de acero que se utilice para elaborar el núcleo magnético. Como el flujo Φ_m, en el núcleo de un transformador es prácticamente constante para todas las condiciones de carga, la pérdida (magnética) en el núcleo P_m es esencialmente constante. Por ello la pérdida en el núcleo se llama *pérdida fija*.

La pérdida en el cobre (conocida también como pérdida I^2R o *pérdida de potencia eléctrica*) comprende la potencia disipada por los devanados primario y secundario. La pérdida en el cobre P_{co} varía con el cuadrado de la corriente en cada devanado. Por tanto, conforme se incrementa la carga también lo hace la pérdida en el cobre. Ése es el porqué la pérdida en el cobre también se conoce como *pérdida variable*.

La potencia de salida se obtiene restando la pérdida en el núcleo y la pérdida del cobre de la potencia de entrada. Esto implica que también es posible obtener la potencia de entrada sumando la pérdida en el núcleo y la pérdida en el cobre a la potencia de salida. El flujo de potencia de la entrada a la salida puede destacarse mediante un diagrama de una sola línea, denominado *diagrama de flujo de potencia*. En la figura 4.19 se muestra un diagrama de flujo de potencia de un transformador (compárese con la figura 4.11).

Sin carga, la eficiencia de un transformador es igual a cero, y se incrementa con el aumento de la carga y alcanza un valor máximo. Cualquier incremento adicional en la carga hará que disminuya la eficiencia del transformador. Por tanto, hay una carga definida que supone la eficiencia máxima del transformador. En seguida procederemos a determinar el criterio de la máxima eficiencia de un transformador.

Considere el circuito equivalente aproximado de un transformador como se observa desde el lado primario (fig. 4.16). La corriente de carga equivalente y el voltaje de la carga en el lado primario son $I_p \angle\theta$ y aV_2. La potencia de salida es:

$$P_o = aV_2 I_p \cos\theta$$

P_m P_{co} P_{in} P_o

Figura 4.19. Diagrama de flujo de potencia de un transformador.

y la pérdida en el cobre es:

$$P_{co} = I_p^2 R_{e1}$$

Si la pérdida en el núcleo es P_m, entonces la potencia de entrada es

$$P_{in} = aV_2 I_p \cos\theta + P_m + I_p^2 R_{e1}$$

Así, la eficiencia del transformador es

$$\eta = \frac{aV_2 I_p \cos\theta}{aV_2 I_p \cos\theta + P_m + I_p^2 R_{e1}}$$

La única variable en la ecuación anterior es la corriente de la carga I_p para una impedancia de carga dada. Por consiguiente, si se deriva con respecto a I_p y se iguala a cero la derivada se obtiene

$$I_{p\eta}^2 R_{e1} = P_m \qquad (4.23a)$$

donde $I_{p\eta}$ es la corriente de carga en el lado primario con la eficiencia máxima. La ecuación anterior establece que *la eficiencia de un transformador es máxima cuando la pérdida en el cobre es igual a la pérdida (magnética) en el núcleo.* En otras palabras, un transformador opera a su eficiencia máxima cuando la curva de pérdida en el cobre interseca la curva de pérdida en el núcleo, como se ilustra en la figura 4.20.

La ecuación (4.23*a*) puede volver a expresarse como

$$I_{p\eta} = \sqrt{\frac{P_m}{R_{e1}}} \qquad (4.23b)$$

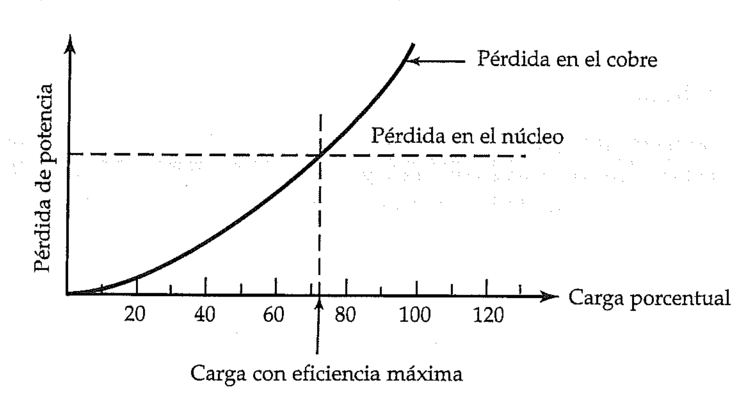


Figura 4.20. Pérdidas en un transformador.

Si I_{fp1} es la corriente a plena carga en el lado primario, entonces la ecuación anterior también puede escribirse como

$$I_{p\eta} = I_{fp1}\sqrt{\frac{P_m}{I_{fp1}^2 R_{e1}}}$$

o

$$I_{p\eta} = I_{fp1}\sqrt{\frac{P_m}{P_{cof1}}} \qquad (4.24)$$

donde $P_{cof1} = I_{fp1}^2 R_{e1}$ es la pérdida en el cobre a plena carga.

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación 4.24 por el voltaje de la carga especificada en el lado primario (aV_2) se obtiene la especificación del transformador con máxima eficiencia en términos de su especificación nominal, como

$$VA\big|_{\text{máx. ef.}} = VA\big|_{\text{especificada}}\sqrt{\frac{\text{Pérdida magnética}}{\text{Pérdida en el cobre a plena carga}}} \qquad (4.25)$$

La especificación volt-ampere con eficiencia máxima puede calcularse en la práctica haciendo pruebas en el transformador, como se explica en la sección siguiente.

Ejemplo 4.7

Un transformador reductor de 120 kVA, 2 400/240 V tiene los parámetros siguientes: $R_1 = 0.75\ \Omega$, $X_1 = 0.8\ \Omega$, $R_2 = 0.01\ \Omega$, $X_2 = 0.02\ \Omega$. El transformador está diseñado para operar con una eficiencia máxima de 70% de su carga especificada con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Determine *a)* la especificación de kVA del transformador a su eficiencia máxima, *b)* la eficiencia máxima, *c)* la eficiencia a plena carga y un factor de potencia de 0.8 en atraso, y *d)* la resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo.

- Solución

Se usará un circuito equivalente aproximado del transformador (fig. 4.16). El voltaje especificado a través de la carga observado desde el lado primario es de 2 400 V. Luego, la corriente de la carga especificada es

$$I_p = \frac{120\,000}{2400} = 50 \text{ A}$$

La corriente de la carga con la eficiencia máxima es

$$I_{p\eta} = 0.7 I_p = 0.7 \times 50 = 35 \text{ A}$$

a) La especificación de kVA del transformador con eficiencia máxima es

$$\text{kVA}\big|_{\text{máx. ef.}} = \frac{35 \times 2400}{1000} = 84 \text{ kVA}$$

Luego, la pérdida en el cobre con la eficiencia máxima es

$$P_{co\eta} = I^2(R_1 + a^2R_2) = 35^2(0.75 + 10^2 \times 0.01)$$
$$= 2143.75 \text{ W}$$

y la pérdida en el núcleo es

$$P_m = P_{co\eta} = 2143.75 \text{ W}$$

b) La potencia de salida, la potencia de entrada y la eficiencia cuando el transformador alimenta la carga con la eficiencia máxima son

$$P_o = 2400 \times 35 \times 0.8 = 67\,200 \text{ W}$$
$$P_{in} = P_o + P_m + P_{co\eta}$$
$$= 67\,200 + 2143.75 + 2143.75 = 71\,487.5 \text{ W}$$
$$\eta = \frac{67\,200}{71\,487.5} = 0.94 \quad \text{o} \quad 94\%$$

c) La potencia de salida, la pérdida en el cobre y la eficiencia a plena carga son

$$P_o = 2400 \times 50 \times 0.8 = 96\,000 \text{ W}$$
$$P_{co} = 50^2 \times (0.75 + 10^2 \times 0.01) = 4375 \text{ W}$$
$$\eta = \frac{96\,000}{96\,000 + 4375 + 2143.75} = 0.936 \quad \text{o} \quad 93.6\%$$

d) La resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo sin carga es

$$R_{c1} = \frac{2400^2}{2143.75} = 2686.88\ \Omega$$

■

Ejercicios

4.10. Un transformador reductor de 24 kVA, 2 400/240 V y 50 Hz tiene los parámetros siguientes: $R_1 = 25\ \Omega$, $X_1 = 35\ \Omega$, $R_2 = 250\ \text{m}\Omega$, $X_2 = 350\ \text{m}\Omega$ y $X_m = 3\ \text{k}\Omega$. La eficiencia del transformador es máxima cuando opera a 80% de su carga especificada y con un factor de potencia de 0.866 en atraso. Determine *a)* su especificación de kVA a máxima eficiencia, *b)* la eficiencia máxima, *c)* la eficiencia a plena carga y un factor de potencia de 0.866 en atraso, y *d)* la resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo.

4.11. Un transformador de 200 kVA tiene una pérdida en el núcleo de 10 kW y una pérdida en el cobre de 40 kW a plena carga. ¿Cuál es su especificación de kVA a eficiencia máxima? Exprese la corriente de la carga con eficiencia máxima como porcentaje de la corriente especificada. Si el transformador opera con un factor de potencia de 0.8 en atraso, calcule *a)* la eficiencia máxima y *b)* la eficiencia a plena carga del transformador.

4.12. Un transformador elevador de 24 kVA y 120/480 V opera a su eficiencia máxima a 75% de su carga especificada con un factor de potencia igual a la unidad. La pérdida en el núcleo es de 1.2 kW. ¿Cuál es la resistencia equivalente del devanado con referencia al lado primario? ¿Cuál es la eficiencia del transformador si alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.9 en atraso?

4.7. Determinación de los parámetros de un transformador

Los parámetros del circuito equivalente de un transformador pueden determinarse si se efectúan dos pruebas: la de circuito abierto y la de cortocircuito.

Prueba de circuito abierto

Como su nombre lo dice, la prueba de circuito abierto supone dejar abierto un devanado del transformador mientras el otro se excita aplicando el voltaje especificado. La frecuencia del voltaje que se aplica debe ser la frecuencia especificada del transformador. Aunque no importa cuál sea el lado que se excite, es más seguro realizar la prueba en el *lado de bajo voltaje*. Otra razón para realizar la prueba en este lado es la disponibilidad de fuentes de bajo voltaje en cualquier instalación para pruebas.

En la figura 4.21 se muestra el diagrama de conexión para la prueba de circuito abierto con amperímetro, voltímetro y vatímetro colocados en el lado de bajo voltaje. Si se supone que la pérdida de potencia en condiciones sin carga en el devanado de bajo voltaje es despreciable, entonces el circuito equivalente aproximado correspondiente como se observa desde el lado de bajo voltaje es el que aparece en la figura 4.22. Del equivalente aproximado del transformador referido al lado de bajo voltaje (fig. 4.22), es evidente que la fuente suministra la corriente de excitación en

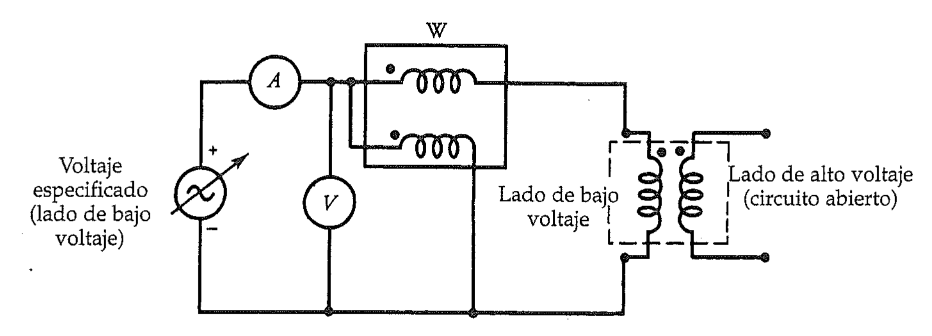


Figura 4.21. Transformador de dos devanados conectado a instrumentos para efectuar la prueba de circuito abierto.

condiciones sin carga. Un componente de la corriente de excitación es el responsable de la pérdida en el núcleo, en tanto que el otro responde por el establecimiento del flujo requerido en el núcleo magnético. A fin de medir estos valores con exactitud, debe ajustarse con cuidado el voltaje de la fuente a su valor especificado. Como la única pérdida de potencia en la figura 4.22 es la del núcleo, *el vatímetro mide la pérdida en el núcleo del transformador*.

La componente de pérdida en el núcleo de la corriente de excitación está en fase con el voltaje aplicado, mientras que la corriente de magnetización está en atraso de 90° respecto al voltaje aplicado, como se aprecia en la figura 4.23. Si V_{oc} es el voltaje especificado que se aplica al lado de bajo voltaje, I_{oc} es la corriente de excitación tal cual la mide el amperímetro y P_{oc} es la potencia que registra el vatímetro, entonces se tiene que la potencia aparente sin carga es

$$S_{oc} = V_{oc} I_{oc}$$

con un ángulo del factor de potencia en atraso de

$$\phi_{oc} = \cos^{-1}\left[\frac{P_{oc}}{S_{oc}}\right]$$

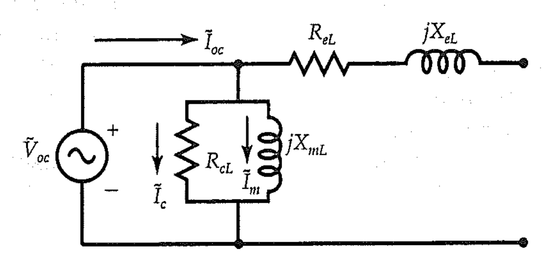


Figura 4.22. Circuito equivalente aproximado de un transformador de dos devanados sujeto a la prueba de circuito abierto.

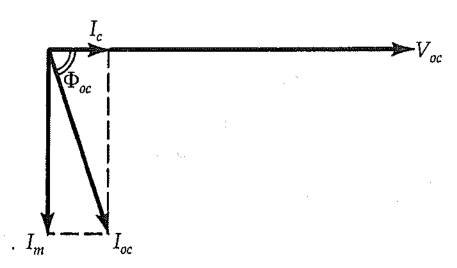


Figura 4.23. Diagrama fasorial de un transformador de dos devanados durante una prueba de circuito abierto.

Las corrientes de pérdida en el núcleo y de magnetización son

$$I_c = I_{oc} \cos(\phi_{oc})$$

e

$$I_m = I_{oc} \operatorname{sen}(\phi_{oc})$$

Luego, la resistencia de la pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización observadas desde el lado de bajo voltaje son

$$R_{cL} = \frac{V_{oc}}{I_c} = \frac{V_{oc}^2}{P_{oc}} \tag{4.26}$$

y

$$X_{mL} = \frac{V_{oc}}{I_m} = \frac{V_{oc}^2}{Q_{oc}} \tag{4.27}$$

donde

$$Q_{oc} = \sqrt{S_{oc}^2 - P_{oc}^2}$$

Prueba de cortocircuito

Esta prueba se ha diseñado para determinar las resistencias del devanado y las reactancias de dispersión. La prueba se realiza estableciendo un cortocircuito a través de un devanado y excitando el otro con una fuente de voltaje alterno de la frecuencia de especificación del transformador. El voltaje aplicado se ajusta con cuidado para que cada devanado conduzca una corriente especificada. En cada devanado, esta última asegura la simulación adecuada del patrón de flujo de dispersión asociado con el devanado correspondiente. Puesto que el cortocircuito restringe la potencia de salida a cero, la potencia de entrada al transformador es baja. La baja potencia de entrada con la corriente especificada implica que *el voltaje aplicado es una fracción pequeña del voltaje especificado. Por tanto, ha de tenerse cuidado extremo al ejecutar esta prueba.*

Nuevamente, no importa en cuál lado se ejecute la prueba. Sin embargo, la medición de la corriente especificada indica que, para mayor seguridad, la prueba debe realizarse en el lado de alto voltaje. En la figura 4.24 se muestra la disposición para la prueba con todos los instrumentos colocados en el lado del alto voltaje, con un cortocircuito en el lado de bajo voltaje.

Como el voltaje aplicado es una fracción pequeña del voltaje especificado, tanto la corriente por pérdida en el núcleo como la corriente de magnetización son tan pequeñas que pueden despreciarse. En otras palabras, la pérdida en el núcleo es prácticamente igual a cero y la reactancia de magnetización es casi infinita. En la figura 4.25 se describe el circuito equivalente aproximado del transformador observado desde el lado de alto voltaje. En este caso, *el vatímetro registra la pérdida en el cobre a plena carga.*

Si V_{sc}, I_{sc} y P_{sc} son las lecturas del voltímetro, amperímetro y vatímetro, entonces

$$R_{eH} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2} \tag{4.28}$$

es la resistencia total de los dos devanados referida al lado de alto voltaje. La magnitud de la impedancia referida al lado de alto voltaje es

$$Z_{eH} = \frac{V_{sc}}{I_{sc}} \tag{4.29}$$

Por tanto, la reactancia de dispersión total de los dos devanados referida al lado de alto voltaje es

$$X_{eH} = \sqrt{Z_{eH}^2 - R_{eH}^2} \tag{4.30}$$

Si se define la relación a como

$$a = \frac{N_H}{N_L}$$

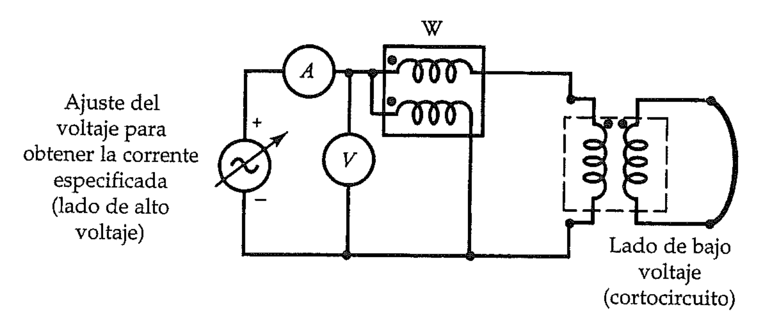


Figura 4.24. Transformador de dos devanados conectado para realizar la prueba de cortocircuito.

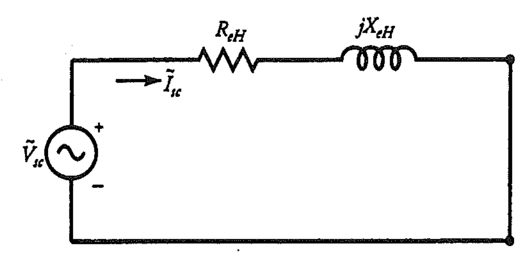


Figura 4.25. Circuito equivalente aproximado de un transformador de dos devanados en condiciones de cortocircuito.

entonces

$$R_{eH} = R_H + a^2 R_L \tag{4.31}$$

y

$$X_{eH} = X_H + a^2 X_L \tag{4.32}$$

donde R_H es la resistencia del devanado de alto voltaje, R_L es la resistencia del devanado de bajo voltaje, X_H es la reactancia de dispersión del devanado de alto voltaje y X_L es la reactancia de dispersión del devanado de bajo voltaje.

Si el transformador está disponible, pueden medirse R_H y R_L y comprobar la ecuación 4.31. Sin embargo, no hay una forma fácil de separar las dos reactancias de dispersión. Esto también es válido para las resistencias de los devanados si no se dispone del transformador. Si han de segregarse las resistencias, se supondrá que el transformador ha sido diseñado de modo que la pérdida de potencia en el lado de alto voltaje sea igual a la que ocurre en el lado de bajo voltaje. Esto recibe el nombre de *criterio de diseño óptimo*, según el cual

$$I_H^2 R_H = I_L^2 R_L$$

que produce

$$R_H = a^2 R_L = 0.5 R_{eH} \tag{4.33}$$

En forma semejante, puede suponerse que

$$X_H = a^2 X_L = 0.5 X_{eH} \tag{4.34}$$

Ejemplo 4.8

Los datos siguientes se obtuvieron de la prueba de un transformador reductor de 48 kVA y 4 800/240 V:

	Voltaje (V)	*Corriente* (A)	*Potencia* (W)
Prueba de circuito abierto	240	2	120
Prueba de cortocircuito	150	10	600

Determine el circuito equivalente del transformador como se observa desde *a)* el lado de alto voltaje y *b)* el lado de bajo voltaje.

- Solución

Como la prueba de circuito abierto debe realizarse con el voltaje especificado en las terminales, los datos anteriores indican que la prueba se ejecutó en el lado de bajo voltaje. Por tanto, la resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo referida al lado de bajo voltaje es

$$R_{cL} = \frac{240^2}{120} = 480\ \Omega$$

La potencia aparente en condiciones sin carga es: $S_{oc} = V_{oc}I_{oc} = 240 \times 2 = 480$ VA
Luego, la potencia reactiva es

$$Q_{oc} = \sqrt{480^2 - 120^2} = 464.76 \text{ VAR}$$

Por tanto, la reactancia de magnetización referida al lado de bajo voltaje es

$$X_{mL} = \frac{240^2}{464.76} = 123.94\ \Omega$$

La resistencia de pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización referidas al lado de alto voltaje se obtuvieron como sigue:

$$a = 4800/240 = 20$$

$$R_{cH} = a^2 R_{cL} = (20^2)(480) = 192\ \text{k}\Omega$$

$$X_{mH} = a^2 X_{mL} = (20^2)(123.94) = 49.58\ \text{k}\Omega$$

Puesto que la corriente de cortocircuito es de 10 A, la prueba de cortocircuito se ejecutó en el lado de alto voltaje. Luego

$$R_{eH} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2} = \frac{600}{10^2} = 6\ \Omega$$

$$Z_{eH} = \frac{V_{sc}}{I_{sc}} = \frac{150}{10} = 15\ \Omega$$

$$X_{eH} = \sqrt{15^2 - 6^2} = 13.75\ \Omega$$

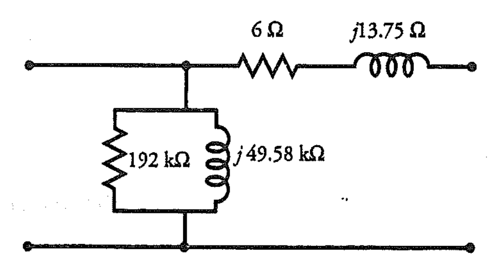


Figura 4.26. Circuito equivalente aproximado observado desde el lado de alto voltaje, para el ejemplo 4.8.

Los parámetros del devanado referido al lado de bajo voltaje son

$$R_{eL} = \frac{R_{eH}}{a^2} = \frac{6}{20^2} = 0.015\ \Omega \quad \text{o} \quad 15\ \text{m}\Omega$$

$$X_{eL} = \frac{X_{eH}}{a^2} = \frac{13.75}{20^2} = 0.034\ \Omega \quad \text{o} \quad 34\ \text{m}\Omega$$

Los circuitos equivalentes aproximados como se observaron desde los lados de alto y bajo voltaje se muestran en las figuras 4.26 y 4.27, respectivamente. Con objeto de trazar un circuito equivalente exacto, pueden segregarse las resistencias de los devanados y las reactancias de dispersión aplicando las ecuaciones 4.33 y 4.34. Es decir,

$$R_H = 0.5R_{eH} = 3\ \Omega$$

$$X_H = 0.5X_{eH} = 6.88\ \Omega$$

$$R_L = \frac{0.5R_{eH}}{a^2} = 0.0075\ \Omega \quad \text{o} \quad 7.5\ \text{m}\Omega$$

$$X_L = \frac{0.5X_{eH}}{a^2} = 0.017\ \Omega \quad \text{o} \quad 17\ \text{m}\Omega$$

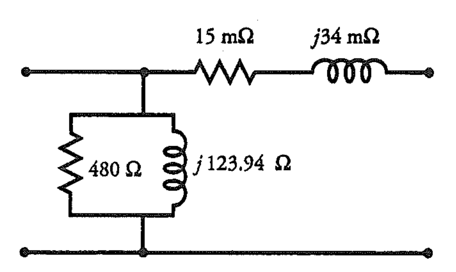


Figura 4.27. Circuito equivalente aproximado observado desde el lado de bajo voltaje, para el ejemplo 4.8.

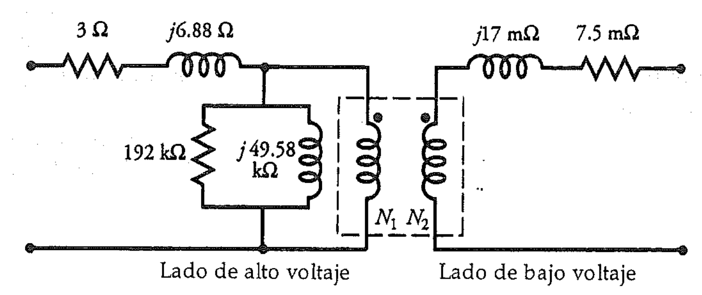


Figura 4.28. Circuito equivalente exacto del transformador para el ejemplo 4.8.

En la figura 4.28 aparece el circuito equivalente exacto que incorpora un transformador ideal.

■

Ejercicios

4.13. Los datos siguientes se obtuvieron al probar un transformador de 25 kVA, 2 300/460 V y 50 Hz:

	Voltaje (V)	*Corriente* (A)	*Potencia* (W)
Prueba de circuito abierto	460	1.48	460
Prueba de cortocircuito	108.7	10.87	709

Determine el circuito equivalente aproximado como se observa desde *a)* el lado de alto voltaje y *b)* el lado de bajo voltaje. También trace el circuito equivalente exacto.

4.14. Un transformador de 25 kVA, 4 000/400 V y 60 Hz tiene los parámetros siguientes: R_1 = 18 Ω, X_1 = 25 Ω, R_2 = 180 mΩ, X_2 = 250 mΩ, R_{cH} = 15 kΩ y X_{mH} = 25 kΩ. Si se efectúan las pruebas de circuito abierto y de cortocircuito en este transformador, ¿cuáles son las lecturas de los instrumentos en cada caso?

4.15. De los datos que se aportaron para el ejercicio 4.14, determine la especificación del transformador con eficiencia máxima. ¿Cuál es la eficiencia máxima del transformador con un factor de potencia igual a la unidad? ¿Cuál es la eficiencia a plena carga y factor de potencia unitario?

4.8. Cálculos por unidad

Cuando se diseña o analiza una máquina eléctrica utilizando los valores reales de sus parámetros, a primera vista no resulta evidente cómo se compara su rendimiento con el de máquinas semejantes. Sin embargo, si los parámetros de una máquina se expre-

san por unidad (pu) de un valor base (o de referencia), se encontrará que los valores por unidad de máquinas del mismo tipo pero de especificaciones muy diferentes se encuentran dentro de un estrecho margen. Ésta es una de las principales ventajas de un sistema por unidad.

Un sistema eléctrico tiene cuatro cantidades relevantes: voltaje, corriente, potencia aparente e impedancia. Si se seleccionan valores base de dos de ellos, es posible calcular los valores base de los otros dos. Si S_b es la potencia aparente base y V_b es el voltaje base, entonces la corriente y la impedancia base son

$$I_b = \frac{S_b}{V_b} \tag{4.35}$$

$$Z_b = \frac{V_b}{I_b} \tag{4.36}$$

La cantidad real puede expresarse ahora como una fracción decimal de su valor base por medio de la ecuación siguiente:

$$\text{Cantidad, pu} = \frac{\text{cantidad real}}{\text{su valor base}} \tag{4.37}$$

Como la especificación de la potencia de un transformador es la misma en ambos lados, puede usarse como una de las cantidades base. Sin embargo, deben seleccionarse dos voltajes base, uno para el lado primario y otro para el secundario. Los dos voltajes base deben estar vinculados con la relación a. Es decir,

$$a = \frac{V_{bH}}{V_{bL}} \tag{4.38}$$

donde V_{bH} y V_{bL} son los voltajes base en los lados de alto y bajo voltaje de un transformador, respectivamente.

Puesto que los voltajes base han sido transformados, las corrientes e impedancias también se transforman. En otras palabras, la relación a es unitaria cuando los parámetros de un transformador se expresan en términos de sus valores por unidad. El ejemplo siguiente muestra cómo se analiza un transformador por unidad.

Ejemplo 4.9

Un generador monofásico con una impedancia interna de $23 + j92$ mΩ está conectado a una carga por medio de un transformador elevador de 46 kVA, 230/2 300 V, una línea de transmisión corta y un transformador reductor de 46 kVA y 2 300/115 V. La

impedancia de la línea de transmisión es 2.07 + j4.14 Ω. Los parámetros de los transformadores elevador y reductor son los siguientes:

	R_H	X_H	R_L	X_L	R_{cH}	X_{mH}
Elevador	2.3 Ω	6.9 Ω	23 mΩ	69 mΩ	13.8 kΩ	6.9 kΩ
Reductor	2.3 Ω	6.9 Ω	5.73 mΩ	17.25 mΩ	11.5 kΩ	9.2 kΩ

Determine *a)* el voltaje del generador, *b)* la corriente del generador, y *c)* la eficiencia conjunta del sistema a plena carga y un factor de potencia de 0.866 en atraso.

• Solución

En la figura 4.29 se muestra el circuito equivalente exacto del sistema que incorpora transformadores ideales. El sistema completo se divide en tres regiones, *A*, *B* y *C*, como se indica.

Región *A*: V_{bA} = 230 V y S_{bA} = 46 000 VA

Luego, I_{bA} = 46 000/230 = 200 A y Z_{bA} = 230/200 = 1.15 Ω

La impedancia por unidad del generador es

$$\hat{Z}_{g,\,pu} = \frac{0.023 + j0.092}{1.15} = 0.02 + j0.08$$

Los parámetros por unidad en el devanado de bajo voltaje del transformador elevador son

$$R_{L,\,pu} = \frac{0.023}{1.15} = 0.02$$

$$X_{L,\,pu} = \frac{0.069}{1.15} = 0.06$$

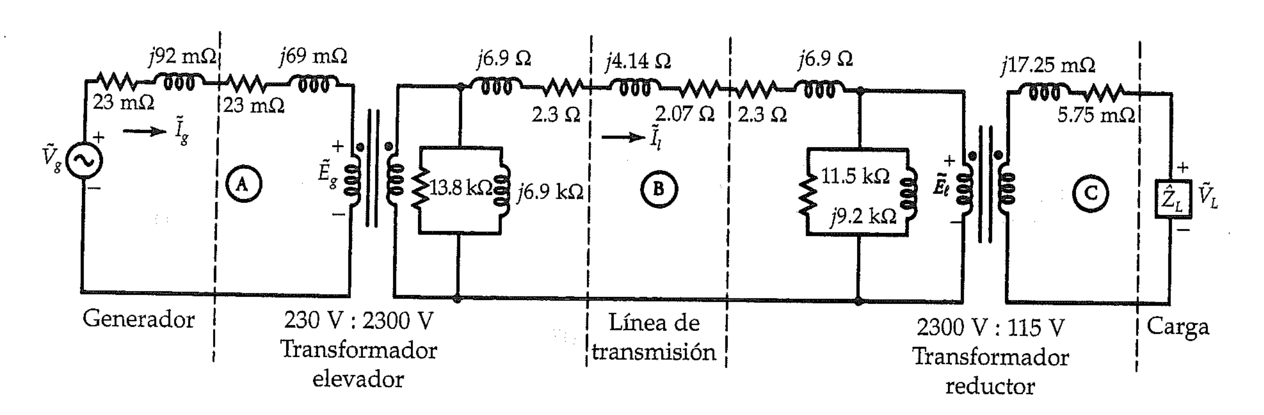


Figura 4.29. Sistema de distribución de potencia del ejemplo 4.9.

Región B: $V_{bB} = 2\,300$ V y $S_{bB} = 46\,000$ VA
Por tanto, $I_{bB} = 46\,000/2\,300$ A y $Z_{bB} = 2\,300/20 = 115\ \Omega$
Los parámetros por unidad en el lado de alto voltaje del transformador elevador son

$$R_{H,\,pu} = \frac{2.3}{115} = 0.02$$
$$X_{H,\,pu} = \frac{6.9}{115} = 0.06$$
$$R_{cH,\,pu} = \frac{13\,800}{115} = 120$$
$$X_{mH,\,pu} = \frac{6900}{115} = 60$$

La impedancia por unidad de la línea de transmisión es

$$\hat{Z}_{\ell,\,pu} = \frac{2.07 + j4.14}{115} = 0.018 + j0.036$$

Los parámetros por unidad en el lado de alto voltaje del transformador reductor son

$$R_{H,\,pu} = \frac{2.3}{115} = 0.02$$
$$X_{H,\,pu} = \frac{6.9}{115} = 0.06$$
$$R_{cH,\,pu} = \frac{11\,500}{115} = 100$$
$$X_{mH,\,pu} = \frac{9200}{115} = 80$$

Región C: $V_{bc} = 115$ V y $S_{bC} = 46\,000$ VA
Por tanto, $I_{bC} = 46\,000/115 = 400$ A y $Z_{bC} = 115/400 = 0.2875\ \Omega$
Finalmente, los parámetros por unidad en el lado de bajo voltaje del transformador reductor son

$$R_{L,\,pu} = \frac{0.00575}{0.2875} = 0.02$$
$$X_{L,\,pu} = \frac{0.01725}{0.2875} = 0.06$$

A plena carga y un factor de potencia de 0.866 en atraso se tiene

$$\tilde{V}_{L,\,pu} = 1\underline{/0^\circ} \quad \text{e} \quad \tilde{I}_{L,\,pu} = 1\underline{/-30^\circ}\cdot$$

Con referencia al circuito equivalente por unidad del sistema que se ilustra en la figura 4.30, puede escribirse el siguiente conjunto de ecuaciones para determinar el voltaje en el generador y la eficiencia conjunta del sistema:

$$\tilde{E}_{\ell,\,pu} = 1\underline{/0^\circ} + (0.02 + j0.06)(1\underline{/-30^\circ}) = 1.048\underline{/2.29^\circ}$$

$$\tilde{I}_{\ell,\,pu} = 1\underline{/-30^\circ} + 1.048\underline{/2.29^\circ}\left[\frac{1}{100} + \frac{1}{j80}\right] = 1.016\underline{/-30.31^\circ}$$

$$\tilde{E}_{g,\,pu} = 1.048\underline{/2.29^\circ}$$

$$+ (1.016\underline{/-30.01^\circ})(0.02 + j0.06 + 0.018 + j0.036 + 0.02 + j0.06)$$

$$= 1.188\underline{/7.21^\circ}$$

$$\tilde{I}_{g,\,pu} = 1.016\underline{/-30.31^\circ} + 1.188\underline{/7.21^\circ}\left[\frac{1}{120} + \frac{1}{j60}\right] = 1.036\underline{/-30.84^\circ}$$

$$\tilde{V}_{g,\,pu} = 1.188\underline{/7.21^\circ} + (1.036\underline{/-30.84^\circ})(0.02 + j0.08 + 0.02 + j0.06)$$
$$= 1.313\underline{/11.08^\circ}$$

a) Luego, el voltaje en el generador es

$$\tilde{V}_g = V_{bA}\tilde{V}_{g,\,pu} = 230 \times 1.313\underline{/11.08^\circ} = 301.99\underline{/11.08^\circ}\text{ V}$$

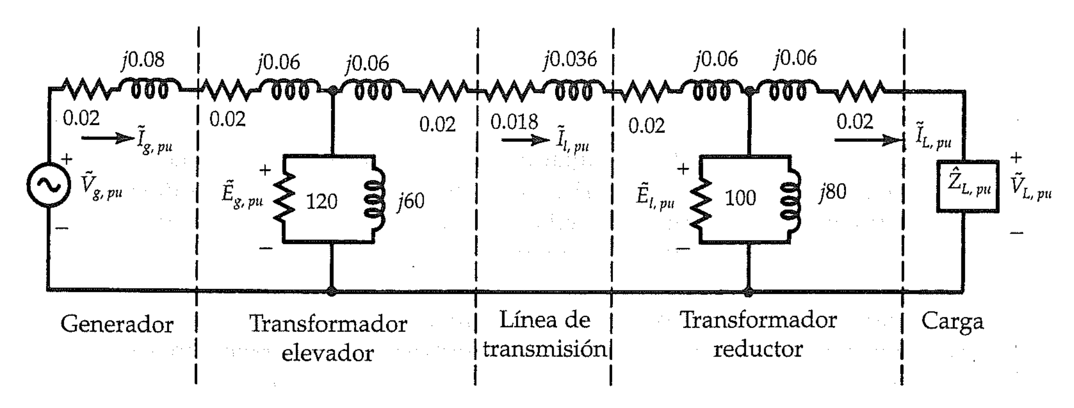


Figura 4.30. Representación del sistema de distribución de potencia de la figura 4.29 en términos de los parámetros por unidad.

b) La corriente suministrada por el generador es

$$\tilde{I}_g = I_{bA}\tilde{I}_{g,\,pu} = 200 \times 1.036\underline{/-30.84^\circ} = 207.2\underline{/-30.84^\circ}\text{ A}$$

c) Sobre una base por unidad, la potencia de salida especificada con un factor de potencia de 0.866 en atraso es de

$$P_{o,\,pu} = 0.866$$

La potencia por unidad suministrada por el generador es

$$P_{in,\,pu} = \text{Re}[(1.313\underline{/11.08^\circ})(1.036\underline{/30.84^\circ})] = 1.012$$

Por tanto, la eficiencia es

$$\eta = \frac{0.866}{1.012} = 0.856 \quad \text{u} \quad 85.6\%$$

■

Ejercicios

4.16. Si $V_{nl,\,pu}$ es el voltaje de salida por unidad en condiciones sin carga, demuestre que la regulación del voltaje de un transformador es $RV = V_{nl,\,pu} - 1$.

4.17. Calcule la regulación del voltaje del sistema completo del ejemplo 4.9.

4.18. Repita el ejercicio 4.4 utilizando el sistema por unidad. ¿Cuál es la regulación del voltaje del transformador?

4.9. El autotransformador

En el transformador de dos devanados que se ha considerado hasta ahora, el devanado primario está aislado eléctricamente del secundario. Los dos devanados están acoplados magnéticamente por medio de un núcleo común. En consecuencia, el principio de inducción magnética es responsable de la transferencia de energía del primario al secundario.

Cuando dos devanados de un transformador están conectados eléctricamente se tiene un *autotransformador*. Un autotransformador puede tener un solo devanado continuo común al primario y al secundario. En forma alternativa, es posible conectar dos o más bobinas devanadas en el mismo núcleo magnético para formar un autotransformador. El principio de operación es el mismo en cualquier caso.

La conexión eléctrica directa entre los devanados asegura que una parte de la energía se transfiere del primario al secundario por *conducción*. El acoplamiento magnético entre los devanados garantiza que parte de la energía también se transfiere por *inducción*.

Los autotransformadores pueden utilizarse para casi todas las aplicaciones en las que se emplea un transformador de dos devanados. La única desventaja es la pérdida de aislamiento eléctrico entre el lado de alto voltaje y el lado de bajo voltaje del autotransformador. En seguida se enumeran algunas de las ventajas de un autotransformador en comparación con el transformador de dos devanados.

1. Es más barato en cuanto a costo inicial que un transformador convencional de dos devanados con especificaciones semejantes.
2. Entrega más potencia que un transformador de dos devanados con dimensiones físicas semejantes.
3. Para especificaciones de potencia similares, un autotransformador es más eficiente que un transformador de dos devanados.
4. Un autotransformador requiere una corriente de excitación más baja que un transformador de dos devanados para establecer el mismo flujo en el núcleo.

Empezaremos a analizar un autotransformador conectando un transformador ideal de dos devanados como autotransformador. De hecho, como se ilustra en la figura 4.31 hay cuatro formas posibles de conectar un transformador de dos devanados como autotransformador.

Considere el circuito que se muestra en la figura 4.31*a*. El transformador de dos devanados está conectado como autotransformador reductor. Observe que el devanado secundario del transformador de dos devanados es ahora el devanado en común del autotransformador. En condiciones ideales se tiene

$$\tilde{V}_{1a} = \tilde{E}_{1a} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$$
$$\tilde{V}_{2a} = \tilde{E}_{2a} = \tilde{E}_2$$
$$\frac{\tilde{V}_{1a}}{\tilde{V}_{2a}} = \frac{\tilde{E}_{1a}}{\tilde{E}_{2a}} = \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2}{\tilde{E}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + a = a_T \tag{4.39}$$

donde $a = N_1/N_2$ es la relación a de un transformador de dos devanados y $a_T = 1 + a$ es la relación a del autotransformador en estudio. La relación a para las demás conexiones podría calcularse de la misma forma. Advierta que a_T no es la misma para todas las conexiones.

En un autotransformador ideal, la fuerza magnetomotriz (fmm) primaria debe ser igual y opuesta a la fmm secundaria. Es decir,

$$(N_1 + N_2)I_{1a} = N_2 I_{2a}$$

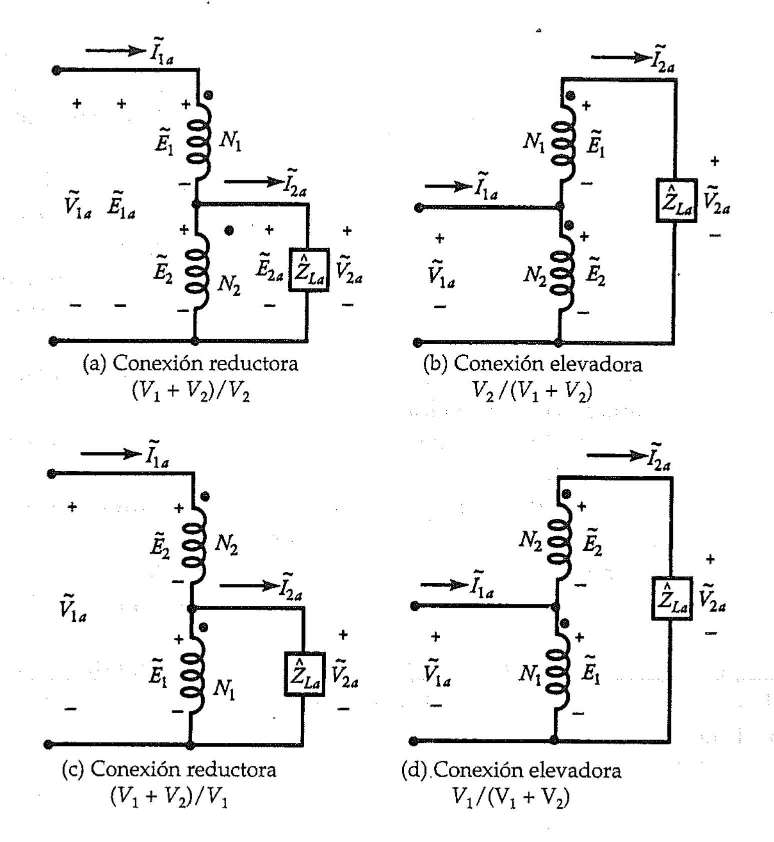


Figura 4.31. Formas posibles de conectar un transformador de dos devanados como autotransformador.

De esta ecuación se obtiene

$$\frac{I_{2a}}{I_{1a}} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + a = a_T \tag{4.40}$$

Luego, la potencia aparente suministrada por un transformador ideal a la carga S_{oa}, es

$$\begin{aligned} S_{oa} &= V_{2a} I_{2a} \\ &= \left[\frac{V_{1a}}{a_T}\right][a_T I_{1a}] \\ &= V_{1a} I_{1a} \\ &= S_{ina} \end{aligned} \tag{4.41}$$

donde S_{ina} es la potencia de entrada aparente al autotransformador. La ecuación anterior sencillamente indica que en condiciones ideales la potencia de entrada es igual a la potencia de salida.

A continuación vamos a expresar la potencia de salida aparente en términos de los parámetros de un transformador de dos devanados. Para la configuración en estudio,

$$V_{2a} = V_2$$

e

$$I_{2a} = a_T I_{1a} = (a+1)I_{1a}$$

Sin embargo, para la carga especificada, $I_{1a} = I_1$. Luego,

$$S_{oa} = V_2 I_1 (a+1)$$

$$= V_2 I_2 \frac{a+1}{a} = S_o \left[1 + \frac{1}{a}\right]$$

donde $S_o = V_2 I_2$ es la potencia de salida aparente de un transformador de dos devanados. Esta potencia está asociada con el devanado común del autotransformador. Por tanto, ésta es la potencia transferida por inducción a la carga en un autotransformador. El resto de la potencia, S_o/a en este caso, se conduce directamente de la fuente a la carga y se denomina *potencia de conducción*. Por ende, un transformador de dos devanados entrega más potencia cuando se conecta como autotransformador.

Ejemplo 4.10

Se conecta un transformador de distribución de 24 kVA y 2 400/240 V como autotransformador. Para cada combinación posible, calcule *a)* el voltaje del devanado primario, *b)* el voltaje del devanado secundario, *c)* la relación de transformación, y *d)* la especificación nominal del autotransformador.

● Solución

De la información proporcionada sobre el transformador de dos devanados se concluye que

$$V_1 = 2400 \text{ V}, \quad V_2 = 240 \text{ V}, \quad S_o = 24 \text{ kVA} \quad I_1 = 10 \text{ A}, \quad \text{e} \quad I_2 = 100 \text{ A}$$

a) Para la operación del autotransformador que se muestra en la figura 4.31*a* se tiene

$$V_{1a} = 2400 + 240 = 2640 \text{ V}$$

$$V_{2a} = 240 \text{ V}$$

$$a_T = \frac{2640}{240} = 11$$

$$S_{oa} = V_{2a} I_{2a} = V_{1a} I_{1a} = V_{1a} I_1$$

$$= 2640 \times 10 = 26\,400 \text{ VA} \quad \text{o} \quad 26.4 \text{ kVA}$$

Por consiguiente, la especificación nominal del autotransformador es de 26.4 kVA, 2 640/240 V.

b) Para la conexión del autotransformador que se muestra en la figura 4.31*b* se tiene

$$V_{1a} = 240 \text{ V}$$

$$V_{2a} = 2400 + 240 = 2640 \text{ V}$$

$$a_T = \frac{240}{2640} = 0.091$$

$$S_{oa} = V_{2a}I_{2a} = V_{2a}I_1$$

$$= 2640 \times 10 = 26\,400 \text{ VA} \quad \text{o} \quad 26.4 \text{ kVA}$$

La especificación nominal del autotransformador es 26.4 kVA, 240/2 640 V.

c) Si la conexión de un autotransformador es como la que se aprecia en la figura 4.31*c* se tiene

$$V_{1a} = 240 + 2400 = 2640 \text{ V}$$

$$V_{2a} = 2400 \text{ V}$$

$$a_T = \frac{2640}{2400} = 1.1$$

$$S_{oa} = V_{2a}I_{2a} = V_{1a}I_{1a} = V_{1a}I_2$$

$$= 2640 \times 100 = 264\,000 \text{ VA} \quad \text{o} \quad 264 \text{ kVA}$$

La especificación nominal del autotransformador es 264 kVA, 2 640/2 400 V.

d) Finalmente, si el autotransformador se conecta según se muestra en la figura 4.31*d* se tiene

$$V_{1a} = 2400 \text{ V}$$

$$V_{2a} = 2400 + 240 = 2640 \text{ V}$$

$$a_T = \frac{2400}{2640} = 0.91$$

$$S_{oa} = V_{2a}I_{2a} = V_{2a}I_2$$

$$= 2640 \times 100 = 264\,000 \text{ VA} \quad \text{o} \quad 264 \text{ kVA}$$

La especificación nominal del autotransformador es 264 kVA, 2 400/2 640 V. Observe que cuando se conecta como autotransformador (figs. 4.31*c* o *d*), la especificación de potencia de un transformador de dos devanados se incrementa 11 veces.

■

Autotransformador no ideal

El circuito equivalente de un autotransformador no ideal puede obtenerse incluyendo las resistencias de los devanados, las reactancias de dispersión, la resistencia de

pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización, como se ilustra en la figura 4.32. Es posible analizar cada circuito de la figura 4.32 tal cual está trazado u obtener un circuito equivalente como se observa desde el lado primario o el secundario, por medio de las técnicas estudiadas previamente. En la figura 4.33 se describe el circuito equivalente como se observa desde el lado primario del autotransformador para cada conexión. Se invita encarecidamente al lector a que verifique cada circuito a fin de que adquiera confianza al hacer las transformaciones.

Ejemplo 4.11

Un transformador de dos devanados, 720 VA y 360/120 V tiene las constantes siguientes: $R_H = 18.9\ \Omega$, $X_H = 21.6\ \Omega$, $R_L = 2.1\ \Omega$, $X_L = 2.4\ \Omega$, $R_{cH} = 8.64\ \text{k}\Omega$ y $X_{mH} = 6.84\ \text{k}\Omega$. El transformador se conecta como autotransformador elevador de 120/480 V. Si el autotransformador entrega la carga plena con un factor de potencia de 0.707 en adelanto, determine su eficiencia y su regulación del voltaje.

- Solución

En la figura 4.34 se aprecia el circuito equivalente de un transformador elevador de 120/480 V. Su relación de transformación es

$$a_T = \frac{120}{480} = 0.25$$

La relación de transformación de un transformador de dos devanados es

$$a = \frac{360}{120} = 3$$

Luego, la resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización en el lado de bajo voltaje son

$$R_{cL} = \frac{8640}{3^2} = 960\ \Omega$$

$$X_{mL} = \frac{6840}{3^2} = 760\ \Omega$$

Con plena carga, la corriente de la carga es

$$I_{2a} = I_H = \frac{720}{360} = 2\ \text{A}$$

Por tanto,

$$\tilde{I}_{2a} = 2\underline{/45^\circ}\ \text{A}$$

$$\tilde{I}_{pa} = \frac{\tilde{I}_{2a}}{a_T} = \frac{2\underline{/45^\circ}}{0.25} = 8\underline{/45^\circ}\ \text{A}$$

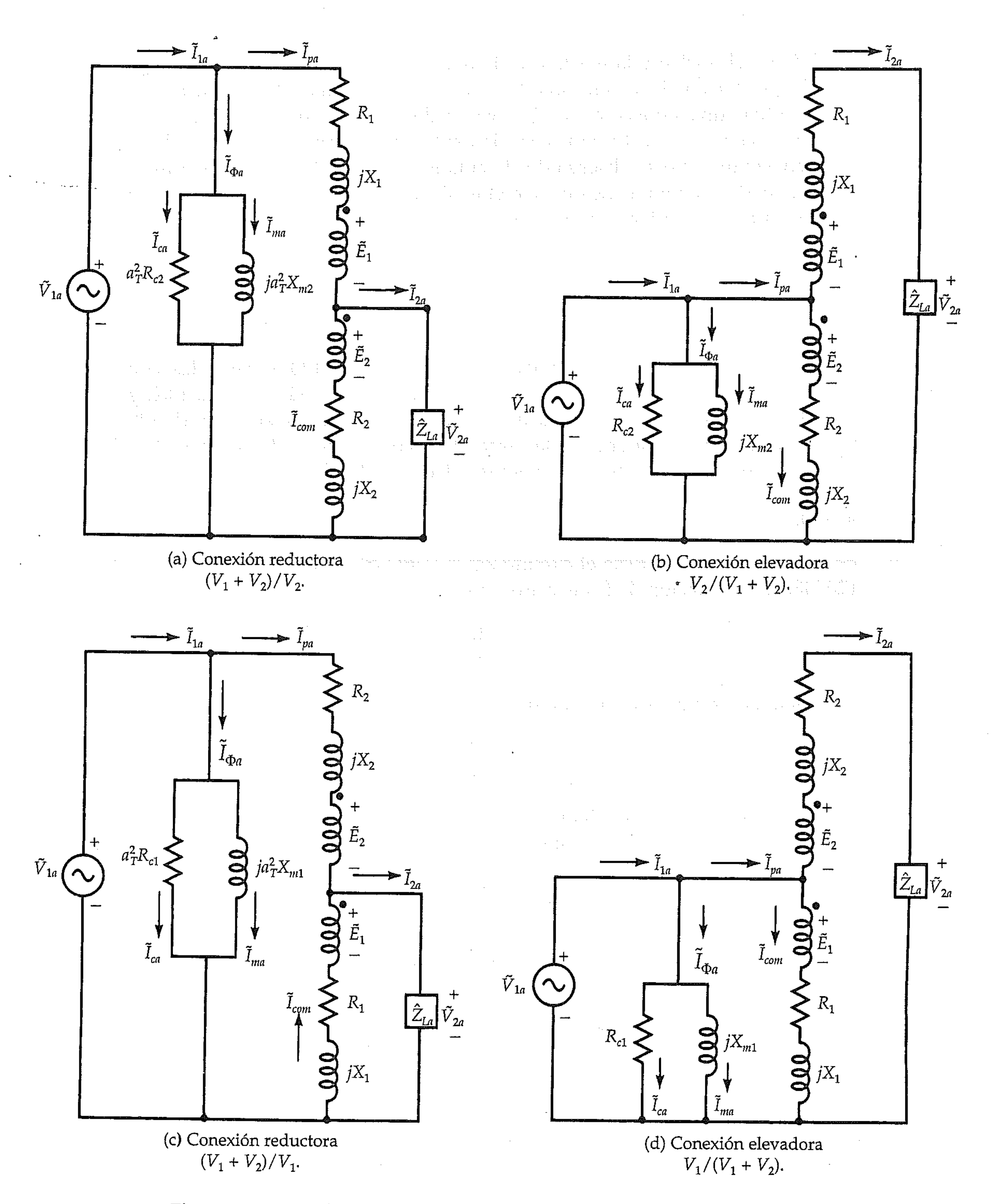
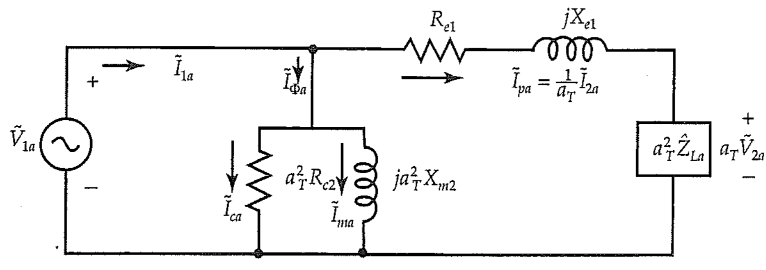
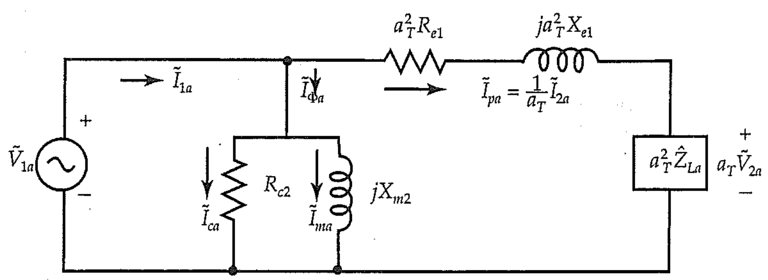


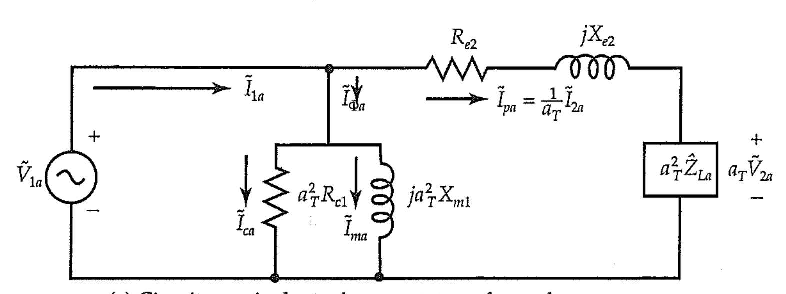
Figura 4.32. Transformador de dos devanados conectado como autotransformador.



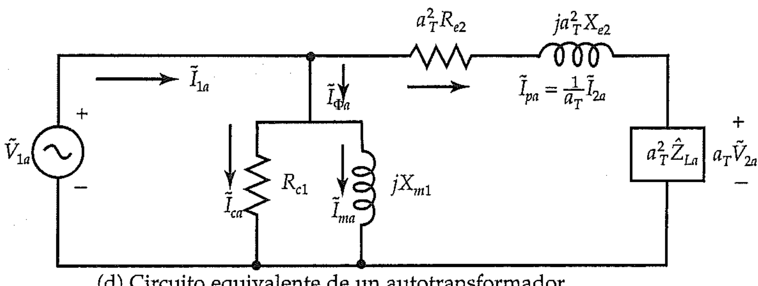
(a) Circuito equivalente de un autotransformador reductor $(V_1 + V_2)/V_2$ observado desde el lado primario.



(b) Circuito equivalente de un autotransformador el vador V2/(V1 + V2) observado desde el lado primario.



(c) Circuito equivalente de un autotransformador reductor $(V_1 + V_2)/V_1$ observado desde el lado primario.



(d) Circuito equivalente de un autotransformador elevador $V_1/(V_1 + V_2)$ observado desde el lado primario.

Figura 4.33. Circuitos equivalentes de un autotransformador.

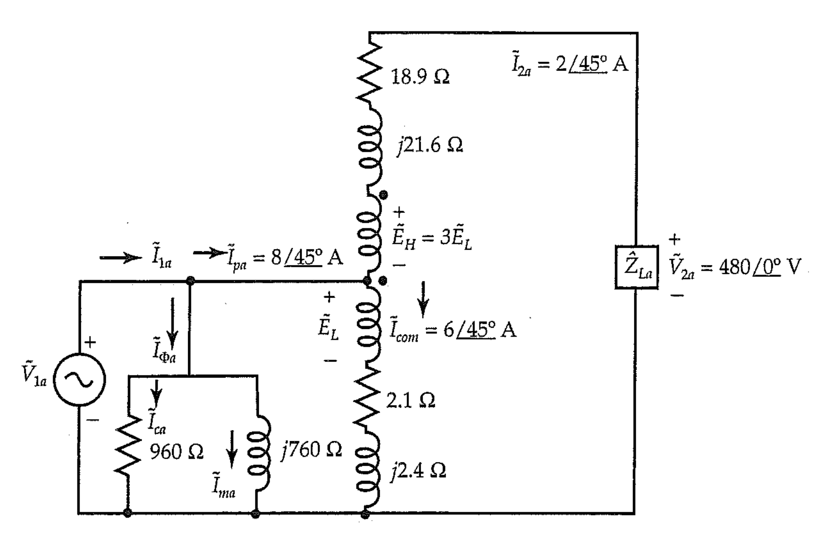


Figura 4.34. Circuito exacto equivalente del autotransformador elevador del ejemplo 4.11.

La corriente a través del devanado común es

$$\tilde{I}_{\text{com}} = \tilde{I}_{pa} - \tilde{I}_{2a} = 6 \quad 6\underline{/45°}\text{ A}$$

Además, $\tilde{E}_H = a\tilde{E}_L = 3\tilde{E}_L$.

Ahora se puede obtener $\tilde{E}_L$ aplicando la carga de valor conocido al lazo de salida. Es decir,

$$4\tilde{E}_L = \tilde{I}_{2a}(R_H + jX_H) + \tilde{V}_{2a} - \tilde{I}_{\text{com}}(R_L + jX_L)$$

$$= 2\underline{/45°}(18.9 + j21.6) + 480 - 6\underline{/45°}(2.1 + j2.4)$$

o

$$\tilde{E}_L = 119.745\underline{/4.57°}\text{ V}$$

Luego,

$$\tilde{V}_{1a} = \tilde{E}_L + \tilde{I}_{\text{com}}(R_L + jX_L)$$

$$= 119.745\underline{/4.57°} + 6\underline{/45°}(2.1 + j2.4)$$

$$= 121.513\underline{/13.63°}\text{ V}$$

Las corrientes de pérdida en el núcleo, magnetización y excitación son

$$\tilde{I}_{ca} = \frac{\tilde{V}_{1a}}{R_{cL}} = \frac{121.513\underline{/13.63°}}{960} = 0.127\underline{/13.63°}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_{ma} = \frac{\tilde{V}_{1a}}{jX_{mL}} = \frac{121.513\underline{/13.63°}}{j760} = 0.160\underline{/-76.37°}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_{\phi a} = \tilde{I}_{ca} + \tilde{I}_{ma} = 0.127\underline{/13.63°} + 0.160\underline{/-76.37°}$$

$$= 0.204\underline{/-38°}\text{ A}$$

Por tanto, $\tilde{I}_{1a} = \tilde{I}_{pa} + \tilde{I}_{\phi a} = 8\angle 45° + 0.204\angle -38° = 8.027\angle 43.56°$ A

$$P_o = \text{Re}[\tilde{V}_{2a}\tilde{I}^*_{2a}] = \text{Re}[480 \times 2\angle -45°] = 678.82 \text{ W}$$

$$P_{in} = \text{Re}[\tilde{V}_{1a}\tilde{I}^*_{1a}] = \text{Re}[(121.513\angle 13.63°)(8.027\angle -43.56°)]$$

$$= 845.3 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{678.82}{845.3} = 0.803 \quad \text{u} \quad 80.3\%$$

Si ahora se elimina la carga, el voltaje sin carga en el secundario del autotransformador es

$$\tilde{V}_{2anL} = \frac{\tilde{V}_{1a}}{a_T} = \frac{121.513\angle 13.63°}{0.25} = 486.056\angle 13.63° \text{ V}$$

A continuación puede calcularse la regulación del voltaje como

$$RV\% = \frac{V_{2anL} - V_{2a}}{V_{2a}} \times 100 = \frac{486.056 - 480}{480} \times 100 = 1.26\%$$

■

Ejercicios

4.19. Repita el ejemplo 4.11 si el transformador de dos devanados se conecta como autotransformador reductor de 480/120 V.

4.20. Repita el ejemplo 4.11 si el transformador de dos devanados se conecta como autotransformador reductor de 480/360 V.

4.21. Repita el ejemplo 4.11 si el transformador de dos devanados se conecta como autotransformador elevador de 360/480 V.

4.10. Transformadores trifásicos

Como la mayor parte de la potencia que se genera y transmite a largas distancias es del tipo trifásico, pueden utilizarse tres transformadores monofásicos exactamente iguales para formar un transformador trifásico. Sin embargo, por razones económicas, un transformador trifásico se diseña para tener sus seis devanados en un núcleo magnético común. Un transformador trifásico con núcleo magnético común también puede ser del tipo núcleo (fig. 4.35) o acorazado (fig. 4.36).

Puesto que el flujo de tercera armónica que crea cada devanado está en fase, es preferible un transformador de tipo acorazado porque proporciona una trayectoria externa para dicho flujo. En otras palabras, las formas de las ondas del voltaje resul-

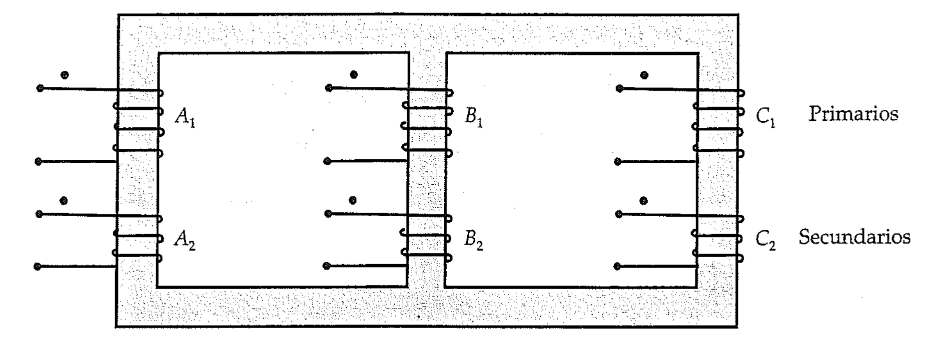


Figura 4.35. Transformador trifásico tipo núcleo.

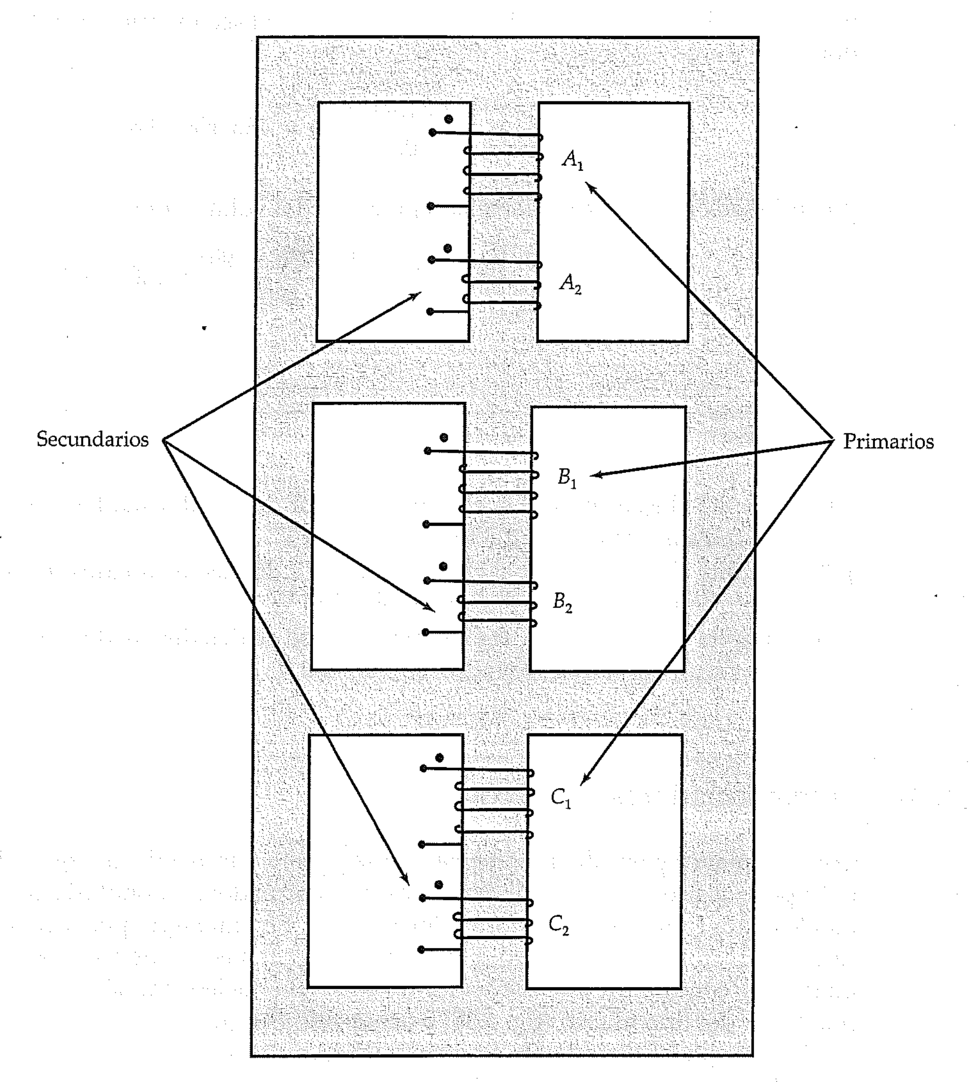


Figura 4.36. Transformador trifásico tipo acorazado.

tan menos distorsionadas para un transformador tipo acorazado que para uno tipo núcleo con especificaciones semejantes.

Los tres devanados en cada lado de un transformador trifásico pueden estar conectados en estrella (Y) o en delta (Δ). Por tanto, hay cuatro formas posibles de conectar un transformador trifásico: Y/Y, Y/Δ, Δ/Y y Δ/Δ. A continuación se analizan algunas ventajas y desventajas de cada conexión.

Conexión Y/Y

En la figura 4.37 se muestra una conexión Y/Y para los devanados primario y secundario de un transformador trifásico. El voltaje de línea a línea en cada lado de un transformador trifásico es $\sqrt{3}$ veces el voltaje nominal del transformador monofásico. La ventaja principal de una conexión Y/Y es que se tiene acceso a la terminal neutra (comúnmente llamada *neutro*) en cada lado, la cual, si se desea, puede conectarse a tierra. Si no se conectan a tierra las terminales neutras, la operación de una conexión Y/Y sólo es satisfactoria si la carga trifásica está equilibrada. El aislamiento eléctrico se esfuerza únicamente alrededor de 58% del voltaje de línea en un transformador conectado en Y.

Como la mayoría de los transformadores se diseñan para operar en o por encima de la inflexión de la curva, un diseño tal ocasiona que las fem inducidas y las corrientes se deformen. La razón es la siguiente: aunque las corrientes de excitación aún están 120° fuera de fase una respecto de la otra, las formas de sus ondas ya no son senoidales. Por tanto, estas corrientes no suman cero. Si los neutros no están conectados a tierra, las corrientes son forzadas a sumar cero. Así, afectan las formas de onda de las fem inducidas.

Conexión Δ/Δ

En la figura 4.38 se describen tres transformadores con los devanados primario y secundario conectados en Δ/Δ. El voltaje de línea a línea en cada lado es igual al volta-

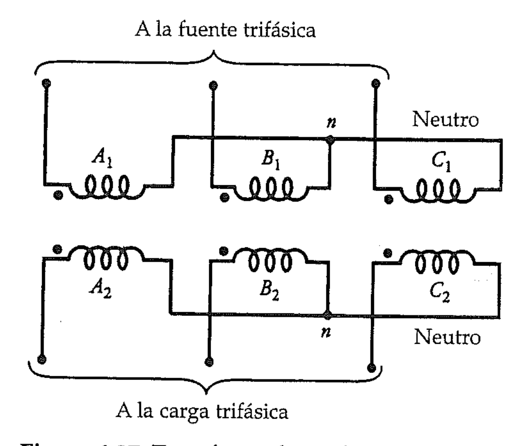


Figura 4.37. Transformador trifásico conectado en Y/Y.

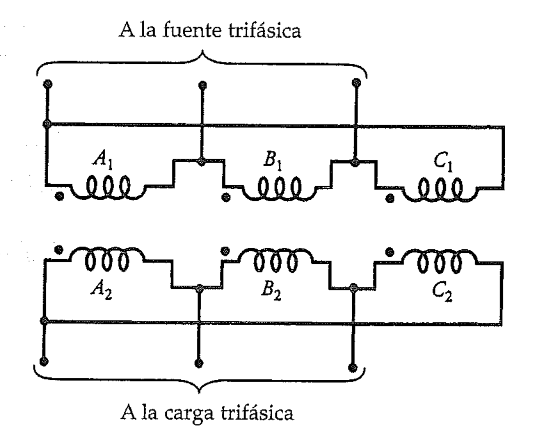


Figura 4.38. Transformador trifásico conectado en Δ/Δ.

je de fase correspondiente. Por tanto, este arreglo es útil cuando los voltajes no son muy altos. La ventaja de esta conexión es que aun en condiciones de cargas no equilibradas los voltajes de la carga trifásica permanecen sustancialmente iguales. La desventaja de una conexión Δ/Δ es la ausencia de una terminal neutra en cada lado. Otra desventaja radica en que el aislamiento eléctrico se esfuerza al voltaje de línea. Por ende, un devanado conectado en Δ requiere un aislamiento más caro que otro conectado en Y para la misma especificación de potencia.

Teóricamente, una conexión Δ/Δ puede estudiarse transformándola en una conexión Y/Y simulada mediante transformaciones Δ a Y.

Conexión Y/Δ

Como se aprecia en la figura 4.39, esta conexión es muy adaptable para aplicaciones reductoras. La corriente en el devanado secundario es alrededor de 58% de la corriente de carga. Los voltajes en el lado primario se toman entre la línea y el neutro, mientras que los voltajes en el lado secundario son de línea a línea. Por tanto, el voltaje y la corriente en el primario están fuera de fase con el voltaje y la corriente en el secundario. En una conexión Y/Δ, la distorsión de la onda de los voltajes inducidos no es tan drástica como en un transformador conectado en Y/Y cuando el neutro no está conectado a tierra. La razón de ello es que las corrientes distorsionadas en el primario dan origen a una corriente circulante en el secundario conectado en Δ. La corriente circulante actúa más como corriente magnetizadora y tiende a corregir la distorsión.

Conexión Δ/Y

Como se ilustra en la figura 4.40, esta conexión es apropiada para una aplicación elevadora. Sin embargo, actualmente se aprovecha para satisfacer los requerimientos

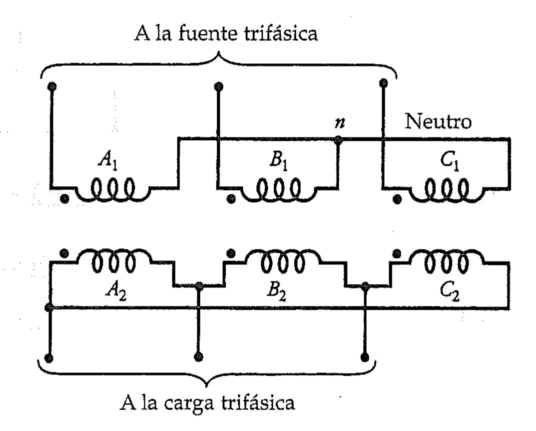


Figura 4.39. Transformador trifásico conectado en Y/Δ.

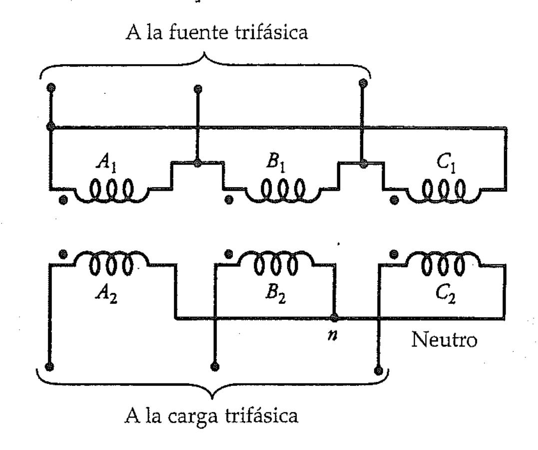


Figura 4.40. Transformador trifásico conectado en Δ/Y.

tanto de las cargas trifásicas como monofásicas. En este caso, se usa un secundario de cuatro conductores. Las cargas monofásicas se alimentan por los tres circuitos línea a neutro. Invariablemente se intenta distribuir las cargas monofásicas casi por igual entre las tres fases.

Análisis de un transformador trifásico

En condiciones de estado estable, un transformador trifásico opera exactamente igual que tres transformadores monofásicos interconectados. Por tanto, en la explicación que sigue se supone que se tienen tres transformadores monofásicos idénticos conectados para formar uno trifásico. Comprender esto ayuda a desarrollar el circuito equivalente por fase de un transformador trifásico.

También se supondrá que el transformador trifásico alimenta una carga equilibrada, y que las formas de las ondas de las fem inducidas son senoidales puras. En otras palabras, las corrientes de magnetización no se distorsionan y no hay terceras armónicas.

Es posible examinar un transformador trifásico en la misma forma en que se analizó un circuito trifásico, es decir, puede emplearse el circuito equivalente por fase de un transformador. Es posible reemplazar un devanado con conexión en Δ de un transformador trifásico con un devanado equivalente conectado en Y utilizando una transformación Δ a Y. Si $\hat{Z}_\Delta$ es la impedancia en un devanado conectado en Δ, la impedancia equivalente $\hat{Z}_Y$ en un devanado conectado en Y es

$$\hat{Z}_Y = \frac{\hat{Z}_\Delta}{3} \tag{4.42}$$

Por otra parte, si $\tilde{V}_L$ es el voltaje línea a línea en un devanado conectado en Y, el voltaje línea a neutro $\tilde{V}_n$ es

$$\tilde{V}_n = \frac{\tilde{V}_L}{\sqrt{3}} \underline{/\pm 30^\circ} \tag{4.43}$$

donde el signo + corresponde a la secuencia de fase negativa (levógira) y el signo − es para la secuencia de fase positiva (dextrógira).

Los ejemplos siguientes muestran cómo analizar un sistema de transformadores trifásicos equilibrados. A menos que se especifique otra cosa, se supondrá que los voltajes aplicados en el lado primario siguen la secuencia de fase positiva.

Ejemplo 4.12

Un transformador trifásico se ensambla conectando tres transformadores monofásicos de 720 VA y 360/120 V. Las constantes para cada transformador son $R_H = 18.9\ \Omega$, $X_H = 21.6\ \Omega$, $R_L = 2.1\ \Omega$, $X_L = 2.4\ \Omega$, $R_{cH} = 8.64$ kΩ y $X_{mH} = 6.84$ kΩ. Para cada una de las cuatro configuraciones, determine el voltaje nominal y las especificaciones de potencia del transformador trifásico. Trace la disposición de los devanados y el circuito equivalente por fase para cada configuración.

- Solución

La especificación de potencia de un transformador trifásico para cada conexión es

$$S_{3\phi} = 3 \times 720 = 2160 \text{ VA} \quad \text{o} \quad 2.16 \text{ kVA}$$

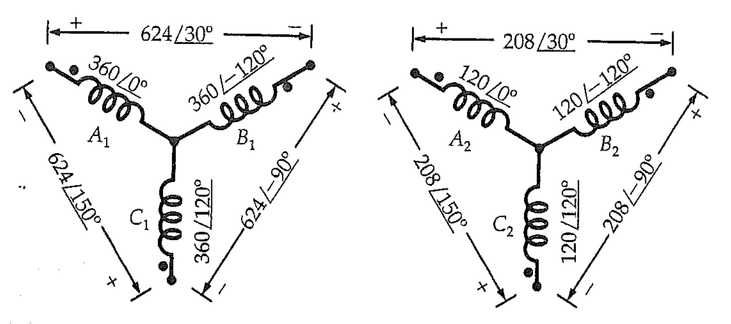
a) Para una conexión Y/Y, los valores nominales de los voltajes de línea en los lados primario y secundario son

$$V_{1L} = \sqrt{3} \times 360 = 623.54 \text{ V}$$
$$V_{2L} = \sqrt{3} \times 120 = 207.85 \text{ V}$$

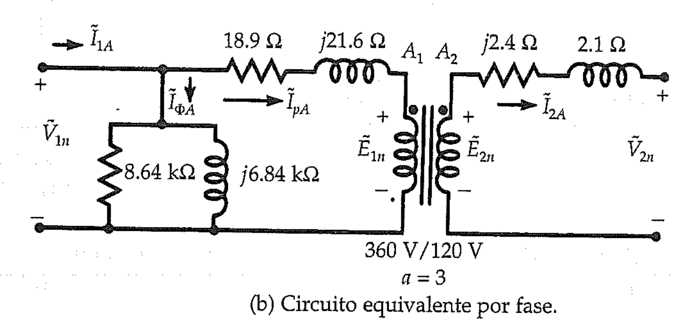
Luego, las especificaciones nominales de un transformador trifásico son

2.16 kVA 624/208 V Conexión Y/Y

La disposición de los devanados y el circuito equivalente por fase se muestran en las figuras 4.41*a* y *b*, respectivamente.



(a) Disposición de los devanados, así como voltajes de fase y de línea.



(b) Circuito equivalente por fase.

Figura 4.41. Disposición de los devanados y circuito equivalente por fase de un transformador trifásico conectado en Y/Y.

b) Los valores nominales de los voltajes de línea, para una conexión Δ/Δ son

$$V_{1L} = 360 \text{ V}$$
$$V_{2L} = 120 \text{ V}$$

Por tanto, las especificaciones nominales de un transformador trifásico son

2.16 kVA 360/120 V Conexión Δ/Δ

Las conexiones de los devanados, la representación equivalente Y/Y y el circuito equivalente por fase se ilustran en las figuras 4.42*a*, *b*, y *c*, respectivamente.

c) Cuando se conectan los devanados primario y secundario de tres transformadores monofásicos para formar una conexión Y/Δ trifásica, las especificaciones nominales del transformador trifásico son

2.16 kVA 624/120 V Conexión Y/Δ

En la figura 4.43*a* se muestran las conexiones reales de los devanados. Puesto que entre los dos devanados acoplados de cada transformador monofásico existe acoplamiento magnético, los voltajes de fase en el lado primario (conexión en Y) están en fase con los voltajes de línea en el lado secundario (conexión en Δ) y la relación *a* es 3 (360/120). Por la misma razón, las corrientes de fase en el devanado conectado en Δ en el lado secundario están en fase con las corrientes de fase (o de línea) en el lado primario conectado en Y.

También es posible representar un devanado secundario conectado en Δ por medio de su conexión en Y equivalente, como se muestra en la figura 4.43*b*, y analizar el transformador trifásico por fase. En la figura 4.43*c* se aprecia tal circuito equivalente por fase. Además, también es posible usar la conexión Y/Y simulada para efectuar las transformaciones de voltaje y corriente de un lado del transformador al otro, al redefinir la relación *a* simplemente como la razón de los voltajes por fase de la conexión Y/Y simulada. En este caso, la relación *a* es 5.196. Con base en la figura 4.43*b* también es evidente que el voltaje de fase del devanado primario conectado en Y se adelanta en 30° al voltaje de fase simulado con conexión en Y del devanado conectado en Δ, para la secuencia de fase que se supuso positiva. Con lo anteriormente expuesto, es posible expresar de manera general $\tilde{E}_{1n}$ en términos de $\tilde{E}_{2n}$, como

$$\tilde{E}_{1n} = a\tilde{E}_{2n}\underline{/30^\circ} \tag{4.44}$$

donde, para este ejemplo, $a = 5.196$.

Como ya se indicó, la corriente de fase en el devanado secundario conectado en Δ está en fase con la corriente de fase (o de línea) del devanado primario conectado en Y. Sin embargo, para la secuencia de fase positiva la corriente de fase de un devanado conectado en Δ se adelanta en 30° a la corriente de fase (o de línea) de su devanado equivalente conectado en Y. Tal desplazamiento de fase permite definir las relaciones entre las corrientes $\tilde{I}_{pA}$ e $\tilde{I}_{2A}$ de la conexión equivalente Y/Y como

$$\tilde{I}_{pA} = \frac{1}{a}\tilde{I}_{2A}\underline{/30^\circ} \tag{4.45}$$

d) Cuando los devanados primario y secundario de los tres transformadores monofásicos se conectan para formar una conexión trifásica Δ/Y, las especificaciones nominales del transformador trifásico son

2.16 kVA 360/208 V Conexión Δ/Y

En la figura 4.44*a* se muestran las conexiones reales de los devanados. Una vez más, como existe acoplamiento magnético entre los dos devanados acoplados de cada transformador monofásico, los voltajes de fase en el lado secundario (conexión en Y) están en fase con los voltajes de línea en el lado primario (conexión en Δ) y la relación a es 3 (360/120). Asimismo, las corrientes de fase (o de línea) en el lado secundario conectado en Y están en fase con las corrientes de fase en el lado primario conectado en Δ.

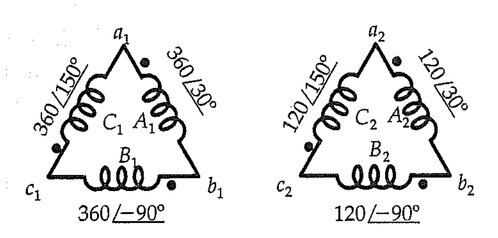
También es posible representar un devanado primario conectado en Δ por medio de su conexión en Y equivalente, como se muestra en la figura 4.44*b*, y analizar el transformador trifásico por fase. En la figura 4.44*c* se presenta tal circuito equivalente por fase. Además, también puede usarse la conexión simulada Y/Y para efectuar las transformaciones de voltaje y de corriente de un lado del transformador al otro, al redefinir la relación a como la razón de los voltajes por fase de la conexión simulada Y/Y. En este caso, la relación a es 1.732. También es evidente por la figura 4.44*b* que el voltaje de fase del devanado secundario real conectado en Y se adelanta en 30° al voltaje de fase del devanado primario simulado conectado en Y, para la secuencia de fase que se supuso positiva. Luego, para una conexión Δ/Y de un transformador trifásico, el voltaje del devanado primario de su conexión Y/Y equivalente se atrasa en 30° respecto del voltaje del devanado secundario. Por tanto, es posible expresar $\tilde{E}_{1n}$ en términos de $\tilde{E}_{2n}$ como

$$\tilde{E}_{1n} = a\tilde{E}_{2n}\underline{/-30^\circ} \qquad (4.46)$$

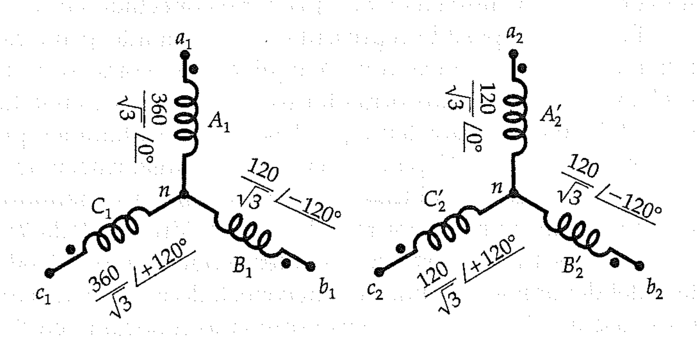
donde, para este ejemplo, $a = 1.732$.

La corriente de fase de un devanado real conectado en Δ en el lado primario está en fase con la corriente de fase (o de línea) de un devanado real conectado en Y en el lado secundario. Sin embargo, para una secuencia de fase positiva, la corriente de fase de un devanado conectado en Δ se adelanta en 30° a la corriente de fase (o de línea) de su devanado equivalente conectado en Y. Por tanto, la corriente de fase (o de línea) de un devanado equivalente conectado en Y en el lado primario se atrasa en 30° respecto de la corriente de fase del devanado real conectado en Y en el lado secundario. Tal desplazamiento de fase permite definir la relación entre las corrientes $\tilde{I}_{pA}$ e $\tilde{I}_{2A}$ como

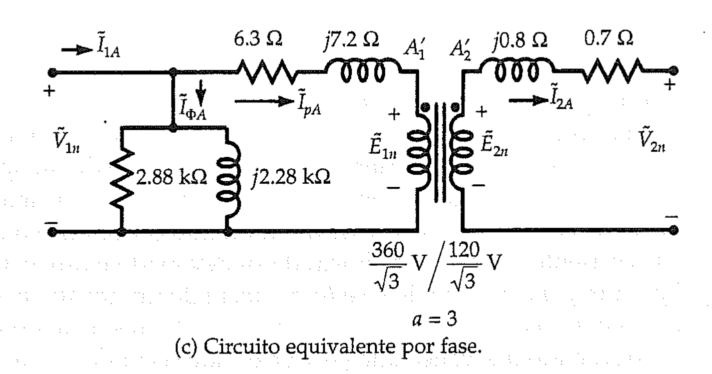
$$\tilde{I}_{pA} = \frac{1}{a}\tilde{I}_{2A}\underline{/-30^\circ} \qquad (4.47)$$



(a) Disposición de los devanados.

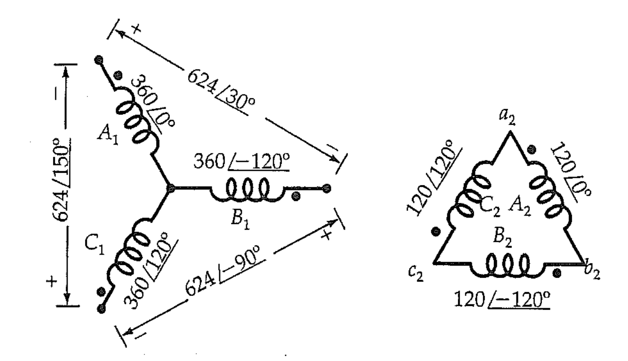


(b) Representación equivalente Y/Y.

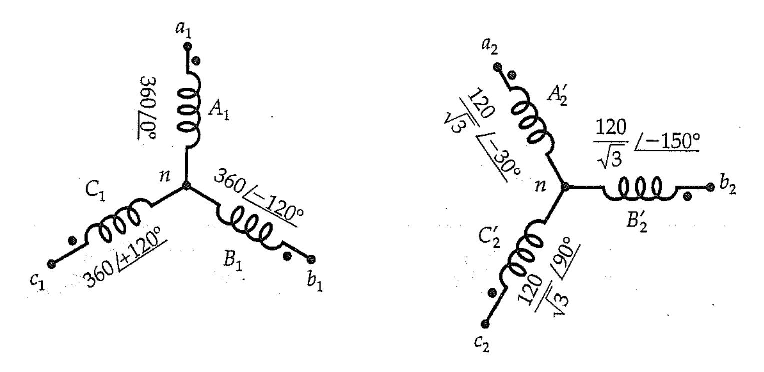


(c) Circuito equivalente por fase.

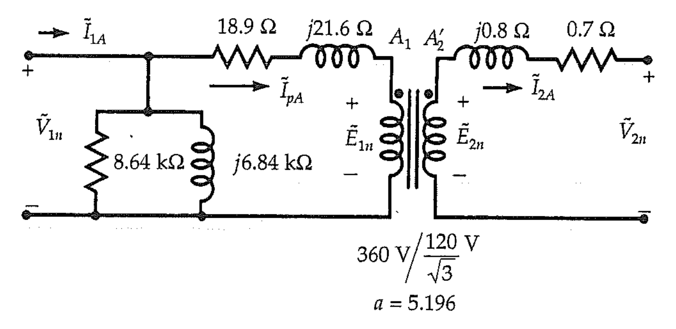
Figura 4.42 Conexiones de los devanados: representación en Y/Y equivalente y circuito equivalente por fase de un transformador trifásico conectado en Δ/Δ.



(a) Disposición de los devanados.

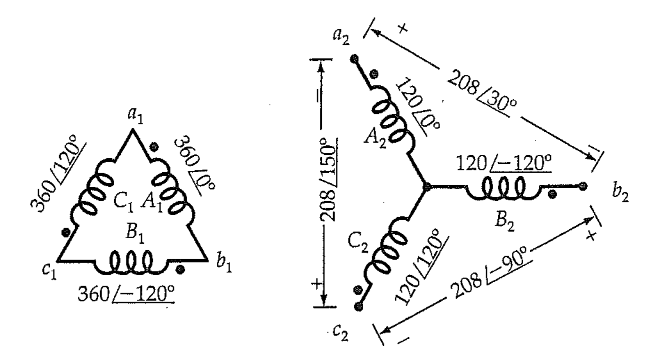


(b) Representación en Y/Y equivalente.

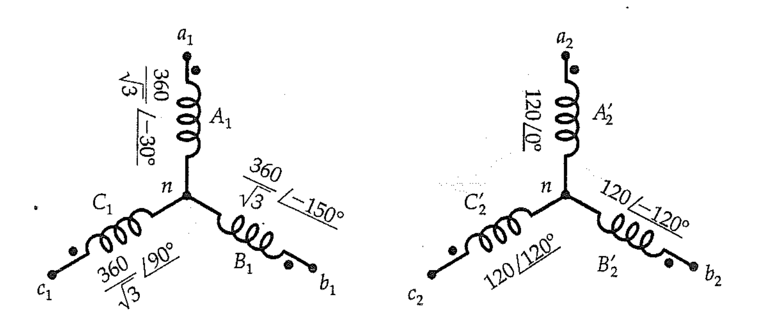


(c) Circuito equivalente por fase.

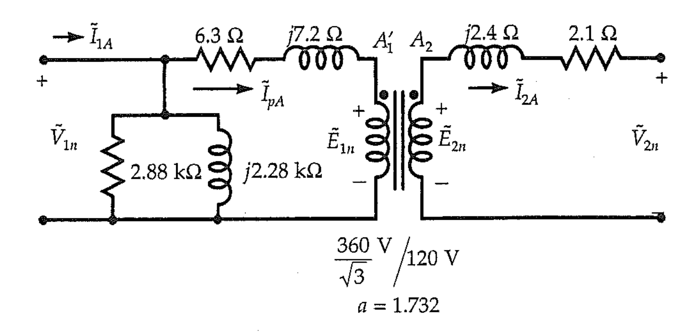
Figura 4.43. Conexiones de los devanados: representación en Y/Y equivalente y circuito equivalente por fase de un transformador trifásico conectado en Y/Δ.



(a) Disposición de los devanados.



(b) Representación en Y/Y equivalente.



(c) Circuito equivalente por fase.

Figura 4.44. Conexiones de los devanados: representación en Y/Y equivalente y circuito equivalente por fase de un transformador trifásico conectado en Δ/Y.

Con el ejemplo siguiente se muestra cómo analizar un transformador trifásico.

■

Ejemplo 4.13

Tres transformadores monofásicos, cada uno con especificaciones de 12 kVA, 120/240 V y 60 Hz se conectan para formar una conexión Y/Δ trifásica elevadora. Los parámetros de cada transformador son R_H = 133.5 mΩ, X_H = 201 mΩ, R_L = 39.5 mΩ, X_L = 61.5 mΩ, R_{cL} = 240 Ω y X_{mL} = 290 Ω. ¿Cuáles son las especificaciones de voltaje nominal, corriente y potencia del transformador trifásico? Determine los voltajes y las corrientes de línea, así como la eficiencia del transformador cuando alimenta la carga nominal al voltaje nominal con un factor de potencia de 0.8 en atraso.

● Solución

Para cada transformador monofásico con una especificación de potencia de 12 kVA, las corrientes primaria (lado de 120 V) y secundaria (lado de 240 V) son de 100 y 50 A, respectivamente. La especificación de potencia nominal cuando los tres transformadores se conectan para formar uno trifásico es de 36 kVA. Las otras especificaciones nominales del transformador trifásico se indican en las tablas siguientes:

Para la conexión Y/Δ real:

	Primario	*Secundario*
Voltaje de fase	120 V	240 V
Voltaje de línea	208 V	240 V
Corriente de fase	100 A	50 A
Corriente de línea	100 A	86.6 A

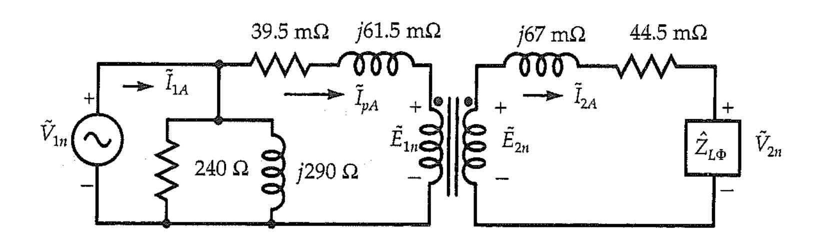


Figura 4.45. Circuito equivalente por fase del transformador trifásico, para el ejemplo 4.13.

Para la conexión Y/Y *equivalente:*

	Primario	*Secundario*
Voltaje de fase	120 V	138.564 V
Voltaje de línea	208 V	240 V
Corriente de fase	100 A	86.6 A
Corriente de línea	100 A	86.6 A

El circuito equivalente por fase para la conexión Y/Y se ilustra en la figura 4.45.

Tomando como referencia la especificación del voltaje de carga por fase para la conexión Y/Y equivalente, se tiene

$$\tilde{V}_{2n} = 138.564\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

Para un factor de potencia de 0.8 en atraso, la corriente de carga es

$$\tilde{I}_{2A} = 86.6\underline{/-36.87^\circ}\ \text{A}$$

La relación a del transformador en Y/Y equivalente es

$$a = \frac{120}{138.564} = 0.866$$

Por tanto, con base en la ecuación 4.45, la corriente por fase en el devanado primario es

$$\tilde{I}_{pA} = \frac{86.6\underline{/-36.87^\circ}}{0.866}\underline{/30^\circ} = 100\underline{/-6.87^\circ}\ \text{A}$$

El voltaje por fase inducido en el devanado secundario equivalente con conexión en Y es

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{2n} &= \tilde{V}_{2n} + \tilde{I}_{2A}(0.0445 + j0.067)\\ &= 138.564 + (86.6\underline{/-36.87^\circ})\ (0.0445 + j0.067)\\ &= 145.147\underline{/0.92^\circ}\ \text{V}\end{aligned}$$

La fem inducida en el devanado secundario real conectado en Δ es

$$\tilde{E}_{2L} = \sqrt{3}\tilde{E}_{2n}\angle 30^\circ = 251.4\angle 30.92^\circ \text{ V}$$

De acuerdo con la ecuación 4.44, la fem inducida en el devanado primario conectado en Y es

$$\tilde{E}_{1n} = a\tilde{E}_{2n}\angle 30^\circ = 125.7\angle 30.92^\circ \text{ V}$$

En seguida puede calcularse la corriente por fase y el voltaje en el lado primario del transformador conectado en Y como sigue

$$\tilde{I}_{1A} = \tilde{I}_{pA} + \tilde{E}_{1n}\left[\frac{1}{240} + \frac{1}{j290}\right]$$

$$= 100\angle -6.87^\circ + (125.7\angle 30.92^\circ)\left[\frac{1}{240} + \frac{1}{j290}\right]$$

$$= 100.68\angle -6.88^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{V}_{1n} = \tilde{E}_{1n} + (0.0395 + j0.0615)\,\tilde{I}_{1A}$$

$$= 125.7\angle 30.92^\circ + (0.0395 + j0.0615)\,(100.68\angle -6.88^\circ)$$

$$= 132.66\angle 31.98^\circ \text{ V}$$

Por tanto, el voltaje de línea en el lado primario es

$$\tilde{V}_{1L} = \sqrt{3}\tilde{V}_{1n}\angle 30^\circ$$

$$= 229.77\angle 61.98^\circ \text{ V}$$

La potencia total suministrada por el transformador trifásico es

$$P_o = 3 \text{ Re}\,[138.564 \times 86.6\angle 36.87^\circ]$$

$$\approx 28\,800 \text{ W} \quad \text{o} \quad 28.8 \text{ kW}$$

La potencia total suministrada por la fuente trifásica al transformador es

$$P_{in} = 3\ \text{Re}\,[(132.66\underline{/31.98°})\,(100.68\underline{/6.88°})]$$

$$\approx 31200\ \text{W} \quad \text{o} \quad 31.2\ \text{kW}$$

Luego, la eficiencia del transformador trifásico es

$$\eta = \frac{28.8}{31.2} = 0.923 \quad \text{o} \quad 92.3\%$$

■

Ejercicios

4.22. Tres transformadores monofásicos conectados en Y/Δ para formar un transformador trifásico alimentan una carga equilibrada trifásica de 300 kVA y 460 V. El devanado primario del transformador trifásico se conecta a una línea de transmisión trifásica de 4.8 kV. Calcule *a)* el voltaje primario, *b)* el voltaje secundario, y *c)* la especificación de potencia de cada transformador.

4.23. Se conectan tres transformadores de 2.2 kVA y 440/220 V para formar un transformador trifásico. Cada transformador tiene los parámetros siguientes: $R_H = 1.2\ \Omega$, $X_H = 2\ \Omega$, $R_L = 0.3\ \Omega$, $X_L = 0.5\ \Omega$, $R_{cH} = 2.2\ \text{k}\Omega$ y $X_{mH} = 1.8\ \text{k}\Omega$. Determine el voltaje y la corriente en el devanado primario, el voltaje y la corriente en el devanado secundario y la eficiencia a plena carga con un factor de potencia de 0.707 en adelanto, para cada una de las cuatro conexiones.

4.11. El transformador de corriente constante

Hasta ahora hemos centrado la atención en el estudio de los transformadores de potencial constante, en los que el voltaje de la carga es esencialmente constante y la corriente varía con la carga. Un transformador de este tipo se diseña para operar en o justo por arriba de la inflexión de la curva de magnetización a fin de asegurar una permeabilidad relativamente alta y costo inicial bajo. Los dos devanados se arrollan uno arriba del otro para reducir los flujos de dispersión.

Por otra parte, un transformador de corriente constante se diseña para satisfacer el requerimiento de corriente constante en tanto que la caída de voltaje varía con la carga. En otras palabras, el voltaje secundario varía en forma directa con la carga en un transformador de corriente constante.

En la figura 4.46 se representa un transformador de corriente constante con un devanado primario fijo y uno secundario móvil. El transformador está diseñado para operar con una densidad de flujo relativamente alta, de modo que el núcleo esté muy saturado. Un núcleo saturado asegura permeabilidad baja, la cual, a su vez, implica elevado flujo de dispersión.

El transformador de corriente constante opera con los principios siguientes: *a)* una bobina de corriente se manifiesta como electroimán y *b)* los polos de igual polaridad de un imán manifiestan una fuerza de repulsión.

En un transformador de corriente constante, la corriente en el devanado primario induce una corriente en el devanado secundario tal que la fmm que produce un devanado se opone a la fmm del otro. En otras palabras, en cualquier instante las dos bobinas actúan como electroimanes con polos de igual polaridad uno frente al otro. En consecuencia, entre los dos devanados siempre hay una fuerza de repulsión que ocasiona que el devanado secundario se mueva hacia arriba o hacia abajo.

Supongamos que el devanado secundario conduce algo de corriente a la carga resistiva, como se indica en la figura 4.46. Por tanto, algo de voltaje se induce en la

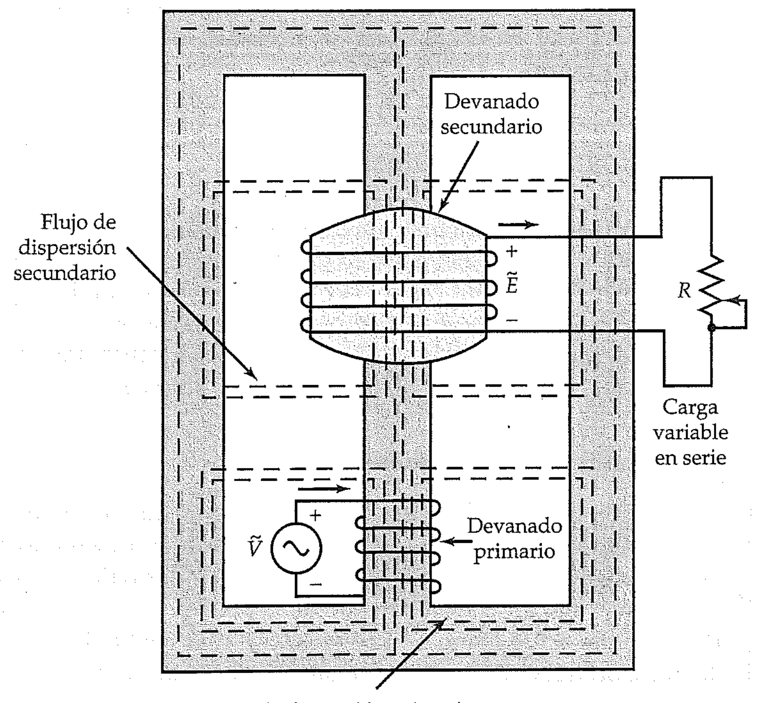


Figura 4.46. Transformador de corriente constante que alimenta una carga resistiva variable.

bobina secundaria. Si a continuación se disminuye la resistencia, ocurren los hechos siguientes.

1. La fem inducida en el secundario en su posición actual da origen a un incremento en la corriente a través de la resistencia.
2. Un aumento en la corriente del devanado secundario incrementa su fmm y, por tanto, ocasiona que la corriente en el devanado primario se incremente.
3. Un aumento en la fmm refuerza el flujo asociado con cada devanado, lo cual, a su vez, hace que cada devanado opere como un imán más fuerte.
4. El aumento en el poder magnético de cada imán produce que el devanado secundario se desplace hacia arriba.
5. Conforme el devanado secundario se mueve hacia arriba, el flujo que enlaza al devanado disminuye debido al elevado flujo de dispersión.
6. La disminución en el flujo que enlaza al devanado secundario disminuye la fem inducida en el devanado.
7. Conforme disminuye la fem inducida, también lo hace la corriente en el devanado secundario.
8. El devanado secundario continúa su movimiento ascendente hasta que la corriente secundaria regresa a su valor original. En ese momento las fuerzas alcanzan el equilibrio otra vez.

Con la misma lógica, puede decirse que el devanado secundario se mueve más cerca del primario si se incrementa la resistencia de la carga. Sin carga, el devanado secundario se apoya en un sistema de suspensión mecánica para descansar sobre el devanado primario.

4.12. Transformadores para instrumentos

Los transformadores para instrumentos se diseñan en aras de facilitar las mediciones de corrientes y voltajes elevados en un sistema de potencia con amperímetros y voltímetros estándar de bajo rango, pero muy precisos. También proveen la seguridad necesaria al hacer las mediciones, pues los devanados primario y secundario están aislados eléctricamente. Los transformadores para instrumentos son de dos clases: *transformadores de corriente* y *transformadores de potencial.*

Transformadores de corriente

Como su nombre lo indica, los transformadores de corriente están diseñados para medir corrientes altas en un sistema de potencia. El devanado primario tiene pocas vueltas de alambre grueso, mientras que el secundario tiene muchas vueltas de alambre muy fino. En un transformador de corriente de tipo gancho, el conductor que porta corriente actúa como un primario con una vuelta. En la figura 4.47 se muestra la disposición del circuito para transformadores de corriente tanto con primario devanado como de tipo gancho. De la figura resulta evidente que un transformador de corriente no es sino un transformador elevador bien diseñado. A medida que el voltaje se eleva, la corriente disminuye.

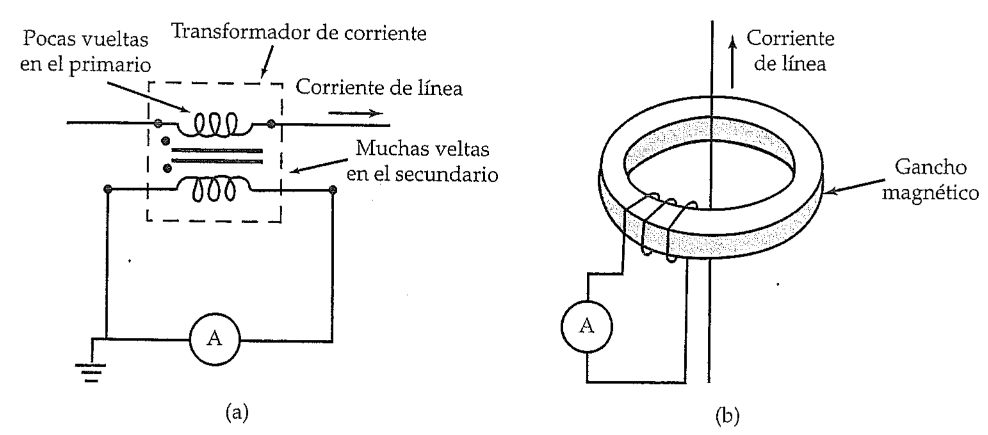


Figura 4.47 (a) Transformador de corriente con primario devanado.
(b) Transformador de corriente tipo gancho.

El amperímetro de rango bajo se conecta a través del devanado secundario. Debido a que la resistencia interna de un amperímetro es casi despreciable en comparación con la resistencia del devanado secundario, el amperímetro ha de considerarse un cortocircuito. Por tanto, los transformadores de corriente siempre se diseñan para operar en condiciones de cortocircuito. La corriente de magnetización es casi despreciable, y la densidad de flujo en el núcleo es relativamente baja. En consecuencia, el núcleo de un transformador de corriente nunca se satura en condiciones de operación normales.

El devanado secundario de un transformador de corriente nunca debe dejarse abierto, o el transformador puede perder su calibración y dar lugar a lecturas erróneas. La razón es que el devanado primario aún conduce corriente y no hay una corriente secundaria que contrarreste su fmm. La corriente del devanado primario actúa como corriente de magnetización e incrementa el flujo en el núcleo. El flujo incrementado puede saturar y magnetizar el núcleo. Cuando el secundario se cierra de nuevo, el ciclo de histéresis puede no ser simétrico con relación al origen, sino estar desplazado en dirección del flujo residual en el núcleo. El incremento en el flujo ocasiona un incremento en la corriente de magnetización, lo que a la vez invalida su calibración. Además, con el transcurso del tiempo la corriente primaria puede producir calor excesivo y destruir el aislamiento. Por añadidura, la saturación puede dar lugar a un voltaje excesivamente alto a través del secundario.

Es común que un transformador de corriente reciba una designación como de 100:1, lo cual significa simplemente que si el amperímetro indica 1 A, la corriente en el primario es de 100 A. Si un amperímetro conectado a un transformador 100:5 indica 2 A, la corriente en la línea es de 40 A.

Transformadores de potencial

Como su nombre lo indica, un transformador de potencial sirve para medir diferencias de potencial (voltaje) elevadas con un voltímetro estándar de rango bajo. Por tanto, un transformador de potencial debe ser del tipo reductor. El devanado prima-

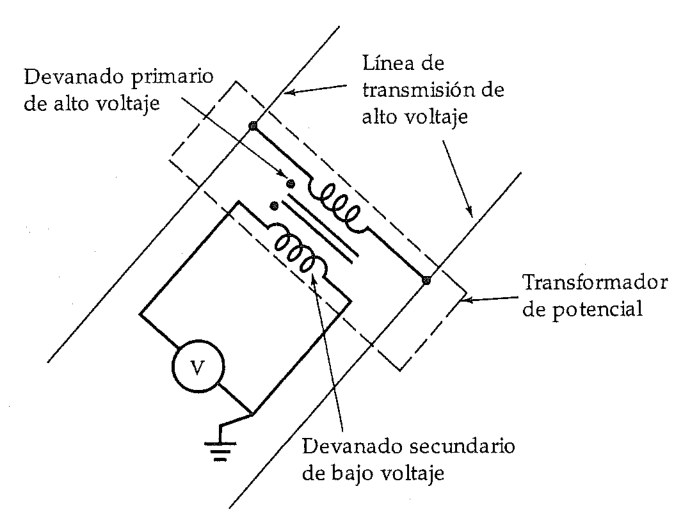


Figura 4.48. Transformador de potencial conectado para medir alto voltaje con un voltímetro estándar de rango bajo.

rio tiene muchas vueltas y se conecta a través de la línea de alto voltaje. El devanado secundario tiene pocas vueltas y se conecta a un voltímetro. Es habitual que el núcleo magnético de un transformador de potencial tenga una construcción de tipo acorazado para mayor exactitud. Con objeto de suministrar una protección adecuada al operador, un extremo del devanado secundario está generalmente conectado a tierra, como se ilustra en la figura 4.48.

Como un voltímetro se comporta más como un circuito abierto, la especificación de potencia de un transformador de potencial es baja. Por lo demás, un transformador de potencial opera como cualquier transformador de potencial constante. La relación *a* simplemente es la razón de transformación. Por ejemplo, si el voltímetro en un transformador de potencial 100:1 registra 120 V, el voltaje en la línea es de 12 000 V. Algunas razones comunes de transformación son 10:1, 20:1, 100:1 y 120:1.

El aislamiento entre los dos devanados representa un problema considerable en el diseño de transformadores de potencial. De hecho, el devanado primario puede arrollarse en capas. Después se aísla cada capa de las demás a fin de evitar la destrucción del aislamiento. Los materiales de aislamiento que se usan más comúnmente en los transformadores de potencial son aceite, papel impregnado con aceite, hexafluoruro de azufre y resinas epóxicas.

Ejemplo 4.14

En la figura 4.49 se muestra una aplicación típica del empleo de un transformador de potencial 100:1 y de uno de corriente 80:5. Si el amperímetro, voltímetro y vatímetro registran 4 A, 110 V y 352 W, respectivamente, determine *a)* la corriente de línea, *b)* el voltaje de línea, y *c)* la potencia en la línea de transmisión.

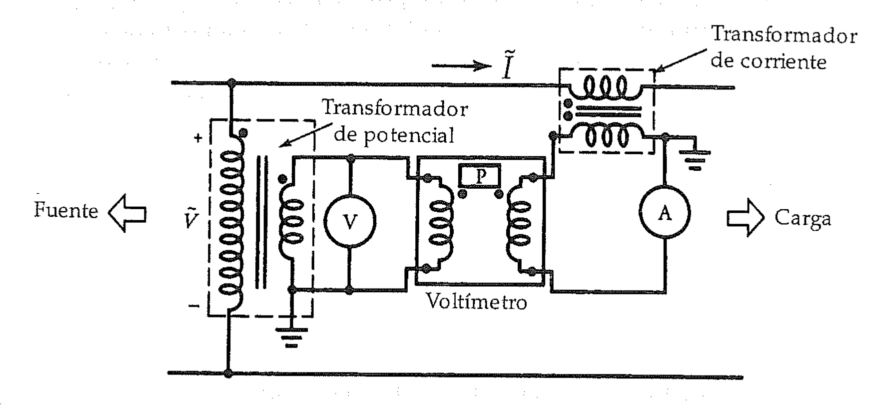


Figura 4.49. Mediciones de voltaje, corriente y potencia por medio de transformadores de corriente y de potencial.

- Solución

a) Un diseño 80:5 indica que la relación de transformación de corriente es de 16:1. Una corriente de 4 A en el amperímetro se traduce en una corriente de 64 A (16 × 4) en la línea de transmisión.

b) La relación de transformación del voltaje es 100:1. Por tanto, un registro en el voltímetro de 110 V significa que el voltaje de línea es 110 × 100 = 11 000 V.

c) La transformación de potencia es 100 × 16 = 1 600. Luego, la potencia suministrada por la línea de transmisión es 563.2 kW (1 600 × 352 W).

■

Ejercicios

4.24. ¿Cuáles deben ser los registros en el voltímetro, amperímetro y vatímetro si el diseño del transformador de corriente del ejemplo 4.14 se cambia a 100:5 y la relación de transformación de voltaje se modifica a 120:1?

4.25. Con referencia a la figura 4.49, el transformador de corriente es de 100:5; el transformador de potencial, 80:1. Si las lecturas en los instrumentos son 4.8 A, 60 V y 260 W, calcule *a)* la corriente de línea, *b)* el voltaje de línea, *c)* la potencia en la línea de transmisión.

Resumen

Al principio se definieron los transformadores de diferente tipo que se utilizan en los sistemas de potencia. El más comúnmente utilizado es el transformador de potencial

constante. Un transformador de potencial constante entrega potencia con un voltaje prácticamente constante en condiciones de carga normales.

Para desarrollar la teoría del transformador práctico, primero se definió un transformador ideal y después se obtuvieron las ecuaciones siguientes:

$$\tilde{E}_1 = a\tilde{E}_2$$
$$\tilde{I}_2 = a\tilde{I}_1$$
$$\hat{Z}_1 = a^2\hat{Z}_2$$

Al incluir las resistencias de los devanados, las reactancias de dispersión, la resistencia equivalente para representar la pérdida en el núcleo así como la reactancia equivalente que representa la caída de la fmm en el núcleo, se reunieron las condiciones para representar un transformador práctico por medio de un circuito equivalente exacto, el cual incluyó al transformador ideal.

Con la transformación de la impedancia de un lado al otro, también fue posible desarrollar el circuito equivalente exacto como se observa desde los lados primario y secundario.

Con base en que el flujo en el núcleo permanece casi igual en condiciones de carga normales, se desarrollaron los circuitos equivalentes aproximados, los cuales se utilizaron para determinar experimentalmente los parámetros de un transformador.

La prueba de circuito abierto se llevó a cabo aplicando el voltaje especificado en el lado de bajo voltaje, mientras que el lado de alto voltaje se dejó abierto. Esta prueba permitió medir la corriente necesaria para responder por las pérdidas por histéresis y por corriente parásita, lo mismo que la corriente necesaria para crear el flujo magnético en el núcleo. A partir de las mediciones de la potencia, la corriente y el voltaje, fue posible determinar

$$R_{cL} = \frac{V_{oc}^2}{P_{oc}}$$

$$X_{mL} = \frac{V_{oc}^2}{Q_{oc}}$$

donde $$Q_{oc} = \sqrt{S_{oc}^2 - P_{oc}^2}$$

y $$S_{oc} = V_{oc}I_{oc}$$

La prueba de cortocircuito se efectuó con la corriente especificada en el lado de alto voltaje y conectando en cortocircuito el lado de bajo voltaje. Debido a que el voltaje aplicado es una fracción del voltaje especificado, se supuso que la corriente de excitación era casi despreciable. Con los valores medidos de la potencia, el voltaje y

la corriente se calculó la resistencia equivalente y la reactancia de dispersión referidas al lado de alto voltaje. Para hacerlo se utilizaron las ecuaciones siguientes:

$$Z_{eH} = \frac{V_{sc}}{I_{sc}}$$

$$R_{eH} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2}$$

$$X_{eH} = \sqrt{Z_{eH}^2 - R_{eH}^2}$$

También se demostró que un transformador opera a su máxima eficiencia cuando la pérdida en el cobre es igual a la pérdida (magnética) en el núcleo. Es decir,

$$I_{p\eta}^2 R_{e1} = P_m$$

Asimismo, se analizó un transformador por unidad y se destacó su importancia. Los valores por unidad de máquinas del mismo tipo y especificaciones muy diferentes caen dentro de un margen muy estrecho.

Cuando se conectan dos devanados entre sí, el transformador se denomina *autotransformador*. Se explicaron las cuatro formas posibles de interconectar los dos devanados. Para cada conexión se desarrolló un circuito equivalente y se obtuvieron expresiones para demostrar que un transformador con dos devanados entrega más potencia cuando se conecta como autotransformador. Las ecuaciones para un autotransformador ideal son:

$$\tilde{V}_{1a} = a_T \tilde{V}_{2a}$$

$$\tilde{I}_{2a} = a_T \tilde{I}_{1a}$$

$$\hat{Z}_{1a} = a_T^2 \hat{Z}_{2a}$$

Los devanados primario y secundario de un transformador trifásico pueden conectarse en cuatro formas posibles. Un transformador trifásico puede diseñarse como una sola unidad o estar formado por la conexión de tres transformadores monofásicos. Se señalaron las ventajas y las desventajas de cada conexión. Se estableció que un transformador trifásico puede analizarse por fase simulando una conexión Y/Y.

Se estudiaron sucintamente el transformador de corriente constante y los transformadores para instrumentos. El primero constante está diseñado para suministrar corriente constante —valga la tautología— a una carga variable y para operar en condiciones de alta saturación. Los transformadores para instrumentos son transformadores de potencial constante diseñados cuidadosamente. Permiten medir corrientes elevadas y voltajes altos usando instrumentos estándar para medición de rango bajo.

Preguntas de repaso

4.1. ¿Qué es un transformador?
4.2. ¿Puede utilizarse un transformador para transformar voltaje continuo y corriente continua?
4.3. En un transformador bien diseñado, ¿cuál es el coeficiente de acoplamiento entre los dos devanados?
4.4. ¿Por qué la frecuencia de la fem inducida en el devanado secundario de un transformador es la misma que la del voltaje aplicado al devanado primario?
4.5. ¿Qué es un transformador ideal?
4.6. ¿En qué se diferencia un transformador tipo núcleo de otro tipo acorazado?
4.7. ¿Cuáles son las desventajas de usar un núcleo magnético sólido para un transformador?
4.8. ¿Qué es un transformador de potencial?
4.9. ¿Cuál es la diferencia entre un transformador de distribución y un transformador de potencia?
4.10. ¿Qué es la relación *a*, o relación de transformación y cómo puede determinarse experimentalmente?
4.11. En cierto transformador, la corriente primaria es doble que la secundaria. ¿Se trata de un transformador elevador o de uno reductor?
4.12. Explique por qué en un transformador ideal la fmm primaria debe ser igual y opuesta a la fmm secundaria.
4.13. ¿Por qué un transformador no ideal tiene algo de corriente cuando el secundario está abierto?
4.14. Un transformador ideal reductor de 22 kVA y 2 200/1 100 V alimenta una carga especificada con factor de potencia de 0.5 en adelanto. Determine *a)* la corriente en el devanado secundario, *b)* la corriente en el devanado primario, *c)* la impedancia en el lado secundario como combinación en paralelo de la resistencia y la reactancia, y *d)* la impedancia en el lado primario como una combinación en serie de la resistencia y la reactancia.
4.15. Haga la distinción entre la corriente de excitación, la corriente por pérdida en el núcleo y la corriente de magnetización.
4.16. ¿Qué se entiende por flujo de dispersión y cómo puede reducirse al mínimo? ¿Es posible que no haya flujo de dispersión?
4.17. ¿Por qué se hace la prueba de circuito abierto con el voltaje especificado?
4.18. Mencione con detalle el procedimiento para realizar la prueba de circuito abierto.
4.19. ¿Cuál es la ventaja de realizar la prueba de circuito abierto en el lado de bajo voltaje?
4.20. ¿Por qué se realiza la prueba de cortocircuito con la corriente especificada?
4.21. Describa de forma detallada el procedimiento para efectuar la prueba de cortocircuito.
4.22. ¿Por qué se prefiere ejecutar la prueba de cortocircuito en el lado de alto voltaje?
4.23. Explique por qué la carga no afecta a la pérdida en el núcleo.
4.24. Explique por qué la pérdida en el cobre varía con la carga.
4.25. ¿Cuál es el criterio de eficiencia máxima de un transformador?

4.26. En un transformador de distribución, la eficiencia máxima ocurre a 80% de la carga. ¿Qué significa esto? Si se incrementa la frecuencia de operación, ¿qué pasa con la corriente de la carga a eficiencia máxima?

4.27. ¿Qué es un autotransformador? Enumere sus ventajas y sus desventajas.

4.28. Trace esquemas que muestren cómo puede conectarse un transformador de dos devanados de 22 kVA y 2 200/1 100 V como autotransformador. Determine *a)* la especificación de voltaje, *b)* la especificación de potencia, *c)* la potencia transferida por conducción, y *d)* la potencia transferida por inducción.

4.29. ¿Cuál es el significado de un sistema por unidad?

4.30. ¿Deben usarse las especificaciones nominales de un transformador como las cantidades base?

4.31. Mediante la potencia aparente y los voltajes en las terminales como cantidades base de un transformador de 44 kVA y 1 100/250 V, determine las otras cantidades base. ¿Cuál es la relación a sobre la base por unidad?

4.32. ¿Cuál es la importancia de la identificación de las polaridades en un transformador multidevanado?

4.33. Explique qué es regulación del voltaje.

4.34. Cuando un transformador opera a media carga, el voltaje del devanado secundario es de 250 V. Sin carga, es de 270 V. ¿Cuál es la regulación del voltaje?

4.35. El voltaje sin carga es menor que el voltaje a plena carga en el lado secundario de un transformador. ¿En qué condiciones puede suceder esto?

4.36. Escriba las ecuaciones para justificar que las armónicas de tercer orden en un transformador trifásico deben estar en fase.

4.37. Bosqueje las cuatro formas posibles de conectar tres transformadores monofásicos como un transformador trifásico. Defina las ventajas y las desventajas de cada conexión.

4.38. ¿Por qué es mejor un transformador trifásico tipo acorazado que otro tipo núcleo?

4.39. Explique el procedimiento para realizar las pruebas de circuito abierto y de cortocircuito en un transformador trifásico.

4.40. Explique el principio de operación de un transformador de corriente constante.

4.41. ¿Cuál es la ventaja de un transformador de corriente tipo gancho?

Problemas

4.1. Un núcleo magnético sostiene un flujo de 5 sen 314t mWb. Determine el valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida en una bobina de 100 vueltas arrolada en el núcleo mediante *a)* la ley de Faraday y *b)* la ecuación del transformador. Si la superficie de la sección transversal del núcleo es de 25 cm^2, ¿cuál es la densidad de flujo efectiva en el núcleo?

4.2. La densidad de flujo efectiva en el núcleo de un transformador ideal de 220/110 V es 1.2 T. El área de la sección transversal del núcleo es de 80 cm^2 y el factor de apilamiento de las laminaciones es 0.93. Calcule el número de vueltas en los devanados primario y secundario si la frecuencia de oscilaciones es *a)* 25 Hz, *b)* 50 Hz, *c)* 60 Hz y *d)* 400 Hz.

4.3. El área de la sección transversal del núcleo de un transformador ideal de 1.2 kVA, 120/208 V y 50 Hz es de 100 cm^2. El primario tiene 60 vueltas. Calcule *a)* la fem inducida por devanado, *b)* el número de vueltas en el secundario, y *c)* la densidad de flujo efectiva en el núcleo.

4.4. Un transformador reductor ideal de 12 kVA y 480/120 V opera a plena carga con un factor de potencia de 70.7% en adelanto. El transformador está diseñado en forma tal que se inducen 2 V por vuelta en sus devanados. Determine *a)* el número de vueltas en los devanados primario y secundario, *b)* las corrientes en los devanados primario y secundario, *c)* la potencia de salida, y *d)* la impedancia de la carga en el lado secundario. Trace el circuito equivalente con la representación de la carga en el lado primario.

4.5. Un transformador de 25 kVA tiene 500 vueltas en el primario y 50 vueltas en el secundario. Si el primario está especificado a 2.5 kVA, encuentre la especificación del secundario. ¿Cuál es el flujo en el núcleo en condiciones sin carga si la frecuencia de operación es de 50 Hz? Si el transformador alimenta plena carga con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, determine *a)* las corrientes en los devanados primario y secundario, *b)* la potencia de salida, *c)* la impedancia de la carga en el lado secundario, y *d)* la impedancia de la carga referida al lado primario.

4.6. Un amplificador de potencia puede representarse por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia de 200 Ω. Se conecta un altavoz de 8 Ω al amplificador de potencia por medio de un transformador de audio de modo que se transfiere la potencia máxima al altavoz. ¿Cuál debe ser la relación *a* del transformador?

4.7. Un transformador reductor de 48 kVA, 4 800/480 V y 60 Hz alimenta una carga de 18 kW al voltaje especificado y un factor de potencia de 0.5 en atraso. Determine la carga adicional que debe conectarse al transformador para que alimente a plena carga con el voltaje especificado y un factor de potencia igual a la unidad. Si cada carga consta de una combinación en serie de *R*, *L* y *C*, ¿cuáles son sus valores?

4.8. Un generador de ca puede modelarse como una fuente de voltaje en serie con una impedancia de $0.5 + j10$ Ω. Se conecta a una línea de transmisión que tiene una impedancia equivalente en serie de $5 + j12$ Ω por medio de un transformador elevador ideal con una relación *a* de 0.05. Un transformador reductor ideal con relación *a* de 25 se conecta el otro extremo de la línea de transmisión a una impedancia de carga de $30 + j40$ Ω. Si el voltaje de carga es 240 V, determine *a)* la potencia que se suministra a la carga, *b)* la potencia que disipa la línea de transmisión, *c)* el voltaje en el generador, y *d)* la potencia suministrada por el generador.

4.9. Un transformador elevador de 240 kVA y 480/4 800 V tiene las constantes siguientes: $R_H = 2.5$ Ω, $X_H = 5.75$ Ω, $R_L = 25$ mΩ, $X_L = 57.5$ mΩ. El transformador opera a 50% de su carga especificada. Si la carga es puramente resistiva, determine *a)* el voltaje aplicado en el lado primario, *b)* la corriente en el secundario, *c)* la corriente primaria, y *d)* la eficiencia del transformador.

4.10. Repita el problema 4.9 si la resistencia de pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización en el lado de alto voltaje son 18 kΩ y 12 kΩ, respectivamente. ¿Cuál es el valor efectivo de la corriente de excitación?

4.11. Un transformador reductor de 100 kVA, 2 500/125 V y 50 Hz tiene los parámetros siguientes: $R_H = 1.5\ \Omega$, $X_H = 2.8\ \Omega$, $R_L = 15\ \text{m}\Omega$, $X_L = 20\ \text{m}\Omega$, $R_{cH} = 3\ \text{k}\Omega$ y $X_{mH} = 5\ \text{k}\Omega$. El transformador alimenta 85% de la carga especificada a un voltaje terminal de 110 V y un factor de potencia de 0.866 en atraso. Determine *a)* la pérdida en el núcleo, *b)* la pérdida en el cobre, y *c)* la eficiencia del transformador.

4.12. Los parámetros de un transformador elevador de dos devanados y 12 kVA, 120/480 V y 60 Hz son $R_H = 0.6\ \Omega$, $X_H = 1.2\ \Omega$, $R_L = 0.1\ \Omega$, $X_L = 0.3\ \Omega$, $R_{cH} = 3.2\ \text{k}\Omega$ y $X_{mH} = 1.2\ \text{k}\Omega$. El transformador opera a 80% de su carga con voltaje terminal especificado y factor de potencia de 0.866 en atraso. Determine las pérdidas en el cobre y en el núcleo y la eficiencia del transformador.

4.13. Repita el problema 4.12 si el factor de potencia de la carga es de 0.866 en adelanto.

4.14. Repita el problema 4.12 si el factor de potencia de la carga es igual a la unidad.

4.15. Un transformador reductor de dos devanados y 230 kVA, 2 300/230 V y 60 Hz tiene los parámetros siguientes: $R_H = 1.2\ \Omega$, $X_H = 3\ \Omega$, $R_L = 12\ \text{m}\Omega$, $X_L = 30\ \text{m}\Omega$, $R_{cH} = 2\ \text{k}\Omega$ y $X_{mH} = 1.8\ \text{k}\Omega$. Si el transformador opera a media carga a su voltaje especificado en terminales con un factor de potencia igual a la unidad, ¿cuál es su eficiencia?

4.16. Para el transformador del problema 4.9, determine la regulación del voltaje cuando el factor de potencia de la carga es *a)* la unidad, *b)* 0.8 en atraso, y *c)* 0.8 en adelanto. Use el circuito equivalente correspondiente al lado del alto voltaje.

4.17. Determine la regulación del voltaje para el transformador del problema 4.11 cuando el factor de potencia de la carga es *a)* la unidad, *b)* 0.707 en atraso, y *c)* 0.707 en adelanto. Use el circuito equivalente aproximado referido al lado del alto voltaje.

4.18. Para el transformador del problema 4.15, trace los circuitos equivalentes aproximados como se observan desde *a)* el lado primario y *b)* el lado secundario. En cada caso, determine *a)* la eficiencia y *b)* la regulación si la carga tiene un factor de potencia de 0.8 en atraso.

4.19. El transformador del problema 4.9 opera a plena carga y factor de potencia de 0.866 en atraso. Determine su regulación del voltaje y eficiencia usando cantidades por unidad.

4.20. El transformador del problema 4.11 opera a plena carga y factor de potencia de 0.85 en adelanto. Determine su regulación del voltaje usando cantidades por unidad.

4.21. El transformador del problema 4.15 opera a plena carga y factor de potencia de 0.95 en adelanto. Determine su regulación del voltaje y eficiencia empleando cantidades por unidad.

4.22. El transformador del problema 4.12 opera a plena carga y factor de potencia de 0.9 en atraso. ¿Cuál es su regulación del voltaje? Use el sistema por unidad.

4.23. La prueba de un transformador de 320 kVA, 240/4 800 V y 60 Hz arrojó la información siguiente:

	Voltaje (V)	*Corriente* (A)	*Potencia* (W)
Prueba de circuito abierto:	240	39.5	1 200
Prueba de cortocircuito:	195	66.67	3 925

Encuentre el circuito equivalente del transformador como se observa desde *a)* el lado de bajo voltaje y *b)* el lado de alto voltaje.

4.24. Al hacer la prueba de un transformador de 60 VA, 120/208 V y 60 Hz se obtuvo la información siguiente:

	Voltaje (V)	*Corriente* (mA)	*Potencia* (W)
Prueba de circuito abierto	120	25.07	2
Prueba de cortocircuito	16.85	300	4.7

Determine el circuito equivalente del transformador observado desde *a)* el lado de bajo voltaje y *b)* el lado de alto voltaje. Trace el circuito exacto equivalente que incorpora un transformador ideal aplicando el criterio de igual pérdida de potencia.

4.25. Se recabaron los datos siguientes de un transformador de 46 kVA, 2 300/230 V y 60 Hz:

	Voltaje (V)	*Corriente* (A)	*Potencia* (W)
Prueba de circuito abierto	230	11.2	1 150
Prueba de cortocircuito	160	20	1 150

Determine el circuito equivalente del transformador como se observa desde *a)* el lado de bajo voltaje y *b)* el lado de alto voltaje.

4.26. De pruebas realizadas en un transformador con dos devanados, de 12 kVA, 480/120 V y 60 Hz se obtuvieron los datos que se muestran a continuación:

	Voltaje (V)	*Corriente* (A)	*Potencia* (W)
Prueba de circuito abierto	120	1.71	72
Prueba de cortocircuito	73	25	937.5

Trace el circuito equivalente del transformador como se observa desde *a)* el lado de bajo voltaje y *b)* el lado de alto voltaje.

4.27. Con los datos experimentales del problema 4.23, determine la eficiencia del transformador cuando el factor de potencia a plena carga es igual a la unidad. Determine la eficiencia máxima del transformador.

4.28. Con los datos experimentales del problema 4.24, determine la eficiencia del transformador cuando el factor de potencia a plena carga es de 0.8 en adelanto. Calcule la eficiencia máxima del transformador.

4.29. Use la información que se da en el problema 4.25 para encontrar la eficiencia del transformador cuando el factor de potencia a plena carga es de 0.8 en atraso.

4.30. Utilice los datos que se dan en el problema 4.26 para determinar la eficiencia del transformador cuando el factor de potencia a plena carga es 0.866 en atraso. ¿Cuál es la eficiencia máxima del transformador?

4.31. Si en el transformador del problema 4.10 se realizan las pruebas de circuito abierto y de cortocircuito, ¿cuáles deben ser los registros en los instrumentos de medición en cada prueba?

4.32. Si las pruebas de circuito abierto y de cortocircuito se efectúan en el transformador del problema 4.11, ¿cuáles deben ser los registros en los instrumentos de medición en cada prueba?

4.33. Si al transformador del problema 4.12 se le practican las pruebas de circuito abierto y de cortocircuito, ¿cuáles deben ser los registros en los instrumentos de medición en cada prueba?

4.34. Un transformador de dos devanados de 11 kVA, 220/110 V y 60 Hz está conectado como autotransformador elevador. Trace cada una de las posibilidades y determine *a)* la potencia nominal de especificación, *b)* el voltaje de especificación nominal, y *c)* la potencia que se transfiere por conducción.

4.35. El transformador del problema 4.34 está conectado como autotransformador reductor. Trace cada posibilidad y determine *a)* la potencia nominal de especificación, *b)* el voltaje nominal de especificación, y *c)* la potencia transferida por conducción.

4.36. El transformador del problema 4.9 está conectado como autotransformador elevador de 480/5 280 V. Opera con plena carga con un factor de potencia unitario. Determine la eficiencia y la regulación del voltaje del autotransformador.

4.37. El transformador de dos devanados del problema 4.12 está conectado como autotransformador elevador de 480/600 V. Entrega su carga especificada con un factor de potencia de 0.866 en adelanto. Determine su eficiencia y regulación del voltaje.

4.38. El transformador de dos devanados del problema 4.12 está conectado como autotransformador reductor de 600/480 V. Encuentre su eficiencia con la carga especificada y un factor de potencia de 0.866 en adelanto. ¿Cuál es su regulación del voltaje?

4.39. El transformador de dos devanados del problema 4.12 está conectado como autotransformador reductor de 600/120 V. Alimenta su carga especificada con un factor de potencia de 0.866 en adelanto. Determine su eficiencia y regulación del voltaje.

4.40. El transformador de dos devanados del problema 4.12 está conectado como autotransformador elevador de 120/600 V. Alimenta su carga especificada con un factor de potencia de 0.866 en adelanto. Determine su eficiencia y regulación del voltaje.

4.41. El transformador de dos devanados del problema 4.15 está conectado para operar como autotransformador de 230/2 530 V. Determine la regulación del

voltaje y la eficiencia con la carga especificada, si el factor de potencia es de 0.8 en atraso. Use el circuito equivalente referido al lado primario del autotransformador.

4.42. El transformador de dos devanados del problema 4.15 está conectado para operar como autotransformador de 2 300/2 530 V. Determine la regulación del voltaje y la eficiencia con la carga especificada cuando el factor de potencia es de 0.8 en atraso. Utilice el circuito equivalente referido al lado primario del autotransformador.

4.43. El transformador de dos devanados del problema 4.15 está conectado para operar como autotransformador de 2 530/230 V. Determine la regulación del voltaje y eficiencia con la carga especificada y factor de potencia de 0.8 en adelanto. Utilice del circuito equivalente referido al lado primario del autotransformador.

4.44. El transformador de dos devanados del problema 4.15 se conecta para operar como autotransformador de 2 530/2 300 V. Calcule la regulación del voltaje y eficiencia con la carga especificada con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. Emplee el circuito equivalente referido al lado primario del autotransformador.

4.45. Se van a usar tres transformadores monofásicos de 60 VA, 120/208 V para formar un transformador trifásico. Para cada una de las cuatro conexiones determine *a)* los voltajes de fase, *b)* las corrientes de fase, *c)* la relación *a*, y *d)* la especificación de potencia.

4.46. Se necesitan tres transformadores idénticos para conectar una carga trifásica de 6 kVA, 120 V, a una línea de transmisión trifásica de 4 800 V. Para una conexión Y/Δ, calcule *a)* la especificación de potencia, *b)* la especificación del voltaje, y *c)* la especificación de corriente de cada transformador. ¿Cuál es la relación *a*?

4.47. Un transformador reductor trifásico conectado en Y/Y, de 150 kVA, 2 080/208 V y 60 Hz consta de tres transformadores monofásicos idénticos. Cada transformador tiene los parámetros siguientes: $R_H = 0.45\ \Omega$, $X_H = 2.2\ \Omega$, $R_L = 4.5\ \text{m}\Omega$, $X_L = 22\ \text{m}\Omega$, $R_{cH} = 10\ \text{k}\Omega$, y $X_{mH} = 8\ \text{k}\Omega$. La carga en el transformador es de 120 kVA, 90 kW (en atraso) con el voltaje terminal especificado. Determine *a)* el voltaje primario, *b)* la eficiencia, y *c)* la regulación de voltaje del transformador trifásico.

4.48. Si los tres transformadores del problema 4.47 están conectados en Y/Δ, ¿cuáles son el voltaje nominal y la potencia de especificación del transformador trifásico? Determine la eficiencia y regulación del voltaje del transformador cuando alimenta la carga especificada con factor de potencia de 0.8 en atraso.

4.49. Si los tres transformadores del problema 4.47 se conectan en Δ/Y, determine su eficiencia y regulación del voltaje cuando el factor de potencia es 0.8 en atraso. ¿Cuáles son el voltaje nominal y la especificación de potencia del transformador trifásico?

4.50. Si los tres transformadores del problema 4.47 se conectan en Δ/Δ, ¿cuáles son el voltaje nominal y la especificación de potencia del transformador trifásico? Para una carga de 100 kVA y 70.7 kW (en atraso) al voltaje especificado, calcule *a)* el voltaje primario, *b)* las corrientes en los devanados primario y secundario, *c)* la eficiencia, y *d)* la regulación del voltaje.

4.51. Un generador trifásico está conectado a una carga trifásica por medio de un transformador elevador trifásico de 230/2 300 V conectado en Δ/Y, una línea de transmisión corta y un transformador reductor de 2 300/230 V conectado

en Y/Δ. La resistencia del devanado por fase y la reactancia de dispersión referidas al lado de alto voltaje de cada transformador son 1.2 Ω y 4.8 Ω, respectivamente. La impedancia de la línea de transmisión es 2.5 + *j*2.1 Ω. La impedancia por fase del generador es 0.3 + *j*1.2 Ω. Si la carga es de 60 kVA a 230 V con factor de potencia de 0.9 en atraso, determine el voltaje del generador y la eficiencia del sistema.

4.52. Un transformador de potencial 120:1 se utiliza para hacer mediciones del alto voltaje en una línea de transmisión. Si el registro del voltímetro es de 85 V, ¿cuál es el voltaje de la línea de transmisión?

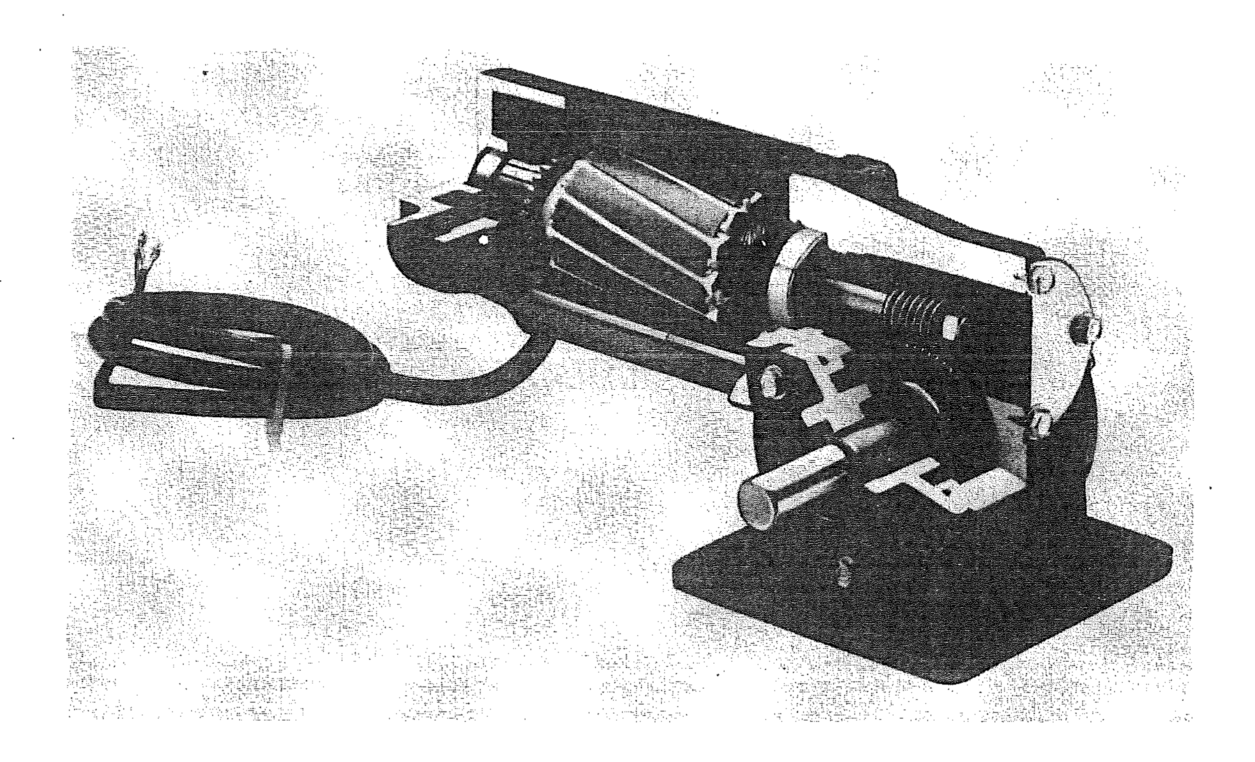
4.53. Un transformador de corriente 80:5 se usa para medir la corriente en una línea de transmisión. Si el amperímetro muestra 3.5 A, ¿cuál es la corriente en la línea?

4.54. Determine la designación de un transformador de corriente de modo que un amperímetro con deflexión máxima de 2.5 A sea capaz de medir una corriente de 100 A.

4.55. Encuentre la relación *a* de un transformador de potencial de modo que un voltímetro con deflexión máxima de 100 V pueda medir alto voltaje de 23 kV.

5

Generadores de corriente continua



Vista en corte de una máquina de cc que muestra el arreglo del conmutador y la armadura. (Cortesía de *Bodine Electric Company.*)

5.1. Introducción

De lo expuesto en el capítulo 3 debe resultar evidente que hay dos tipos de máquinas rotatorias para la conversión de energía eléctrica: las de corriente continua (cc) y las de corriente alterna (ca). Cuando una máquina rotatoria convierte energía eléctrica en energía mecánica se llama *motor*. Si convierte energía mecánica en eléctrica se denomina *generador*. Así, existen motores de cc, generadores de cc, motores de ca y generadores de ca. Una parte significativa de este libro se dedica al estudio de estas máquinas.

La palabra *máquina* se usa comúnmente para explicar características que comparten los motores y los generadores. Con frecuencia, una máquina puede operarse como motor o como generador sin necesidad de hacer modificación alguna. Esto es especialmente cierto para todas las máquinas de cc.

En este capítulo nos centraremos por completo en el estudio de los generadores de cc y dejaremos para el siguiente el análisis de los motores de cc. Además, nuestro análisis se limitará a las características de rendimiento de la máquina en estado estable. El comportamiento transitorio se estudia en un capítulo ulterior.

En una máquina de cc, el flujo magnético uniforme se establece por medio de polos fijos montados en el interior del elemento estacionario, llamado *estator*. Es posible usar imanes permanentes como polos o arrollar los *devanados del campo (bobinas de excitación)* alrededor de los polos. Una de las mayores ventajas de una máquina devanada es que es posible controlar el flujo en la máquina regulando la corriente continua en el devanado del campo. El devanado en el que se induce la fuerza electromotriz (fem) se arrolla en el miembro rotatorio. La parte rotatoria se denomina *armadura* y su devanado, *devanado de la armadura*. La armadura se apoya mecánicamente y se alinea dentro del estator por medio de campanas extremas, como se muestra en la figura 5.1. Antes de continuar es preciso que estudiemos la construcción de una máquina de corriente continua.

5.2. Construcción mecánica

En la figura 5.2 se muestra la sección transversal de una máquina tetrapolar de cc. Se identifican sólo sus componentes principales, que se describen a continuación.

Estator

El estator de una máquina de cc proporciona el apoyo mecánico para la máquina, y consta del *yugo* y los *polos* (o *polos del campo*). El yugo desempeña la función básica de proveer una trayectoria sumamente permeable para el flujo magnético. Para máquinas pequeñas de imanes permanentes (PM, *permanent-magnet*), puede ser una estructura anular laminada soldada en sus extremos. Para máquinas devanadas pequeñas, los polos del campo y el yugo se troquelan como una sola pieza a partir de laminaciones delgadas de acero. Para máquinas grandes, el yugo se construye con partes hechas con acero fundido.

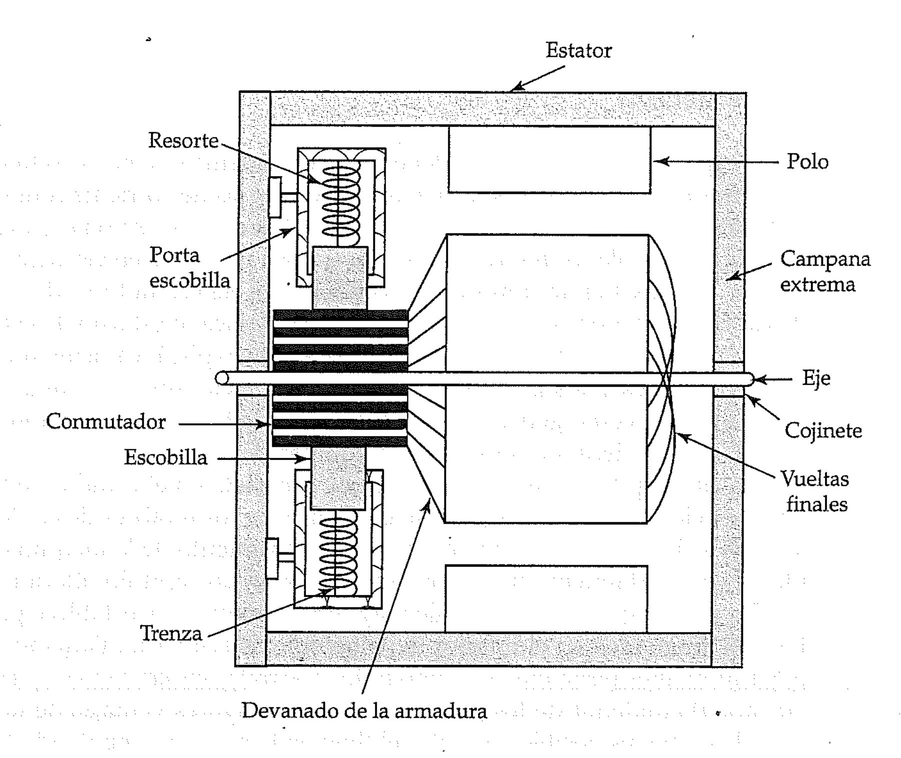


Figura 5.1. Características principales de una máquina de corriente continua.

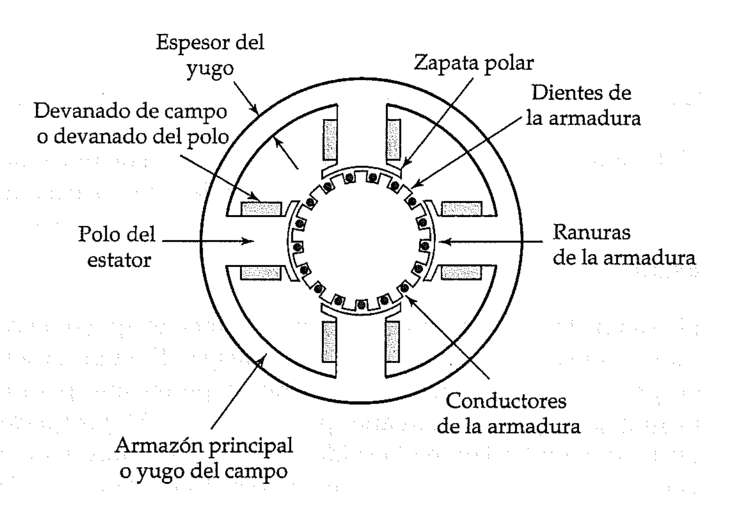


Figura 5.2. Vista transversal de una máquina tetrapolar de cc.

Los polos se montan dentro del yugo y se diseñan en forma apropiada para recibir los devanados del campo. A menudo los polos del campo están elaborados con láminas (laminaciones) delgadas que se apilan juntas, con lo que se busca reducir al mínimo las pérdidas magnéticas debidas a la proximidad de los polos con el flujo de la armadura. Para máquinas grandes, los polos del campo se construyen por separado y después se atornillan al yugo. En la figura 5.3 se muestra un polo del campo y un devanado del campo típicos. Observe que el área de la sección transversal del polo del campo es más pequeña que el área correspondiente de la zapata polar. Esto se hace para *a)* proporcionar lugar suficiente para el devanado del campo y *b)* disminuir la longitud por devanado del conductor y así reducir su peso y costo. La zapata polar ayuda a esparcir el flujo en la región del entrehierro.

Devanado del campo

Las bobinas del campo están devanadas en los polos, de forma que éstos alternan su polaridad. Existen dos tipos de devanados del campo: un *devanado del campo shunt* y un *devanado del campo serie*. El devanado del campo shunt tiene muchas vueltas de alambre delgado y recibe ese nombre porque se conecta en paralelo con el devanado de la armadura. El devanado del campo serie, como su nombre lo indica, se conecta en serie con el devanado de la armadura y tiene comparativamente pocas vueltas de conductor grueso. Una máquina de cc puede tener ambos devanados del campo arrollados en el mismo polo.

Una máquina con un devanado del campo shunt se llama *máquina shunt*. Una *máquina serie* se devana sólo con devanado del campo serie. Una *máquina compound*, o *compuesta*, tiene ambos devanados. Cuando en una máquina compound los dos devanados del campo producen flujos en la misma dirección, la máquina es de tipo *cumu-*

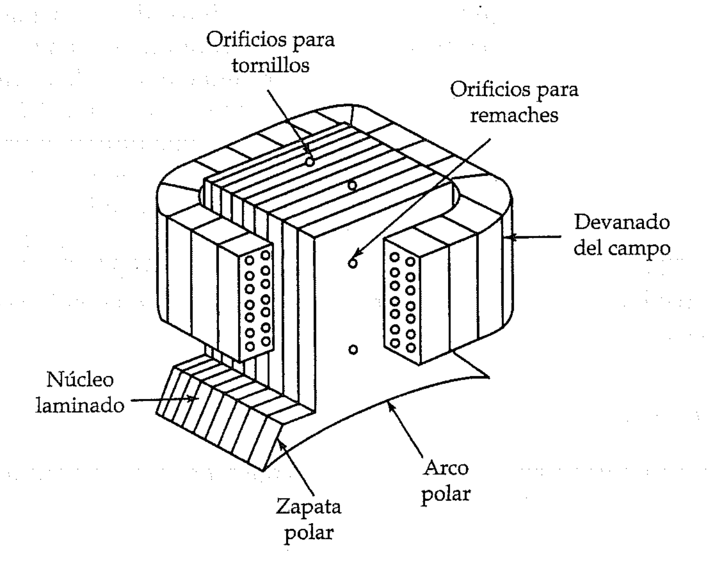


Figura 5.3. Polo del campo con su devanado en una máquina de corriente continua.

lativo. La máquina es de tipo *diferencial* cuando al campo que establece el devanado del campo shunt se opone el campo que establece el devanado del campo en serie.

Como el devanado del campo en serie lleva una corriente constante, disipa potencia. Al utilizar imanes permanentes en vez de un devanado del campo shunt se elimina la pérdida de potencia y, así, se mejora la eficiencia de la máquina. Para la misma especificación de potencia, una máquina con imanes permanentes (o máquina tipo PM) es más pequeña y ligera que una máquina devanada. La desventaja de la máquina tipo PM, por supuesto, es su flujo constante.

Armadura

La parte rotatoria de una máquina de cc, que está cubierta por los polos fijos en el estator, se llama *armadura*. La longitud efectiva de la armadura es por lo general la misma que la del polo. Su sección transversal es circular y está hecha con laminaciones delgadas, muy permeables y aisladas eléctricamente, las cuales se encuentran apiladas y montadas en forma rígida sobre el eje. La alta permeabilidad asegura una trayectoria de reluctancia baja para el flujo magnético; el aislamiento eléctrico reduce las corrientes parásitas en el núcleo de la armadura. Las laminaciones tienen ranuras axiales en su periferia para alojar las *bobinas de la armadura (devanado de la armadura)*. Por lo común se utiliza un conductor de cobre para las bobinas de la armadura debido a su baja resistividad.

Conmutador

El conmutador está hecho de segmentos de cobre duro en forma de cuña, como se muestra en la figura 5.4. También está montado rígidamente sobre el eje, según se ilustra en la figura 5.1. Los segmentos de cobre están aislados entre sí por medio de láminas de mica. Un extremo de dos bobinas de la armadura está conectado eléctricamente a un segmento de cobre del conmutador. La forma en que cada bobina se conecta al segmento del conmutador define el tipo de devanado de la armadura. Básicamente hay dos tipos de devanados de la armadura: el *devanado imbricado o de lazo* y el *devanado ondulado*. El devanado de la armadura es el corazón de una máquina de cc. Se trata del devanado en el que se induce la fem (acción generadora) y se desarrolla el par (acción motora). Por tanto, el devanado de la armadura merece un análisis detallado, por lo que se le dedicará la sección siguiente.

El conmutador es un dispositivo muy bien concebido que cumple la función de un rectificador. Convierte la fem alterna inducida en las bobinas de la armadura en un voltaje unidireccional.

Escobillas

Las escobillas están sujetas en posición fija sobre el conmutador por medio de portaescobillas. Dentro del portaescobilla un resorte ajustable ejerce una presión constante sobre la escobilla con objeto de mantener un contacto apropiado entre ésta y el conmutador. La presión de la escobilla debe ser precisamente la requerida, pues si fuera

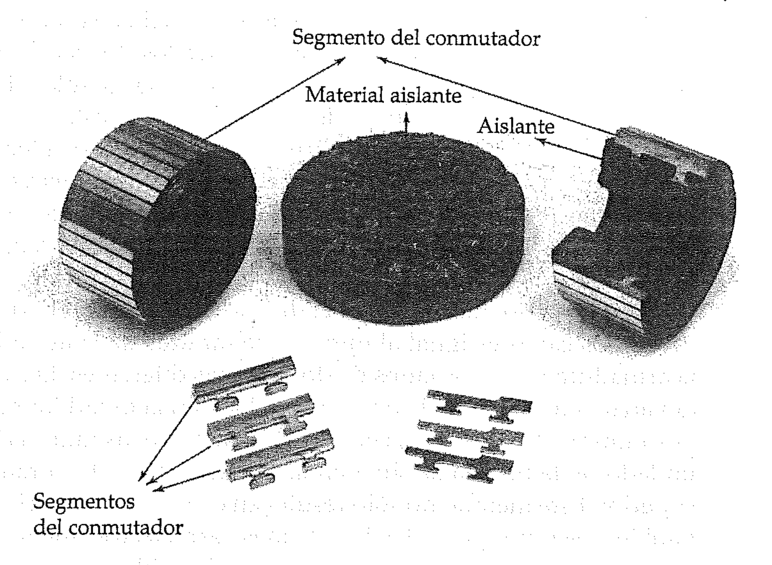


Figura 5.4. Estructura del conmutador. (*Cortesía de Toledo Commutador Company.*)

baja el contacto entre ella y el conmutador sería deficiente, lo cual produciría chispas en exceso y el conmutador se quemaría. Por otro lado, demasiada presión ocasionaría un desgaste excesivo de la escobilla y el sobrecalentamiento del conmutador por la fricción.

Hay muchos tipos de escobillas, que varían por su composición. Una escobilla puede estar hecha de carbón, carbón-grafito o una mezcla de cobre y carbón. La presencia de grafito en una escobilla proporciona autolubricación entre ésta y el conmutador.

Aunque los portaescobillas están montados en la campana extrema, están aislados eléctricamente de ella. Una escobilla está conectada eléctricamente a su portaescobilla por medio de un conductor de cobre trenzado que se llama *soguilla* o *trenza*. Mediante los portaescobillas es posible establecer la conexión eléctrica entre el circuito externo y las bobinas de la armadura.

5.3. Devanados de la armadura

Como se indicó en la sección anterior, la periferia externa de la armadura tiene varias ranuras en las que las bobinas se montan o se devanan. En general, estas ranuras están aisladas con papel *pescado* para proteger los devanados. En máquinas pequeñas, las bobinas se devanan directamente en las ranuras de la armadura mediante devanadores automáticos. En máquinas grandes, las bobinas se preforman y después se insertan en las ranuras. Cada bobina puede tener muchas vueltas de conductor de cobre esmaltado (aislado), comúnmente llamado *alambre magneto*.

En el capítulo 3 se señaló que la fem máxima se induce en una bobina de *paso completo*, es decir, cuando la distancia entre los dos lados de una bobina es de 180° eléctricos. En otras palabras, una bobina de paso completo implica que cuando un lado está bajo el centro de un polo sur, el otro debe estar bajo el centro del polo norte adyacente. Para máquinas bipolares, es muy tedioso colocar bobinas de paso completo; en general se emplea una bobina *de paso fraccionario* (extensión de la bobina menor que 180° eléctricos). Otra ventaja de una bobina de paso fraccionario es que utiliza menos cobre que la de paso completo. Sin embargo, la fem inducida se reduce en un factor denominado *factor de paso*.

El devanado más usado es el de *dos capas*. El número de bobinas para el devanado de dos capas es igual al número de ranuras de la armadura. Así, cada ranura de la armadura tiene dos lados de dos bobinas diferentes. Los devanadores automáticos devanan ambos lados de una bobina, bien en la mitad inferior o en la superior de las dos ranuras. No obstante, cuando se montan en las ranuras las bobinas preformadas, un lado de la bobina se sitúa en la mitad inferior de la ranura y el otro en la mitad superior. Este método no sólo resulta en el montaje simétrico de las bobinas, sino que también asegura que todas las bobinas sean eléctricamente equivalentes.

Cuando el número de ranuras no es divisible entre el número de polos ni siquiera es posible devanar una bobina de paso completo. En ese caso, puede emplearse el paso máximo posible como paso fraccionario de la bobina. El paso máximo de la bobina puede determinarse con la ecuación siguiente:

$$y = \text{valor entero de}\left(\frac{S}{P}\right) \tag{5.1}$$

donde y es el paso de la bobina en ranuras, S el número de ranuras en la armadura y P el número de polos en la máquina. Esta ecuación proporciona el paso como un valor entero de las ranuras por polo. Si se coloca un lado de la bobina en la ranura m, el otro lado debe insertarse en la ranura $m + y$.

Ejemplo 5.1

La armadura de una máquina de cc tiene 10 ranuras. Calcule el paso de la bobina para un devanado de *a*) dos polos y *b*) cuatro polos.

- Solución

Una armadura de 10 ranuras que emplee un devanado de dos capas requiere 10 bobinas.

a) Para una máquina bipolar, las ranuras por polo son

$$S_p = \frac{10}{2} = 5 \text{ ranuras}$$

Luego, $y = 5$

Como hay cinco ranuras por polo y un polo se extiende 180° eléctricos, el ángulo desde el centro de una ranura al siguiente *(paso de ranura)* es 180/5 = 36° eléctricos. En este caso, es posible usar una bobina de paso completo, es decir, se coloca un lado de la bobina en la ranura 1 y el otro lado en la ranura 6, como se muestra en la figura 5.5*a*. La segunda bobina va en las ranuras 2 y 7; la tercera en las ranuras 3 y 8 y así sucesivamente. Como el número de ranuras es igual al de dientes, cada bobina se extiende cinco dientes. Casi siempre es más fácil contar los dientes que las ranuras.

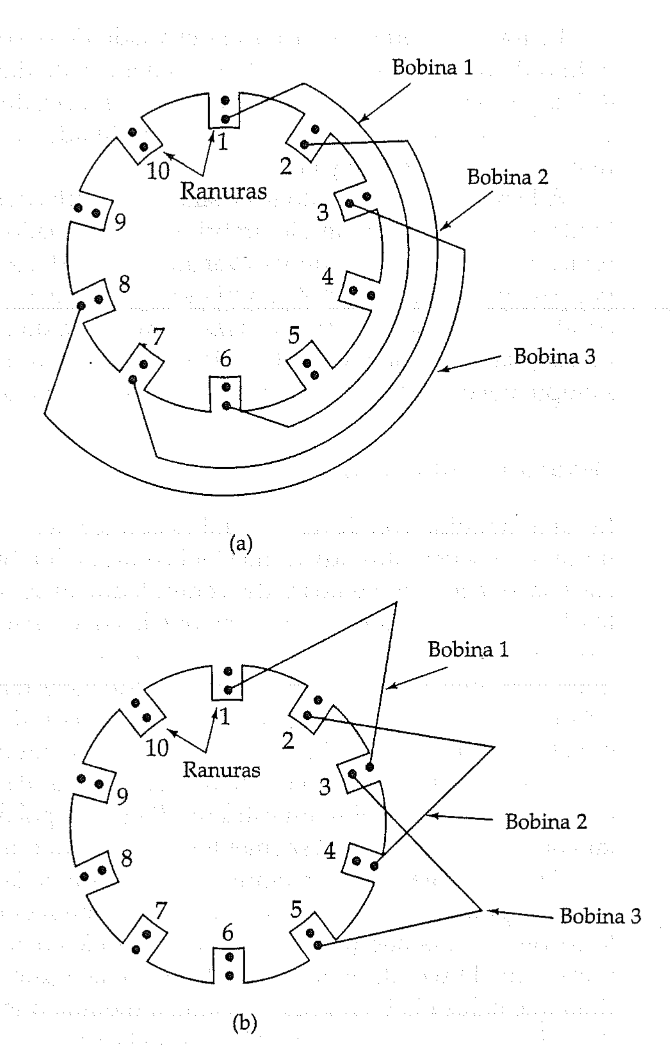


Figura 5.5. Ubicación de las bobinas en una armadura con 10 ranuras de una máquina de cc **(a)** bipolar y **(b)** tetrapolar.

b) Para una máquina tetrapolar, las ranuras por polo son

$$S_p = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \text{y} \qquad y = 2$$

En este caso la extensión de ranura es de 180/2.5 = 72° eléctricos. El número máximo de ranuras que puede extenderse la bobina es de dos. Entonces, el paso de la bobina es de 144° eléctricos. Las bobinas deben insertarse en las ranuras 1 y 3, 2 y 4, 3 y 5, etc., como se aprecia en la figura 5.5*b*.

■

La forma en que se conecte el devanado de la armadura al conmutador describe el tipo de devanado. Hay dos tipos generales de devanados: el *devanado imbricado o de lazo* y el *devanado ondulado*. El devanado imbricado se usa en máquinas de bajo voltaje y alta corriente; por otro lado, el ondulado se emplea para satisfacer requerimientos de alto voltaje y baja corriente.

Además, cada devanado se clasifica en simple, doble, triple, etc. Nuestro estudio se limita a los devanados simples imbricado y ondulado, a los que sencillamente designaremos devanado imbricado y devanado ondulado. No hay diferencia entre los dos tipos para una máquina bipolar. Ambos requieren dos escobillas y tienen dos trayectorias paralelas. El número de trayectorias paralelas de una máquina con devanado imbricado es igual al número de polos. Sin embargo, una máquina con devanado ondulado siempre tiene dos trayectorias paralelas, independientemente del número de polos.

Devanado imbricado

En una máquina con devanado imbricado los dos extremos de una bobina están conectados a segmentos adyacentes del conmutador. Suponga que las bobinas C van a conectarse a los segmentos C del conmutador. Si se conecta la bobina 1 a los segmentos 1 y 2 del conmutador, entonces puede conectarse la bobina 2 a los segmentos 2 y 3 del conmutador. Vistas desde los segmentos 1 y 3 del conmutador, las dos bobinas quedaron conectadas en serie. Ahora puede conectarse la bobina 3 a los segmentos 3 y 4 del conmutador. Al continuar con este procedimiento se termina conectando la bobina C a los segmentos C y 1 del conmutador. Finalmente, todos los devanados están conectados en serie y forman un lazo cerrado. *Se dice que el devanado se cierra sobre sí mismo*. En la figura 5.6 se muestra un diagrama polar de una máquina de cc hexapolar con 12 bobinas, con 12 segmentos de conmutador y con un paso de bobina de 2.

Para una rotación dextrógira (en el sentido de las manecillas del reloj), la bobina 1 deja el polo norte y el flujo que enlaza la bobina decrece. La dirección indicada de la corriente en la bobina 1 asegura que el flujo creado por ella se oponga a la disminución en el flujo, de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. Por otro lado, el flujo que enlaza la bobina 12 aumenta a medida que se mueve bajo el polo norte. La dirección de la corriente en esta bobina debe crear un flujo que se oponga al incremento. Al continuar de esta manera de una bobina a otra, se determinan las direcciones de las corrientes en todas las bobinas. Adviértase que en los segmentos 1, 5 y 9, am-

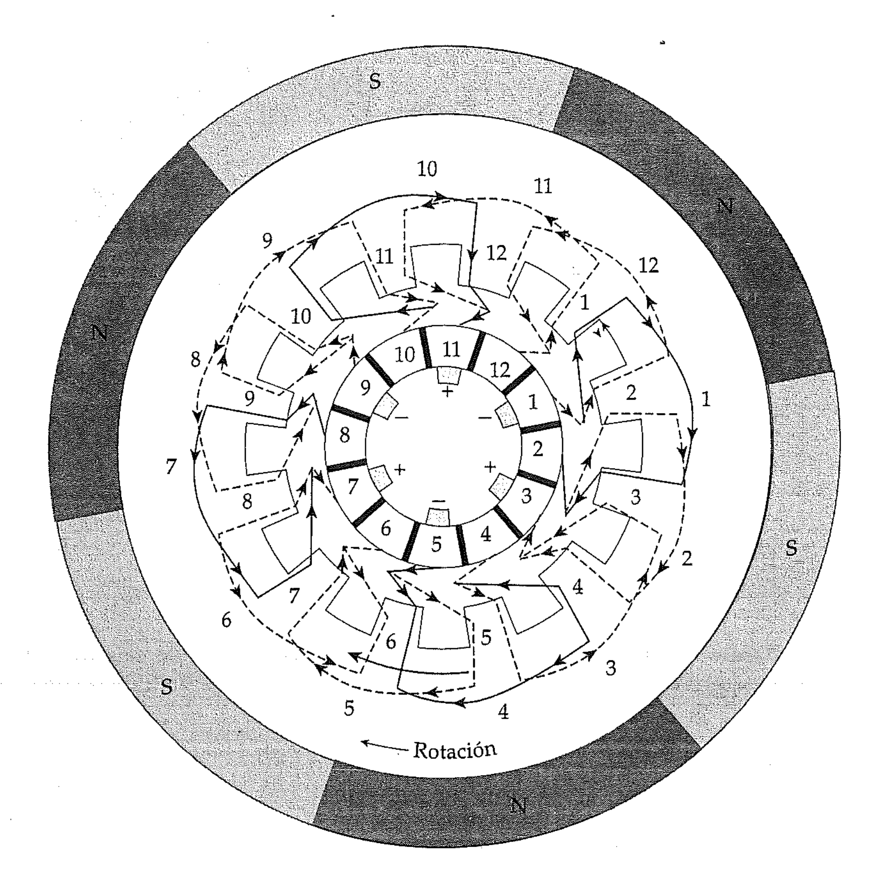


Figura 5.6. Diagrama del devanado polar de una máquina hexapolar de cc con devanado imbricado, 12 bobinas y 12 segmentos en el conmutador.

bas corrientes están dirigidas alejándose del conmutador. Para un generador de cc, estos segmentos identifican la colocación de las escobillas que tienen polaridad negativa. Los segmentos 3, 7 y 11 tienen ambas corrientes dirigidas hacia ellos. Por tanto, representan la colocación de las escobillas que tienen polaridad positiva. La diferencia de potencial entre una escobilla positiva en el segmento 3 del conmutador y una escobilla negativa en el segmento 1 de éste es igual a la fem inducida en las bobinas 1 y 2. En realidad, sólo dos bobinas contribuyen a la diferencia de potencial entre una escobilla positiva y una negativa. Luego, las tres escobillas negativas pueden conectarse eléctricamente juntas para formar una sola conexión. Asimismo es posible conectar las tres escobillas positivas para formar una sola conexión. En la figura 5.7 se muestra un arreglo como el descrito, donde cada bobina se representa mediante un solo lazo. Sin embargo, debe recordarse que cada lazo representa los dos lados de una bobina apropiadamente montada en las ranuras de la armadura. Observe que hay seis trayectorias paralelas para una máquina devanada hexapolar. Cada trayectoria contribuye con una sexta parte de la corriente en la armadura. Como se aprecia en la figura 5.7, cuando la armadura suministra una corriente de 12 A, la corriente en cada bobina es de 2 A.

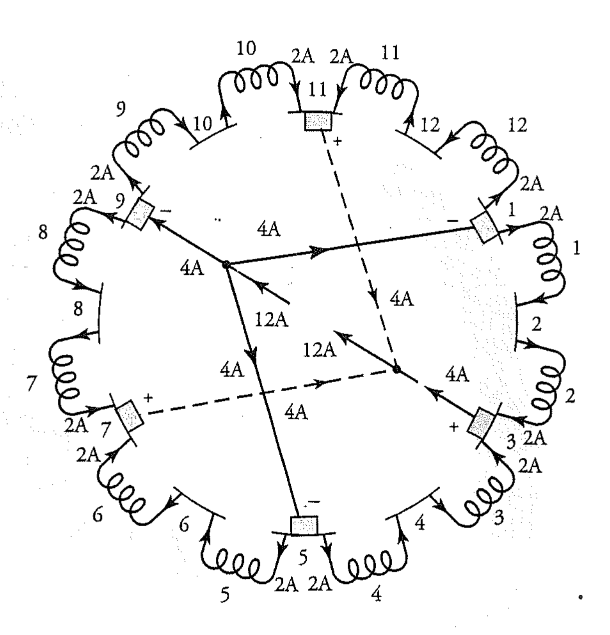


Figura 5.7. Conexiones de las escobillas y corrientes en seis trayectorias paralelas de la máquina con devanado imbricado de la figura 5.6 cuando trabaja como generador de cc.

Si observamos cada lado de una bobina como un conductor, entonces es posible determinar cómo se conectan estos conductores en el frente (lado del conmutador) y en la parte posterior (opuesto al conmutador). En la figura 5.8 se aprecia parte del diagrama polar de la figura 5.6. Los lados de bobina están numerados en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, comenzando con los lados en la ranura 1. Por ejemplo, los lados de la bobina 1 se numeraron 1 y 6, y los de la bobina 2, 3 y 8. Como los lados 1 y 6 están conectados en la parte posterior, el *paso posterior* (y_b) es 5. El lado 6 de la bobina 1 y el 3 de la bobina 2 están conectados al segmento 2 del conmutador. Así, el *paso anterior* (y_f) es 3. El paso anterior y el posterior deben ser impares para que la bobina quede colocada adecuadamente en las ranuras de la armadura. La diferencia entre ambos pasos siempre es igual a 2. Se dice que el devanado es *progresivo* cuando $y_b = y_f + 2$. Si $y_f = y_b + 2$, entonces es *regresivo*. El devanado (progresivo o regresivo) avanza (dextrógira o levógiramente, de forma respectiva) cuando se le mira desde el lado del conmutador. En nuestro ejemplo, el devanado es progresivo.

Para las armaduras con devanado imbricado simple, los pasos anterior y posterior pueden calcularse como sigue

$$y_f \frac{2C}{P} - 1$$

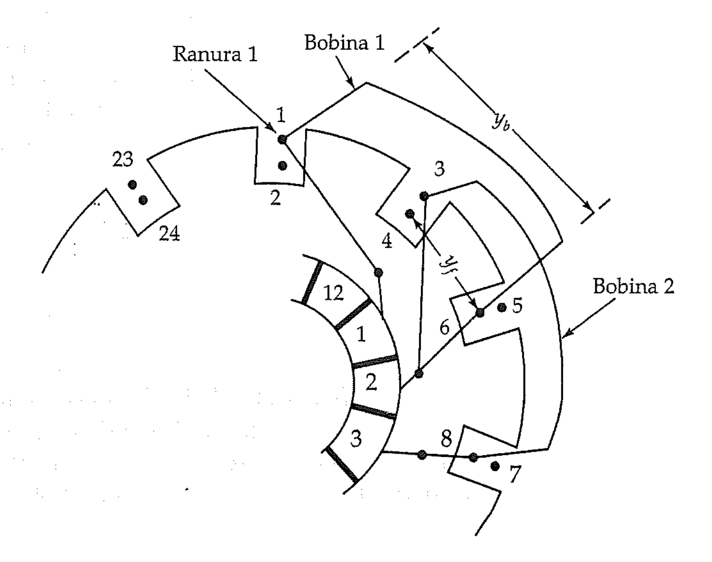


Figura 5.8. Conexiones de los conductores en la máquina con devanado imbricado de la figura 5.6, que muestra el paso anterior y el posterior.

y

$$y_b = \frac{2C}{P} + 1$$

para devanados progresivos, y

$$y_f = \frac{2C}{P} + 1$$

y

$$y_b = \frac{2C}{P} - 1$$

para devanados regresivos.

Cuando se observan desde las conexiones del devanado efectuadas a los segmentos del conmutador, se encuentra que el devanado avanza un segmento del conmutador por cada bobina. Por tanto, el paso del conmutador (y_c) es igual a 1.

Se deja al lector comprobar que una máquina tetrapolar con devanado imbricado necesita cuatro escobillas y que tiene cuatro trayectorias paralelas. En resumen, *el número de escobillas y de trayectorias paralelas en una máquina con devanado imbricado es igual a su número de polos.*

Devanado ondulado

El devanado ondulado difiere del imbricado únicamente en cómo se conectan las bobinas a los segmentos del conmutador. En el devanado imbricado, los dos extremos de una bobina están conectados a segmentos adyacentes del conmutador ($y_c = 1$). En el devanado ondulado, los dos extremos de una bobina se encuentran conectados a los segmentos del conmutador que están separados aproximada, no exactamente 360° eléctricos (pasos de dos polos). Esto se hace para garantizar que el devanado completo se cierra sobre sí mismo una sola vez. Al hacer las conexiones separadas casi en pasos de dos polos, se conecta en serie sólo las bobinas que están bajo los polos con la misma polaridad. Es decir, una bobina bajo un polo norte se conecta con otra situada en forma comparable bajo el polo norte siguiente, y así sucesivamente.

Para el devanado ondulado simple, el número de segmentos del conmutador por polo debe ser tal que se cumpla lo siguiente:

1. El paso del conmutador puede ser un poco mayor o menor que 360° eléctricos.
2. Después de pasar una vez alrededor del conmutador, la última bobina debe estar un segmento adelante (progresivo) o un segmento atrás (regresivo) respecto del segmento inicial.

Los requerimientos anteriores exigen que el número de segmentos del conmutador por cada par de polos no debe ser un entero. Como el paso del conmutador debe ser entero, entonces el número de segmentos del conmutador para un devanado ondulado simple se determina con la ecuación siguiente:

$$C = y_c\left(\frac{P}{2}\right) \pm 1 \tag{5.2}$$

donde C es el número total de segmentos del conmutador, y_c es el paso del conmutador (un número entero) y P es el número de polos. El signo más o menos (+ o −) es para indicar el devanado (progresivo o regresivo).

La ecuación anterior también puede escribirse como

$$y_c = \frac{\dfrac{C \pm 1}{P}}{2} \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.2

El conmutador de una máquina hexapolar tiene 35 segmentos. Determine el paso del conmutador. ¿Pueden conectarse las bobinas utilizando devanados regresivo y progresivo?

- Solución

De la ecuación 5.3 se desprende que el paso del conmutador es

$$y_c = \frac{35 \pm 1}{3} = 12,\ 11.33$$

Como el paso del conmutador es un número entero sólo si se suma 1 a la cantidad de segmentos del conmutador, las bobinas pueden conectarse únicamente con devanados progresivos.

■

Con objeto de entender la colocación de las bobinas y sus conexiones utilizando devanado ondulado simple de dos capas, considere una armadura con nueve ranuras, campo tetrapolar y un conmutador de nueve segmentos, como se aprecia en la figura 5.9. El paso de la bobina es de dos ranuras. El paso del conmutador puede ser de cuatro (320° eléctricos para un devanado regresivo) o de cinco segmentos (400° eléctricos para un devanado progresivo). En la figura 5.9 se ilustra un paso de conmutador de cuatro segmentos. La disposición de los devanados da lugar a un paso posterior y_b de 3 y a un paso anterior y_f de 5. El paso promedio es el mismo que el paso del conmutador.

Para un generador de cc que gira en el sentido de las manecillas del reloj, la dirección de las corrientes en las bobinas es la que se describe en la figura. El segmento 5 del conmutador marca la posición de una escobilla positiva y el 7, la de una negativa. Por tanto, sólo se precisan dos escobillas para hacer las conexiones entre el circuito externo y el devanado de la armadura. Al trazar el devanado se encuentra que la bobina 1 está conectada a los segmentos 1 y 5 del conmutador. La bobina 1 puede representarse como un lazo único al dibujar los segmentos 1 y 5 adyacentes entre sí, como se muestra en la figura 5.10. Resulta evidente que sólo hay dos trayec-

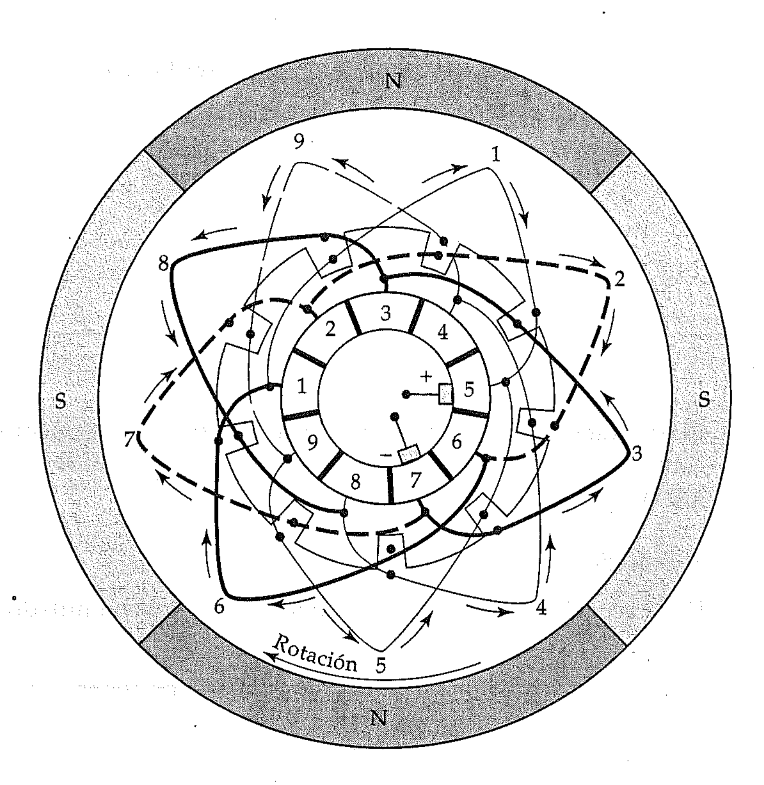


Figura 5.9. Máquina tetrapolar de cc con devanado ondulado y nueve ranuras que opera como generador.

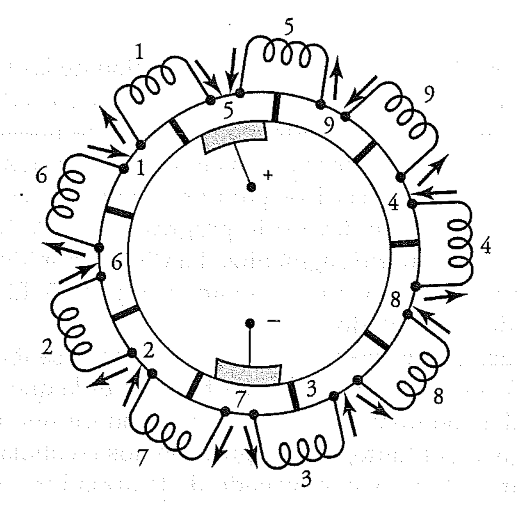


Figura 5.10. Reacomodo de los segmentos del conmutador que muestra el número de trayectorias paralelas y las bobinas conectadas en serie en cada trayectoria.

torias paralelas: las bobinas 1, 6, 2 y 7 forman una trayectoria paralela, y las bobinas 5, 9, 4, 8 y 3 constituyen la otra. Por tanto, puede establecerse lo siguiente respecto de la máquina con devanado ondulado: *un devanado ondulado requiere sólo dos escobillas y tiene dos trayectorias paralelas, independientemente del número de polos.*

Ejercicios

5.1. La armadura de una máquina tetrapolar con devanado imbricado tiene 12 ranuras. ¿Cuáles son los pasos posterior y anterior? Trace el devanado y muestre las posiciones de las escobillas. También indique la dirección de la corriente en todas las bobinas.

5.2. El conmutador de una máquina hexapolar tiene 31 segmentos. Determine el paso del conmutador, el paso anterior y el posterior. ¿Es posible conectar las bobinas utilizando devanados ondulados regresivo y progresivo?

5.3. El conmutador de una máquina octapolar tiene 39 segmentos. Determine el paso del conmutador, el paso anterior y el posterior. ¿Se pueden conectar las bobinas utilizando devanados ondulados regresivo y progresivo?

5.4. La armadura de una máquina hexapolar con devanado imbricado tiene 72 ranuras. ¿Cuáles son el paso posterior, el anterior y el del conmutador? Trace los devanados y muestre las posiciones de las escobillas.

5.4. Ecuación de la fem inducida

Con base en lo expuesto en la sección 3.4, sabemos que cuando una bobina de una sola espira gira en un campo magnético uniforme, el valor promedio de la fem inducida es

$$E_c = \frac{P}{\pi}\Phi_p\omega_m \tag{5.4}$$

donde P es el número de polos en una máquina de cc, Φ_P es el flujo por polo y ω_m es la velocidad angular de la armadura. También se obtuvo la expresión siguiente para la frecuencia del voltaje inducido en la bobina

$$f = \frac{P}{4\pi}\omega_m \tag{5.5}$$

A partir de las ecuaciones anteriores se obtiene la expresión siguiente para la velocidad de la armadura, en revoluciones por minuto (rpm):

$$N_m = \frac{120f}{P} \tag{5.6}$$

De lo expuesto en las secciones precedentes debe resultar claro no sólo que una máquina de cc tiene muchas bobinas devanadas adecuadamente en la armadura, sino también que cada una de ellas tiene, en general, varias vueltas. Además, las bobinas están conectadas en trayectorias paralelas: dos para el devanado ondulado y P para el devanado imbricado.

Sea N_c el número de vueltas por bobina, C el número total de bobinas (ranuras para un devanado de dos capas) y a el número de trayectorias paralelas ($a = 2$ para el devanado ondulado, o $a = P$ para el devanado imbricado); luego, el total de vueltas por trayectoria paralela es

$$N_a = \frac{C}{a} N_c \tag{5.7}$$

Observe que N_a representa las vueltas conectadas en serie entre una escobilla negativa y otra positiva. En consecuencia, el valor promedio de la fem inducida total entre las terminales de las dos escobillas es

$$E_a = \frac{PC}{\pi a} N_c \omega_m \Phi_p \tag{5.8}$$

Puesto que hay dos conductores por devanado, el número total de conductores, Z, en todas las ranuras de la armadura es

$$Z = 2CN_c \tag{5.9}$$

Al expresar la ecuación (5.8) en términos del total de conductores en las ranuras de la armadura se obtiene

$$E_a = \frac{PZ}{2\pi a} \Phi_p \omega_m$$

La ecuación anterior para la fem inducida en el devanado de la armadura se escribe tradicionalmente como

$$E_a = K_a \Phi_p \omega_m \tag{5.10}$$

donde

$$K_a = \frac{ZP}{2\pi a} \tag{5.11}$$

es una cantidad constante para una máquina dada y recibe el nombre de *constante de la máquina*. La ecuación 5.10 es válida tanto para generadores como para motores de cc. En el caso de un generador de cc, E_a se conoce como *fem generada* o *voltaje generado*. Se llama *fem inversa* o *fuerza contraelectromotriz*, cuando la máquina opera como motor.

En la explicación anterior se supuso de manera tácita que los polos magnéticos cubren toda la periferia de la armadura. Es decir, un arco polar subtiende un ángulo de 180° eléctricos. Esto es prácticamente imposible, en especial para una máquina devanada. Sin embargo, es posible diseñar máquinas en las que los polos cubran de 60 a 80% de la periferia de la armadura, lo cual ha de tenerse en cuenta al calcular el flujo por polo.

Si la armadura de un generador de cc suministra corriente constante I_a a una carga externa, la potencia eléctrica desarrollada por el generador es

$$P_d = E_a I_a = K_a \Phi_p \omega_m I_a \tag{5.12}$$

El sistema mecánico debe suministrar una potencia equivalente (la máquina de impulsión acoplada a la armadura). Si T_d es el par mecánico promedio que desarrolla la armadura de un generador de cc, la máquina de impulsión debe suministrar una cantidad de par igual en dirección opuesta para mantener la armadura girando a velocidad constante ω_m. Como en un sistema mecánico la potencia desarrollada es

$$P_d = T_d \omega_m \tag{5.13}$$

el par desarrollado es, según la ecuación 5.12,

$$T_d = K_a \Phi_p I_a \tag{5.14}$$

La ecuación 5.13 también es válida para un motor de cc en el que la potencia eléctrica que se suministra a la armadura (P_d) debe estar equilibrada por la fuerza mecánica ($T_d \omega_m$) entregada a la carga. La ecuación 5.13 simboliza, en consecuencia, la transición de fuerza mecánica a fuerza eléctrica en un generador de cc, o viceversa en un motor de cc. En la sección próxima se obtiene la expresión del par (ecuación 5.14) desde otro punto de vista.

Ejemplo 5.3

Una máquina bipolar de cc de 24 ranuras tiene 18 vueltas por bobina. La densidad de flujo promedio por polo es 1 T. La longitud efectiva de la máquina es de 20 cm y el radio de la armadura es de 10 cm. Los polos magnéticos están diseñados para cubrir 80% de la periferia de la armadura. Si la velocidad angular de la armadura es 183.2 rad/s, determine *a*) la fem inducida en el devanado de la armadura, *b*) la fem inducida por bobina, *c*) la fem inducida por vuelta, y *d*) la fem inducida por conductor.

• Solución

Para un devanado de dos capas, el número de bobinas es el mismo que el de ranuras en la armadura, es decir, $C = 24$. N_c es un dato conocido y es igual a 18.

Por tanto, el número total de conductores en la armadura es: $Z = 2 \times 24 \times 18 = 864$.
Para una máquina bipolar: $a = 2$.
El área real polar es

$$A_p = \frac{2\pi rL}{P} = \frac{2\pi \times 0.1 \times 0.2}{2} = 0.063 \text{ m}^2$$

y el área polar efectiva es

$$A_e = 0.063 \times 0.8 = 0.05 \text{ m}^2$$

Luego, el flujo efectivo por polo es

$$\Phi_p = BA_e = 1 \times 0.05 = 0.05 \text{ Wb}$$

a) Según la ecuación (5.11), la constante de máquina es

$$K_a = \frac{2 \times 864}{2\pi \times 2} = 137.51$$

Según la ecuación 5.10, la fem inducida en el devanado de la armadura es

$$E_a = 137.51 \times 0.05 \times 183.2 = 1\,259.6 \text{ V}$$

b) Como existen dos trayectorias paralelas, el número de bobinas en cada trayectoria es $24/2 = 12$. Por tanto, la fem inducida por bobina es

$$E_{\text{bobina}} = \frac{1\,259.6}{12} = 104.97 \text{ V}$$

c) Como hay 18 vueltas en cada bobina, la fem inducida por vuelta es

$$E_{\text{vuelta}} = \frac{104.97}{18} = 5.83 \text{ V}$$

d) Finalmente, la fem inducida por conductor es

$$E_{\text{cond}} = \frac{5.83}{2} = 2.915 \text{ V}$$

■

Ejercicios

5.5. Una máquina hexapolar de cc tiene 360 conductores en las ranuras de su armadura. Cada polo magnético subtiende un arco de 20 cm y tiene una longitud de 20 cm. La densidad de flujo por polo es 0.8 T. La velocidad de la armadura es 900 rpm. Determine la fem inducida en la armadura si la máquina tiene *a*) devanado imbricado y *b*) devanado ondulado.

5.6. La fem inducida en una máquina tipo PM es de 440 V a 1 600 rpm. ¿Cuál es la fem inducida si la velocidad cambia a *a*) 800 rpm, *b*) 1 200 rpm, *c*) 2 000 rpm, y *d*) 3 200 rpm?

5.7. La armadura de un generador tetrapolar de cc con devanado imbricado tiene 28 ranuras con 10 conductores en cada una. El flujo por polo es de 0.03 Wb y la velocidad de la armadura es de 1 200 rpm. Calcule *a*) la frecuencia de la fem inducida en cada conductor de la armadura, *b*) la fem inducida en la armadura, *c*) la fem inducida por bobina, *d*) la fem inducida por vuelta, y *e*) la fem inducida por conductor.

5.8. Cuando el generador del ejercicio 5.7 se conecta a la carga, la corriente en cada conductor es de 2 A, ¿cuál es la corriente en la armadura? ¿Cuáles son la potencia y el par desarrollados por el generador?

5.5. Par desarrollado

En la sección 3.4 se obtuvo la expresión para el par que experimenta una bobina conductora de corriente de una sola espira en un campo magnético uniforme,

$$T_e = 2BiLr \tag{5.15}$$

donde B es la densidad de flujo uniforme, i es la corriente en la bobina, L es la longitud efectiva de cada conductor de la bobina que está expuesto al campo magnético y r es el radio en el que se ubica cada conductor. En el caso de una máquina de cc, L es la longitud (altura de la pila de laminaciones) de la armadura y r es su radio.

Aun cuando la corriente en la bobina varía senoidalmente, la corriente en un conductor bajo un polo magnético es del tipo de onda completa rectificada. Si I_c es el valor promedio de la corriente, entonces el par promedio que actúa sobre una bobina de una sola espira es

$$T_c = 2BLrI_c \tag{5.16}$$

Como una máquina de cc con P polos tiene C bobinas conectadas en trayectorias paralelas y cada bobina tiene N_c vueltas, el número total de vueltas es CN_c. Si I_a es la

cc promedio, entonces I_a/a es la corriente en cada vuelta. Por tanto, el par promedio que desarrolla una máquina de cc es

$$\begin{aligned} T_d &= \text{Par desarrollado por una vuelta} \times \text{total de vueltas} \\ &= \left[2BLr\frac{I_a}{a}\right][CN_c] \\ &= \frac{BLrZ}{a} I_a \end{aligned}$$

Si A_P es el área de cada polo, es decir,

$$A_P = \frac{2\pi rL}{P}$$

entonces el par desarrollado por una máquina de cc se convierte en

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{PZ}{2\pi a} BA_P I_a \\ &= K_a \Phi_P I_a \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde

$$K_a = \frac{PZ}{2\pi a}$$

es la constante de máquina y $\Phi_P = BA_P$ es el flujo total por polo. La ecuación 5.17 es exactamente la misma que la 5.14, la cual se obtuvo desde el punto de vista de la potencia desarrollada.

Ejemplo 5.4

Si la corriente en la armadura de la máquina del ejemplo 5.3 es de 25 A, determine *a*) la corriente en cada conductor, *b*) el par desarrollado, y *c*) la potencia desarrollada.

- **Solución**

a) Como hay dos trayectorias paralelas, la corriente (promedio) por conductor es 12.5 A.

b) Según la ecuación (5.17), el par (promedio) desarrollado por la máquina es

$$T_d = 137.51 \times 0.05 \times 25 = 171.89 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) La potencia (promedio) desarrollada es

$$P_d = E_a I_a = 1\,259.6 \times 25 = 31\,490 \text{ W} \quad \text{o} \quad 31.49 \text{ kW}$$

La potencia desarrollada también puede calcularse como

$$P_d = T_d \omega_m = 171.89 \times 183.2 \approx 31\,490 \text{ W} \quad \text{o} \quad 31.49 \text{ kW}$$

■

Ejercicios

5.9. Determine el par promedio desarrollado por una máquina hexapolar de cc con 300 conductores dispuesto en un devanado imbricado. El flujo por polo es de 0.3 Wb. La corriente en el conductor es de 12 A. Si la velocidad de la armadura es de 600 rpm, ¿cuál es la potencia desarrollada? ¿Cuál es la fem inducida?

5.10. La armadura de una máquina hexapolar de cc tiene 126 ranuras y está devanada con cinco vueltas por bobina en devanado imbricado. La fem inducida es de 440 V a 120 rad/s. Calcule el flujo por polo. Si la corriente en el conductor es de 5 A, ¿cuál es el par desarrollado? También determine la potencia promedio desarrollada por la máquina.

5.11. La armadura con devanado ondulado de un generador octapolar de cc tiene 95 bobinas. Cada bobina tiene cinco vueltas. El flujo por polo es de 0.5 Wb. La velocidad de la armadura es de 600 rpm. La corriente por conductor es de 20 A. Determine *a*) la potencia desarrollada y *b*) el par desarrollado.

5.6. Característica de magnetización de una máquina de cc

La fem inducida en el devanado de la armadura de una máquina de cc es directamente proporcional a *a*) el flujo por polo y *b*) la velocidad de la armadura. Supongamos que el devanado del campo de una máquina de cc está conectado a una fuente variable de cc capaz de suministrar la corriente de campo deseada. Si el circuito de la armadura se deja abierto y se hace girar la armadura a la velocidad especificada de la máquina, se tiene que la fem inducida en la máquina puede expresarse como

$$E_a = K_1 \Phi_P \tag{5.18}$$

donde $K_1 = K_a \omega_m$ es una cantidad constante. En otras palabras, la fem inducida es directamente proporcional al flujo en la máquina.

El flujo por polo Φ_P depende de la fuerza magnetomotriz (fmm) que suministra la corriente I_f en el devanado del campo. Como el número de vueltas por polo es fijo, el flujo por polo es una función de la corriente de campo I_f. Es decir,

$$\Phi_P = k_f I_f \tag{5.19}$$

donde k_f es una constante de proporcionalidad.

La fem inducida puede escribirse como

$$E_a = K_1 k_f I_f \tag{5.20}$$

Puesto que el circuito magnético de una máquina de cc consta tanto de regiones lineales (entrehierros) como no lineales (material magnético para el estator y la armadura), k_f cambia con el cambio en el flujo (o densidad de flujo) en la máquina. Para ser precisos, k_f decrece a medida que el flujo en la máquina aumenta. Expresado con sencillez, la fem inducida E_a no varía linealmente con la corriente de campo I_f.

No obstante, la relación entre E_a e I_f puede determinarse midiendo E_a a diferentes valores de I_f a velocidad constante (generalmente la especificada) de la armadura. Cuando se grafica E_a como función de I_f (véase la fig. 5.11), la curva se conoce como *característica sin carga* porque la armadura no está cargada. Como E_a es una medida indirecta del flujo (o densidad de flujo) por polo e I_f lo es de la fmm aplicada (ampere-vueltas por polo), la curva está confinada a ser semejante a la curva *B-H* del material magnético. Por tal razón, la curva sin carga recibe el nombre de *curva de magnetización (característica) de una máquina de cc.*

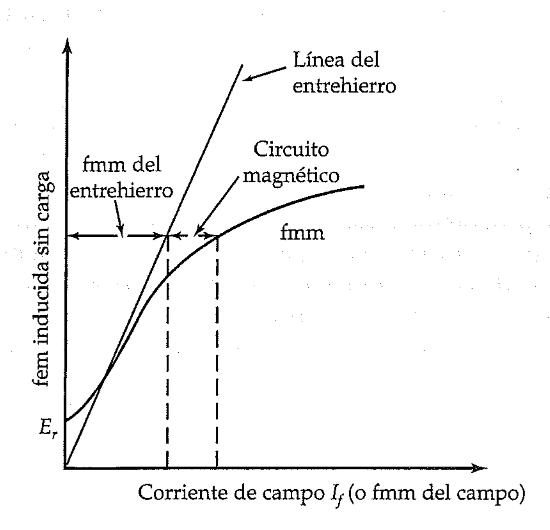


Figura 5.11. Característica de magnetización (sin carga) de una máquina de cc.

Las curvas de magnetización pueden determinarse en forma experimental tanto para valores crecientes (en ascenso) como decrecientes (en descenso) de la corriente de campo. Debido a la histéresis, no cabe esperar que las dos curvas se encimen. En otras palabras, para cualquier valor de la corriente de campo, el flujo en la máquina depende de si la corriente fue creciente o decreciente hasta alcanzar el valor deseado. Por tanto, *durante el experimento la corriente de campo debe variarse continuamente sólo en una dirección.* Con objeto de simplificar los cálculos teóricos que suponen el uso de la curva de magnetización, es una práctica aceptada obtener la media de las dos curvas y referirse a ella como *curva de magnetización.*

La fem inducida no comienza en cero cuando la corriente de campo es cero, sino en cierto valor un tanto mayor debido al magnetismo remanente o residual producto de la operación previa de la máquina. Ese valor de la fem inducida se denomina *fem residual*, E_r. Excepto por ese aspecto, la parte inferior de la curva de magnetización es prácticamente una línea recta, lo cual se debe a que la fmm que se requiere para el material magnético es casi despreciable para valores pequeños de la densidad de flujo en la máquina. Dicho de otro modo, la mayor parte de la reluctancia del circuito magnético se encuentra en el entrehierro. La parte superior de la curva muestra la saturación subsiguiente del material magnético cuando la densidad de flujo en la máquina es alta. La flexión de la curva hacia la derecha es una indicación de que parte de la fmm aplicada se consume por la reluctancia del material magnético. El resto de la fmm es, por supuesto, necesario para establecer el flujo en el entrehierro. Al trazar una línea de entrehierro, línea que pasa por el origen y es tangente a la curva de magnetización, siempre es posible determinar la fmm necesaria en el entrehierro para establecer un flujo determinado (para inducir una fem específica). El material magnético necesita la fmm restante.

Como la fem inducida es directamente proporcional a la velocidad de la armadura, se puede graficar la curva de magnetización a cualquier velocidad aplicando la curva de magnetización a la velocidad especificada. Si E_{a1} es la fem inducida con una corriente de campo de I_f cuando la armadura gira a la velocidad ω_{m1}, entonces la fem inducida E_{a2} con la misma corriente de campo, pero a una velocidad ω_{m2} es

$$E_{a2} = \frac{\omega_{m2}}{\omega_{m1}} E_{a1} \tag{5.21}$$

Demostraremos que para la operación de todos los generadores autoexcitados la saturación del material magnético es, en realidad, una bendición disfrazada. Es decir, la flexión a la derecha de la curva de magnetización es necesaria para operar bien un generador autoexcitado.

5.7. Teoría de la conmutación

Para la operación satisfactoria de una máquina de cc, la fem inducida en cada conductor bajo un polo debe tener la misma polaridad. Si el devanado de la armadura condu-

ce una corriente, la corriente en cada conductor bajo un polo debe estar dirigida en la misma dirección. Ello implica que a medida que el conductor se mueve de un polo al siguiente debe haber una inversión de la corriente en ese conductor. Se dice que el conductor y la bobina en la que tiene lugar la inversión de la corriente *conmutan*. El proceso de inversión de corriente en una bobina que conmuta se denomina *conmutación*.

Idealmente, el proceso de conmutación debe ser instantáneo, como se indica en la figura 5.12*a*. Sin embargo, esto sólo puede lograrse si el ancho de la escobilla y los segmentos del conmutador son infinitesimalmente pequeños. En la práctica, no nada más la escobilla y el conmutador tienen un ancho finito, sino que la bobina también tiene inductancia finita. Por tanto, transcurre cierto tiempo para que la inversión de la corriente tenga lugar, como se ilustra en la figura 5.12*b*.

En la figura 5.13*a* se muestra un conjunto de ocho bobinas conectadas a los segmentos de un conmutador de un generador bipolar de cc. Las bobinas *g*, *h*, *a* y *b* están bajo el polo norte y forman una trayectoria paralela, mientras que las bobinas *c*, *d*, *e* y *f* están bajo el polo sur y forman otra trayectoria paralela. Por ende, la corriente en las bobinas bajo el polo norte ocurre en dirección opuesta a la corriente en las bobinas bajo el polo sur. Sin embargo, la magnitud de la corriente en cada bobina es I_c. Se supone que el ancho de cada escobilla es igual al ancho del segmento del conmutador. La escobilla *A* está sobre el segmento 3 del conmutador, mientras que la *B* se encuentra sobre el segmento 7. La corriente a través de cada escobilla es $2I_c$. A medida que el conmutador gira en el sentido de las manecillas del reloj, el extremo delantero de la escobilla *A* entra en contacto con el segmento 2 del conmutador y pone en cortocircuito la bobina *b*, co-

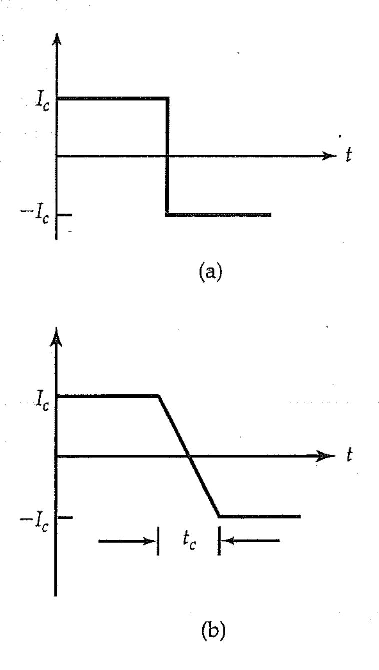


Figura 5.12. Inversión de la corriente en una bobina entrando en conmutación con las escobillas de **(a)** ancho infinitesimal y **(b)** ancho finito.

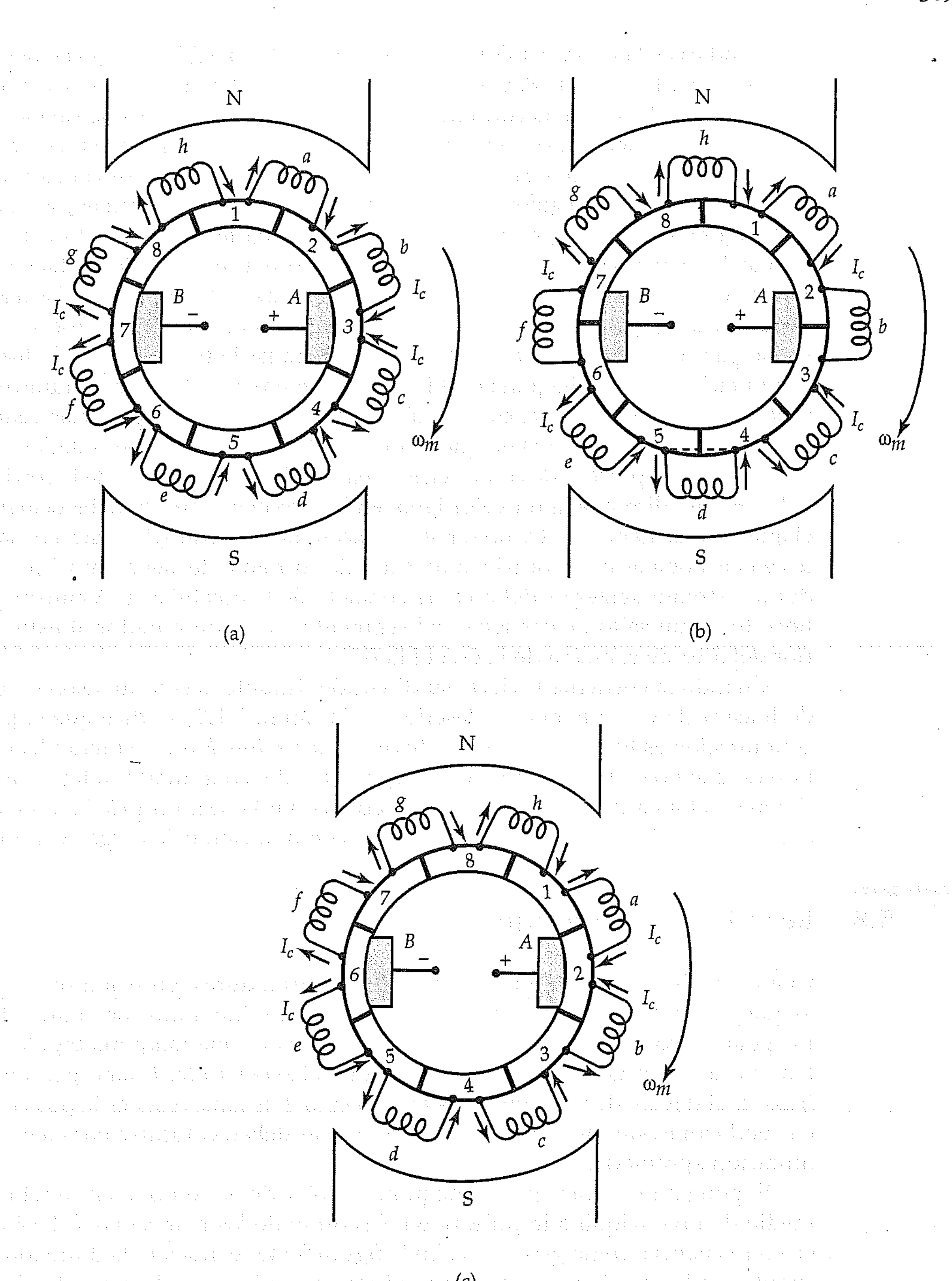


Figura 5.13. Bobinas *b* y *f* **(a)** antes **(b)** durante y **(c)** después del proceso de conmutación.

mo se indica en la figura 5.13*b*. De manera semejante, la bobina *f* también queda en cortocircuito por la escobilla *B*. Las bobinas *b* y *f* ahora entran en conmutación. En la figura 5.13*b* es evidente que la corriente a través de cada escobilla sigue siendo $2I_c$. En ese instante, las fem inducidas en las bobinas *b* y *f* son cero porque cada una está en el plano perpendicular al flujo. Sin embargo, un momento después, los contactos de las escobillas *A* y *B* con los segmentos 3 y 7 del conmutador se interrumpen, según se ilustra en la figura 5.13*c*. En ese momento, la bobina *b* es parte de la trayectoria paralela que forman las bobinas *c*, *d* y *e*, y la dirección de la corriente en la bobina se ha invertido. En forma similar, la bobina *f* se ha vuelto parte de la trayectoria paralela formada por las bobinas *a*, *h* y *g*, y su corriente también ha invertido su dirección. El proceso de conmutación para las bobinas *b* y *f* está completo. Ahora las bobinas *a* y *e* están listas para la conmutación. En una máquina multipolar, el número de bobinas que entran en conmutación en cualquier instante es igual al número de trayectorias paralelas cuando el ancho de la escobilla es el mismo que el ancho del segmento del conmutador.

Para que el proceso de conmutación sea perfecto, la inversión de la corriente de su valor en una dirección a un valor igual en la dirección opuesta debe ocurrir durante el intervalo de tiempo t_c. De no ser así, el exceso de corriente (diferencia de las corrientes en las bobinas *b* y *c*) ocasiona un salto de corriente del segmento 3 del conmutador al extremo posterior del área de contacto de la escobilla *A*. Asimismo, también tiene lugar un salto de corriente del segmento 7 del conmutador al extremo posterior del área de contacto de la escobilla *B*.

Cuando la corriente invierte su dirección durante la conmutación en un patrón de línea recta como el que se describe en la figura 5.12*b*, se dice que el proceso de conmutación es lineal. Un proceso de *conmutación lineal* se considera ideal en el sentido de que no ocurren saltos de los segmentos del conmutador a los extremos posteriores del área de contacto de las escobillas. En la sección próxima analizaremos algunos métodos que permiten mejorar la conmutación bajo cargas variables.

5.8. Reacción de la armadura

Cuando no hay corriente en el devanado de la armadura (condición sin carga), el flujo que produce el devanado del campo está distribuido uniformemente sobre las caras polares, como se aprecia en la figura 5.14*a* para una máquina bipolar de cc. La fem inducida en una bobina que se halla en el *plano neutro* (plano perpendicular al flujo en el devanado del campo) es igual a cero. Por tanto, ésta es la posición neutral en condiciones sin carga en la que las escobillas deben colocarse para tener una conmutación apropiada.

Supongamos ahora que la máquina bipolar de cc se pone en movimiento por medio de una máquina impulsora en el sentido de las manecillas del reloj y opera, en consecuencia, como generador. En la figura 5.14*b* se muestra la dirección de las corrientes en los conductores de la armadura en condiciones de carga. La distribución del flujo de la armadura debida a la fmm de la armadura también aparece en esa figura. La distribución del flujo debido al devanado del campo se ha eliminado para destacar la distribución del flujo debido a la fmm de la armadura. Observe que el eje magnético del flujo de la armadura (en cuadratura, o eje *q*) es perpendicular al eje mag-

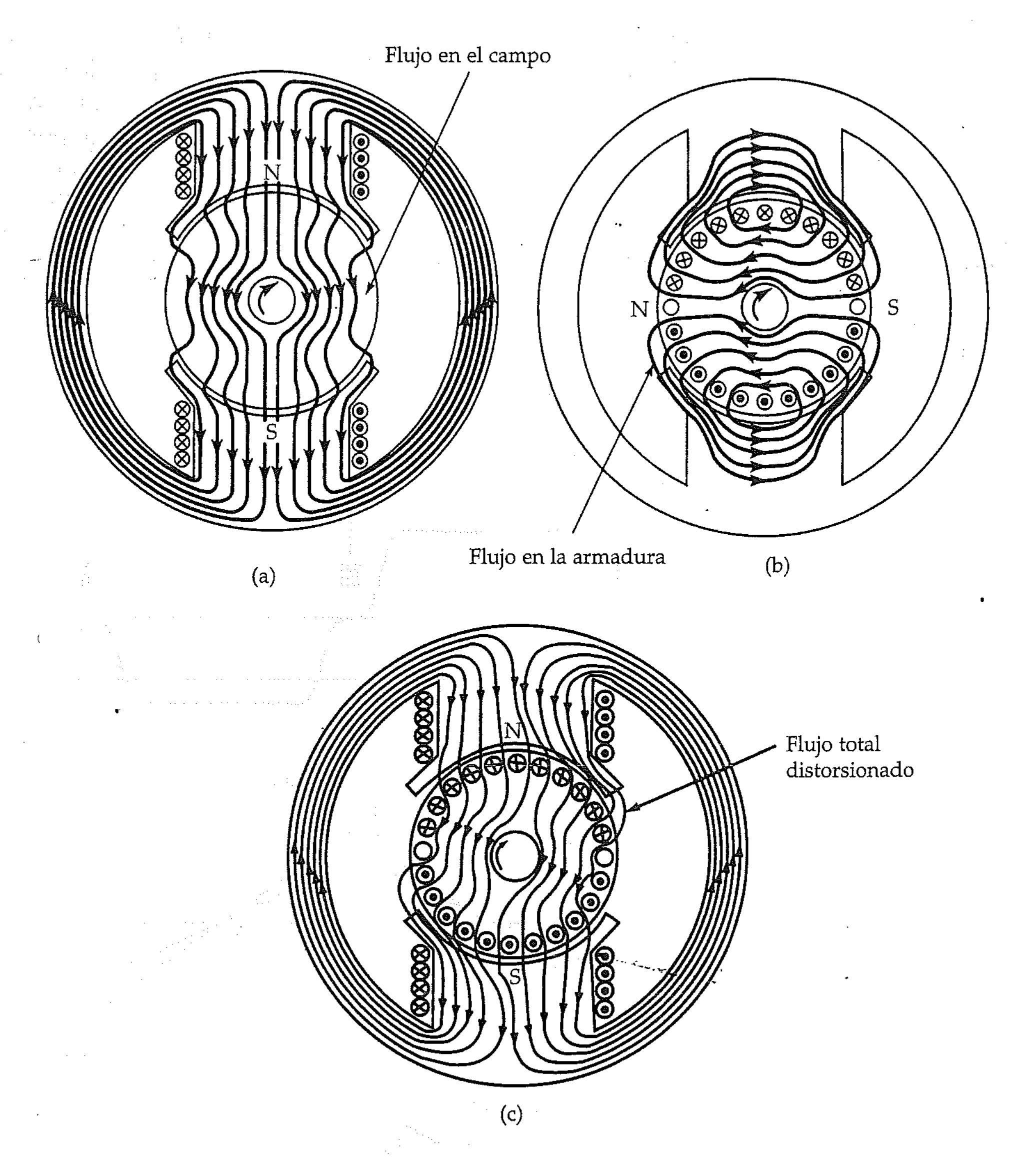


Figura 5.14. **(a)** Distribución del flujo debida únicamente al devanado del campo. **(b)** Distribución del flujo debida únicamente a la fmm de la armadura. **(c)** Distribución del flujo debida al devanado del campo y la fmm de la armadura.

nético del flujo del devanado del campo (directo, o eje *d*). Como ambos flujos ocurren al mismo tiempo en que la armadura está en condiciones de carga, el flujo resultante se distorsiona, como se indica en la figura 5.14*c*. El flujo de la armadura ha debilitado el flujo en una mitad del polo y lo ha reforzado en la otra. Por tanto, la corriente en la armadura ha desplazado el eje del campo magnético del flujo resultante en dirección de la rotación del generador. Puesto que el plano neutral es perpendicular

al campo resultante, también ha avanzado. El efecto de la fmm de la armadura sobre la distribución del campo se llama *reacción de la armadura*. Es posible tener un panorama mejor de lo que ocurre en el generador si se observa su diagrama desarrollado.

En la figura 5.15*a* se muestra el diagrama desarrollado del flujo por polo en condiciones sin carga. A fin de hacer más sencilla la explicación, supongamos que los conductores se encuentran distribuidos uniformemente sobre la superficie de la armadura. Luego, la fmm de la armadura en condiciones de carga tiene la forma de onda triangular que se observa en la figura 5.15*b*. La distribución del flujo debido a la

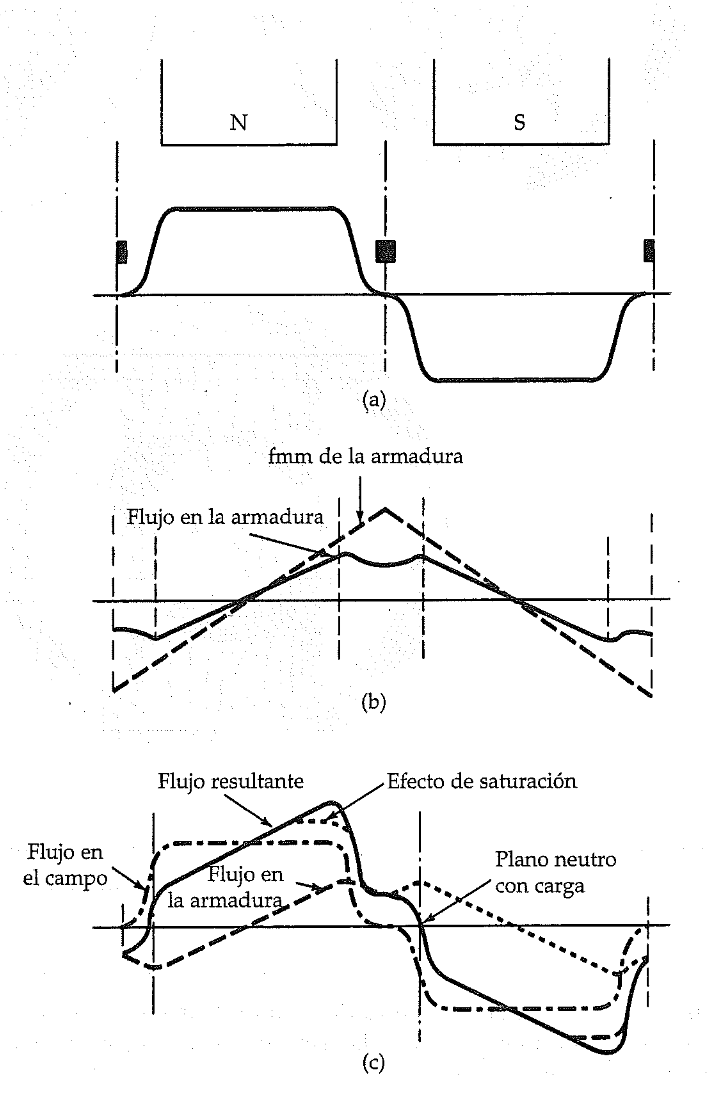


Figura 5.15. (a) Flujo por polo sin carga. **(b)** Fuerza magnetomotriz (fmm) y el flujo debido a la reacción de la armadura. **(c)** Flujo resultante.

fmm de la armadura también es una línea recta bajo el polo. Si el arco polar es menor que 180° eléctricos, el flujo en la armadura tiene una curva con forma de silla de montar en la región interpolar, producto de su reluctancia más elevada. En la figura 5.15*c* se muestra la distribución resultante (total) del flujo. Es evidente la distorsión en la distribución del flujo con carga en comparación con la distribución del flujo en condiciones sin carga. Si la saturación es baja, la disminución en el flujo en una mitad del polo va acompañada de un aumento igual en el flujo en la otra mitad. Por tanto, el flujo neto por polo es el mismo con carga o sin ella. Además, si los polos ya estuvieran cercanos al punto de saturación en condición sin carga, el incremento en el flujo es más pequeño que la disminución, como lo señala la línea punteada en la figura 5.15*c*. En ese caso, hay una pérdida neta en el flujo total. Para una velocidad constante de la armadura, la fem inducida en el devanado de esta última disminuye por el decrecimiento en el flujo cuando la armadura está en condiciones de carga.

Como ya se mencionó, el plano neutro en el generador se mueve en la dirección de rotación mientras la armadura se encuentre en condiciones de carga. Debido a que la zona neutral es la ideal para que las bobinas entren en conmutación, las escobillas deben moverse en congruencia con dicha zona. De no ser así, la conmutación forzada origina exceso de chispas. Conforme el flujo en la armadura varía con la carga, también lo hace su efecto en el flujo establecido por el devanado del campo. Luego, el desplazamiento del plano neutral es función de la corriente en la armadura.

La reacción en la armadura tiene un efecto desmagnetizador en la máquina. La reducción del flujo debido a la reacción en la armadura sugiere una pérdida significativa en la fmm aplicada por polo de la máquina. En máquinas grandes, la reacción de la armadura puede tener un efecto devastador en su rendimiento en condiciones de plena carga. Por consiguiente, deben desarrollarse técnicas para contrarrestar su efecto desmagnetizador. A continuación se resumen algunas medidas que se utilizan para combatir la reacción de la armadura:

1. Las escobillas pueden avanzarse de su posición neutral sin carga (eje neutro geométrico) al nuevo plano neutro con carga. Ésta es la medida menos cara, pero sólo es útil para generadores con carga constante.

2. Los *interpolos*, o *polos de conmutación* como a veces se les denomina, son polos estrechos que pueden colocarse en la región interpolar centrados a lo largo del eje neutro mecánico del generador. Los devanados interpolares se conectan permanentemente en serie con la armadura para darles efectividad en condiciones de carga variable. Los interpolos producen flujo que se opone al flujo debido a la fmm de la armadura. Cuando el interpolo se diseña en forma apropiada, el flujo neto a lo largo del eje neutro geométrico puede reducirse a cero para cualquier condición de carga. Debido a que los devanados interpolares conducen corriente de la armadura, sólo se precisan unas cuantas vueltas de conductor comparativamente grueso para proporcionar la fmm interpolar necesaria. En la figura 5.16 se muestra la distribución del flujo en la armadura con interpolos.

3. Otro método para anular el efecto de la reacción de la armadura es mediante *devanados de compensación*, que también llevan corriente de la armadura y están si-

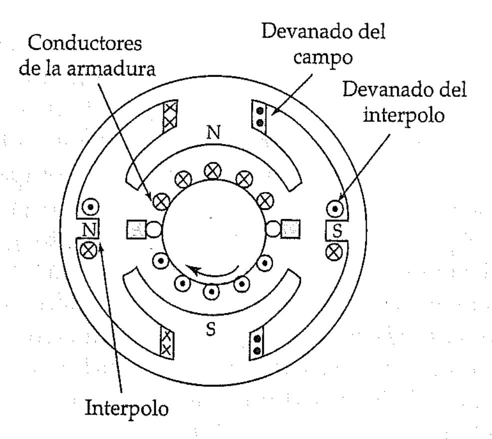


Figura 5.16. Devanado de los interpolos de un generador de cc.

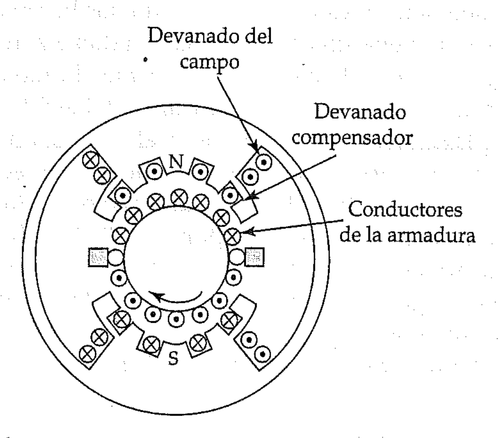


Figura 5.17. Devanado compensador de un generador de cc.

tuados en las ranuras poco profundas cortadas en las caras polares, como se muestra en la figura 5.17. De nuevo, el flujo que produce el devanado de compensación se hace igual y opuesto al que establece la fmm de la armadura.

5.9. Tipos de generadores de cc

Con base en el método de excitación, los generadores de cc pueden dividirse en dos categorías: con excitación independiente y autoexcitados. Un generador tipo PM puede considerarse con excitación independiente y con flujo magnético constante.

La corriente del campo (excitación) en un generador con excitación independiente la suministra una fuente externa independiente. En cambio, un generador auto-

excitado proporciona su propia corriente de excitación. Según el método de conexión del devanado o devanados del campo, un generador autoexcitado se clasifica adicionalmente en *a) generador shunt* o en derivación, si su devanado del campo, llamado *devanado del campo shunt*, se conecta en paralelo con las terminales de la armadura; *b) generador serie*, cuando su devanado del campo, denominado *devanado del campo en serie*, se conecta en serie con la armadura, y *c) generador compound* o *compuesto*, que incorpora ambos devanados del campo: shunt y serie.

La operación de cada tipo de generador de cc se estudia examinando su característica externa en condiciones de estado estable. La *característica externa* de un generador de cc es la variación del voltaje de carga *(voltaje en las terminales)* con la corriente de carga. Esta información permite destacar la aplicación para la que es más apropiado cada tipo de generador.

Durante el análisis de los generadores de cc debe tenerse en cuenta lo siguiente:

1. El generador se pone en movimiento por medio de una máquina de impulsión, como un motor síncrono, a velocidad constante.
2. La fem inducida en el devanado de la armadura es proporcional al flujo en la máquina, es decir, $E_a = K_a \Phi_P \omega_m$.
3. Las terminales de la armadura están conectadas a la carga.
4. El devanado de la armadura tiene resistencia finita, por pequeña que ésta sea. Por tanto, el voltaje en las terminales de la armadura está limitado a ser más bajo que la fem inducida.
5. Si el generador no está compensado por la reacción de la armadura, hay menos flujo global en la máquina sujeta a carga que sin carga. Luego, la fem inducida es más baja con carga que sin ella. Esto ocasiona una disminución aún mayor del voltaje en las terminales.
6. El par desarrollado por los conductores en la armadura, $T_d = K_a \Phi_P I_a$, es igual y opuesto al par aplicado por la máquina de impulsión. Es decir, el par desarrollado *se opone* a la rotación de la armadura.
7. La caída del voltaje entre las escobillas y los segmentos del conmutador se conoce como *caída por el contacto de las escobillas*. Si se necesita y no se especifica, puede suponerse de alrededor de 2 V.
8. Si no se conoce la información pertinente relacionada con el efecto adverso de la reacción de la armadura sobre el rendimiento del generador, se supone que tal reacción es despreciable o que el generador está adecuadamente compensado por esta razón.
9. Comúnmente se usa el término *carga* en las máquinas eléctricas con el significado de *corriente de carga*. Así, *no carga* o *sin carga* significa un circuito abierto, y *plena carga* implica la corriente de carga especificada (o corriente nominal) con el voltaje especificado (o voltaje nominal) en las terminales.

5.10. Regulación del voltaje

A medida que la corriente de carga se incrementa, el voltaje en las terminales disminuye debido al incremento en la caída del voltaje a través de la resistencia del deva-

nado de la armadura, así como al efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura. La regulación del voltaje es una medida de la caída del voltaje en las terminales a plena carga. Si V_{sc} es el voltaje en las terminales sin carga y V_{pc} es el voltaje en las terminales a plena carga, la *regulación del voltaje* se define como

$$RV\% = \frac{V_{sc} - V_{pc}}{V_{pc}} \times 100 \tag{5.22}$$

donde $RV\%$ es la regulación porcentual del voltaje. Para un generador ideal (voltaje constante), la regulación del voltaje debe ser cero. La regulación del voltaje se considera positiva cuando el voltaje en las terminales sin carga es mayor que a plena carga. Una regulación del voltaje negativa indica que el voltaje en las terminales a plena carga es mayor que sin carga.

5.11. Pérdidas en las máquinas de cc

Nuevamente, en el estudio de las pérdidas de potencia se utiliza el término *máquina* porque no es necesario distinguir entre las pérdidas en el generador de cc y el motor de cc. La ley de conservación de la energía establece que la potencia de entrada debe ser siempre igual a la potencia de salida más las pérdidas en la máquina. Hay tres grandes categorías de pérdidas: mecánicas, en el cobre y magnéticas.

Pérdidas mecánicas

Las pérdidas mecánicas son resultado de *a*) la fricción entre los cojinetes y el eje, *b*) la fricción entre las escobillas y el conmutador, y *c*) el arrastre sobre la armadura ocasionado por el aire que la rodea (pérdida por viento).

La pérdida por fricción en los cojinetes depende del diámetro del eje en el sitio donde se encuentran éstos, la velocidad de la periferia del eje y el coeficiente de fricción entre el eje y los cojinetes. Para reducir el coeficiente de fricción, generalmente los cojinetes están lubricados.

La pérdida por fricción entre las escobillas depende de la velocidad periférica del conmutador, la presión de las escobillas y el coeficiente de fricción entre éstas y el conmutador. El grafito en las escobillas ayuda a proporcionar lubricación para disminuir el coeficiente de fricción.

La pérdida por viento depende de la velocidad periférica de la armadura, el número de ranuras en su periferia y su longitud.

Las pérdidas mecánicas debidas a la fricción y al viento P_{fw} pueden determinarse si se hace girar la armadura de una máquina no excitada a su velocidad especificada, por acoplamiento con un motor calibrado. Puesto que no hay salida de potencia, la potencia suministrada a la armadura es la pérdida mecánica.

Pérdida magnética

Puesto que la fem inducida en los conductores de la armadura alterna con una frecuencia determinada por la velocidad de rotación y el número de polos, una pérdida magnética se presenta en la armadura P_m (histéresis y corriente parásita).

La pérdida por histéresis depende de la frecuencia de la fem inducida, el área del ciclo de histéresis, la densidad del flujo magnético y el volumen del material magnético. El área del ciclo de histéresis es más pequeña para los materiales magnéticos suaves que para los duros, la cual es una de las razones por las que se utilizan materiales magnéticos suaves en las máquinas eléctricas.

Aun cuando la armadura se construye utilizando láminas delgadas, las corrientes parásitas aparecen en cada una y producen pérdida por ellas, la cual depende del espesor de la laminación, la densidad del flujo magnético, la frecuencia de la fem inducida y el volumen del material magnético.

Es posible obtener una reducción considerable en la pérdida magnética si la máquina se opera en la región lineal con densidad de flujo baja, pero a expensas de su tamaño y costo inicial.

Pérdidas por rotación

En la explicación de una máquina de cc las pérdidas mecánica y magnética suelen agruparse. La suma de ambas pérdidas se llama *pérdida por rotación*, P_r. Es decir, $P_r = P_{fw} + P_m$.

La pérdida por rotación de una máquina de cc puede determinarse haciendo funcionar la máquina como un motor con excitación independiente (tema que se estudiará más adelante) sin carga. El voltaje en el devanado de la armadura debe ajustarse de modo que la fem inducida en éste iguale su valor especificado, E_a. Si V_t es el voltaje en las terminales y R_a es la resistencia en el devanado de la armadura, entonces el voltaje que debe aplicarse a las terminales de la armadura es

$$V_a = V_t + I_a R_a \tag{5.23a}$$

para el generador, y

$$V_a = V_t - I_a R_a \tag{5.23b}$$

para el motor.

Se aplica V_a a través de las terminales de la armadura y se ajusta la excitación del campo hasta que la máquina gire a su velocidad especificada. Luego se mide la corriente en la armadura. Como dicha corriente en condiciones sin carga es una fracción pequeña de su valor especificado y la resistencia del devanado de la armadura generalmente es muy pequeña, puede despreciarse la pérdida de potencia en el de-

vanado de la armadura. Como no hay salida de potencia, la potencia que se suministra al motor, $V_a I_a$, debe ser igual a la pérdida por rotación en la máquina. Al sustraer la pérdida mecánica se determina la pérdida magnética en la máquina.

Pérdidas en el cobre

Siempre que una corriente fluye en un conductor hay una pérdida en el cobre, P_{co}, asociada con ella. Las pérdidas en el cobre, también denominadas *pérdidas eléctricas* o I^2R, pueden desglosarse como pérdidas en los devanados siguientes:

1. De la armadura
2. Del campo shunt
3. Del campo en serie
4. Del campo interpolar
5. Del campo compensador

Pérdida por carga parásita

Una máquina siempre tiene algunas pérdidas que no pueden explicarse con facilidad; se les llama *pérdidas por carga parásita.* Se sospecha que las pérdidas por carga parásita en las máquinas de cc son resultado de *a*) el flujo distorsionado debido a la reacción de la armadura y *b*) las corrientes de cortocircuito en las bobinas al entrar en conmutación. Como regla, la pérdida por carga parásita se supone de 1% de la potencia de salida en máquinas grandes (por arriba de 100 caballos de fuerza) y puede despreciarse en las pequeñas.

Diagrama de flujo de potencia

En un generador de cc, la energía mecánica suministrada a la armadura mediante una máquina de impulsión se convierte en energía eléctrica. Inicialmente, parte de la energía mecánica se vuelve pérdida por rotación. La potencia mecánica disponible para la conversión en potencia eléctrica es la diferencia entre la potencia suministrada al eje y la pérdida por rotación. Denominaremos a la potencia disponible como *potencia desarrollada*. Para obtener la potencia de salida se restan de la potencia desarrollada todas las pérdidas en el cobre de la máquina. Si T_s es el par en el eje y ω_m es la velocidad angular de rotación, entonces la potencia de salida P_o, de un generador es

$$P_o = T_s\omega_m - P_r - P_{co} \tag{5.24}$$

En la figura 5.18 se muestra un diagrama común de flujo de potencia para un generador.

Eficiencia

La eficiencia de una máquina es la razón entre la potencia de salida y la potencia de entrada. En el caso de una máquina con excitación independiente, la pérdida de po-

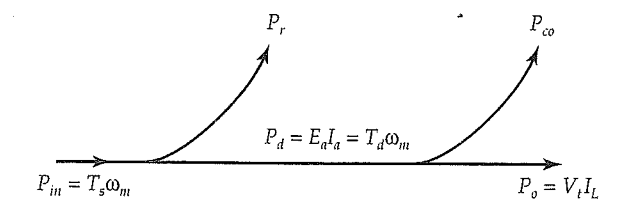


Figura 5.18. Diagrama del flujo de potencia de un generador de cc.

tencia en el devanado del campo también puede incluirse en la potencia de entrada para calcular la eficiencia de la máquina.

5.12. Generador de cc con excitación independiente

Como su nombre lo indica, un generador de cc con excitación independiente requiere una fuente de cc externa independiente para el devanado del campo, por lo que se usa principalmente en *a*) pruebas de laboratorio y comerciales y *b*) conjuntos con regulación especial. La fuente externa puede ser otro generador de cc, un rectificador controlado o no, o una batería.

En la figura 5.19 aparece la representación del circuito equivalente en condiciones de estado estable de un generador de cc con excitación independiente. La condición de estado estable supone que no hay ningún cambio apreciable en la corriente de la armadura o en su velocidad para una carga determinada. En otras palabras, esencialmente no hay cambio en la energía mecánica o en la magnética del sistema. Por tanto, no hay necesidad de incluir la inductancia de cada devanado ni la inercia del sistema como parte del circuito equivalente. Incluimos estos efectos al estudiar la dinámica de las máquinas eléctricas en el capítulo 11.

En el circuito equivalente, E_a es la fem inducida en el devanado de la armadura; R_a es la resistencia efectiva del devanado de la armadura, la cual también puede incluir la resistencia de cada escobilla; I_a es la corriente en la armadura; V_t es el voltaje de

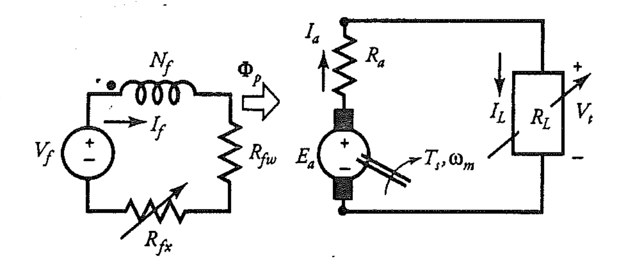


Figura 5.19. Circuito equivalente de un generador de cc con excitación independiente.

salida en las terminales; I_L es la corriente de carga; I_f es la corriente en el devanado del campo; R_{fw} es la resistencia en el devanado del campo; R_{fx} es una resistencia externa agregada en serie con el devanado del campo para controlar la corriente en el campo; N_f es el número de vueltas por polo para el devanado del campo, y V_f es el voltaje de una fuente externa.

Las ecuaciones que definen la operación en estado estable son

$$V_f = I_f(R_{fw} + R_{fx}) = I_f R_f \tag{5.25}$$

$$E_a = V_t + I_a R_a \tag{5.26}$$

e

$$I_L = I_a \tag{5.26a}$$

donde $R_f = R_{fw} + R_{fx}$ es la resistencia total en el circuito del devanado del campo shunt.

De acuerdo con la ecuación 5.26, el voltaje en las terminales es

$$V_t = E_a - I_a R_a \tag{5.27}$$

Cuando se mantiene constante la corriente del campo y la armadura gira a velocidad constante, la fem inducida en un generador ideal es independiente de la corriente en la armadura, como lo indica la línea punteada en la figura 5.20. Conforme la corriente de carga I_L aumenta, el voltaje en las terminales V_t disminuye, como lo señala la línea gruesa. Sin reacción de la armadura, la disminución en V_t debe ser lineal e igual a la caída de voltaje a través de R_a. Sin embargo, si el generador opera cerca de su saturación y no está compensado apropiadamente para la reacción de la armadura, esta reacción ocasiona una caída adicional de voltaje en las terminales.

La gráfica del voltaje en las terminales y la corriente de la carga se llama *característica externa (terminal)* de un generador de cc. La característica externa puede obtenerse en forma experimental variando la carga desde la condición de no carga hasta

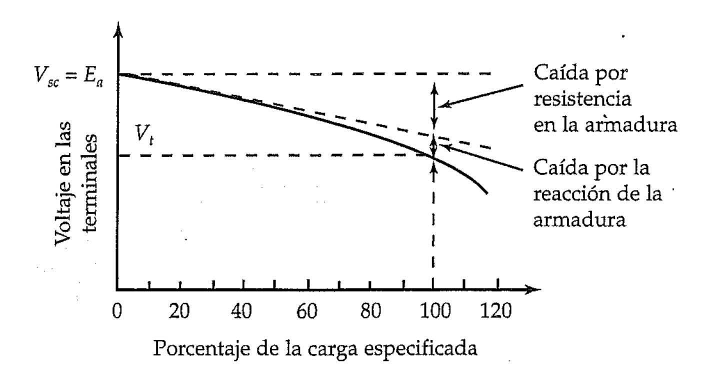


Figura 5.20. Característica externa de un generador de cc con excitación independiente.

150% de la carga especificada. El voltaje en las terminales sin carga, V_{sc}, es E_a. Si se traza una línea tangente a la curva en condiciones de no carga se obtiene la característica externa de la máquina sin reacción de la armadura. La diferencia entre el voltaje sin carga y la línea tangente constituye una caída I_aR_a. Como se conoce I_a, es posible determinar experimentalmente la resistencia efectiva del devanado de la armadura. El término *efectiva* significa que no sólo se trata de la resistencia del devanado de la armadura, sino también se incluye la resistencia de contacto de las escobillas.

Ejemplo 5.5

Un generador hexapolar con excitación independiente de 240 kW, 240 V y 600 rpm alimenta la carga especificada al voltaje especificado. El generador tiene $R_a = 0.01\ \Omega$, $R_{fw} = 30\ \Omega$, $V_f = 120$ V, $N_f = 500$ vueltas por polo y $P_r = 10$ kW. La fmm de desmagnetización debida a la reacción de la armadura es 25% de la corriente de la armadura. Su curva de magnetización se muestra en la figura 5.21. Determine *a*) la fem inducida a plena carga, *b*) la potencia desarrollada, *c*) el par desarrollado, *d*) el par aplicado, *e*) la eficiencia, *f*) la resistencia externa en el devanado del campo, y *g*) la regulación del voltaje.

• Solución

Como $P_o = 240$ kW y $V_t = 240$ V, la corriente a plena carga es

$$I_L = I_a = \frac{240\ 000}{240} = 1\ 000 \text{ A}$$

A

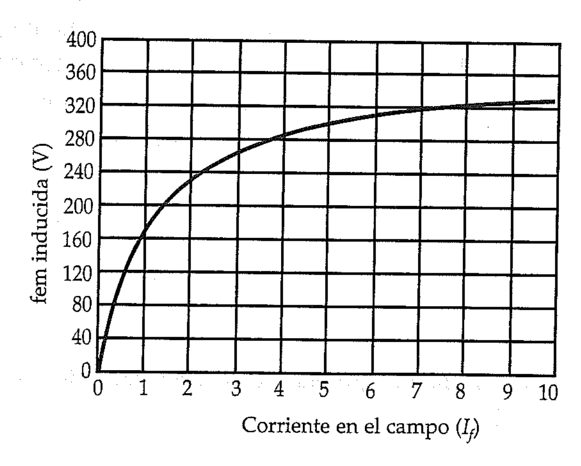


Figura 5.21. Curva de magnetización de una máquina de cc a 600 rpm ($N_f = 500$ vueltas por polo).

a) A plena carga, la fem inducida es

$$E_{afl} = V_t + I_a R_a = 240 + 1\ 000 \times 0.01 = 250 \text{ V}$$

b) Luego, la potencia desarrollada es

$$P_d = E_{afl} I_a = 250 \times 1\ 000 = 250\ 000 \text{ W} \quad \text{o} \quad 250 \text{ kW}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi \times 600}{60} = 20\pi \text{ rad/s}$$

c) El par desarrollado a plena carga es

$$T_d = \frac{P_d}{\omega_m} = \frac{250\ 000}{20\pi} = 3\ 978.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

d) La potencia mecánica suministrada a plena carga debe ser

$$P_{inm} = P_d + P_r = 250 + 10 = 260 \text{ kW}$$

Por tanto, el par aplicado es

$$T_s = \frac{260\ 000}{20\pi} = 4\ 138.03 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e) En la curva de magnetización se observa que la *corriente efectiva del campo* a plena carga es de 2.5 A. Ésta es la corriente del campo que debe circular en el devanado del campo cuando no hay efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura. La fmm correspondiente es 500 × 2.5 = 1 250 A·t/polo. La fmm de desmagnetización debida a la reacción de la armadura es 0.25 × 1 000 = 250 A·t/polo. Así, la fmm que debe suministrar el devanado del campo es 1 250 + 250 = 1 500 A·t/polo. Por tanto, la corriente real del campo a plena carga es

$$I_f = \frac{1\ 500}{500} = 3 \text{ A}$$

La pérdida de potencia en el devanado del campo es $V_f I_f = 120 \times 3 = 360$ W. La potencia total admitida es

$$P_{in} = P_{inm} + V_f I_f = 260 + 0.36 = 260.36 \text{ kW}$$

La eficiencia del generador es

$$\eta = \frac{240}{260.36} = 0.922 \text{ o } 92.2\%$$

f) La resistencia total en el circuito del devanado del campo es

$$R_f = \frac{120}{3} = 40\ \Omega$$

Luego,

$$R_{fx} = 40 - 30 = 10\ \Omega$$

g) Sin carga, la reacción de la armadura es igual a cero. Por ello, la fmm del campo es de 1 500 A·t/polo. De la curva de magnetización se obtiene que la fem inducida sin carga es de aproximadamente 266 V. Por tanto, la regulación del voltaje es

$$RV\% = \frac{266 - 240}{240} \times 100 = 10.83\%$$

■

Ejercicios

5.12. Un generador tipo PM de cc, 240 V y 40 A está especificado para una velocidad de 2 000 rpm. La resistencia del devanado de la armadura es de 0.4 Ω. La pérdida por rotación es de 10% de la potencia que desarrolla el generador a plena carga. Si el generador opera en la zona lineal, determine *a*) el voltaje sin carga, *b*) la regulación del voltaje, *c*) el par aplicado, y *d*) la eficiencia del generador.

5.13. El generador con excitación independiente del ejemplo 5.5 opera sin carga con la corriente del campo máxima. ¿Cuál es la fem inducida en la armadura? Si se le aplica carga de manera gradual hasta que suministra la carga especificada, ¿cuál es el voltaje en las terminales? ¿Cuál es la regulación del voltaje? También calcule la eficiencia y el par aplicado.

5.13. Generador shunt

Cuando el devanado del campo de un generador con excitación independiente se conecta en paralelo con la armadura, el generador de cc recibe el nombre de *generador shunt* o *en derivación*. En este caso, el voltaje en las terminales también es el voltaje del devanado del campo. Sin carga, la corriente en la armadura es igual a la corriente del campo. Con carga, la corriente en la armadura suministra la corriente de carga y la corriente del campo, como se muestra en la figura 5.22. Como el voltaje en las

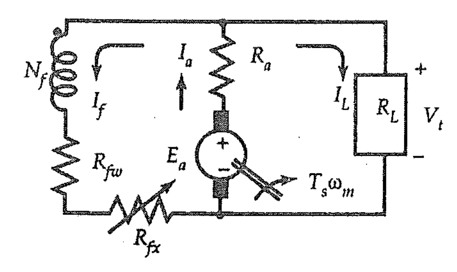


Figura 5.22. Circuito equivalente de un generador shunt o en derivación.

terminales puede ser muy alto, la resistencia del circuito del campo también debe ser alta con objeto de mantener su pérdida de potencia en el mínimo. Así, el devanado del campo shunt tiene un gran número de vueltas de un conductor relativamente delgado.

El generador shunt es capaz de *crecer* el voltaje presente en las terminales en tanto permanezca algún flujo residual en los polos del campo. El proceso de *crecimiento del voltaje* se resume en seguida.

Cuando el generador gira a su velocidad especificada, el flujo residual en los polos del campo, por pequeño que sea (pero debe existir), induce una fem E_r en el devanado de la armadura, como se ilustra en la figura 5.23. Puesto que el devanado del campo está conectado en paralelo con la armadura, la fem inducida envía una corriente pequeña a través de tal devanado. Si el devanado del campo está conectado apropiadamente, su fmm establece un flujo que apoya al flujo residual. El flujo total por polo se incrementa. El aumento en el flujo por polo incrementa la fem inducida, la cual a su vez aumenta la corriente del campo. Por tanto, la acción es acumulativa, pero ¿continúa para siempre? Por supuesto, la respuesta es no, como se explica a continuación.

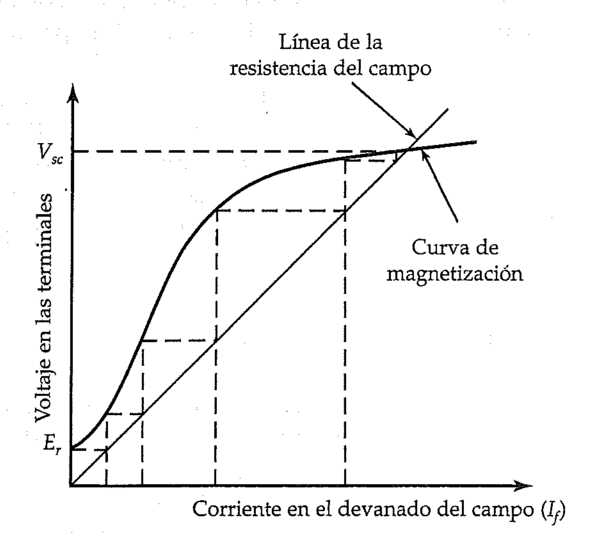


Figura 5.23. Crecimiento del voltaje en un generador shunt o en derivación.

La fem inducida sigue la curva de magnetización no lineal. La corriente en el devanado del campo depende de la resistencia total en el circuito del devanado del campo. La relación entre la corriente del campo y el voltaje del campo es lineal, y la pendiente de la curva es la resistencia en el circuito del devanado del campo. La línea recta también se conoce como *línea de resistencia del campo*. El generador shunt continúa haciendo crecer el voltaje hasta el punto de intersección de la línea de resistencia del campo y la curva de saturación magnética. Este voltaje se conoce como *voltaje sin carga*.

Es muy importante advertir que la saturación del material magnético es una gran ventaja en el caso de un generador con excitación independiente. De no ser así, el crecimiento del voltaje continuaría de manera indefinida. También demostraremos que la saturación es necesaria para que el generador alimente la carga.

Si el devanado del campo está conectado en forma tal que el flujo producido por su fmm se oponga al flujo residual, ocurrirá un *decrecimiento* del voltaje, problema que puede corregirse con la inversión en el sentido de giro o con la inversión de la conexión del devanado del campo a las terminales de la armadura, pero no con ambas medidas a la vez.

El valor del voltaje sin carga en las terminales de la armadura depende de la resistencia del circuito del campo. Una disminución en la resistencia en el circuito del campo ocasiona que el generador shunt desarrolle más rápido un voltaje más alto, como se aprecia en la figura 5.24. Por la misma razón, el crecimiento del voltaje disminuye y el nivel del voltaje baja cuando se incrementa la resistencia del circuito del campo. El valor de esta resistencia que hace de la resistencia del campo una línea tangente a la curva de magnetización se llama *resistencia crítica (del campo)*. El voltaje en el generador no crecerá si la resistencia del circuito del campo es mayor o igual a la resistencia crítica. La velocidad a la que la resistencia del circuito del campo se convierte en resistencia crítica se llama *velocidad crítica*.

En consecuencia, el crecimiento del voltaje tendrá lugar en un generador shunt si *a*) existe flujo residual en los polos del campo, *b*) la fmm del devanado del campo pro-

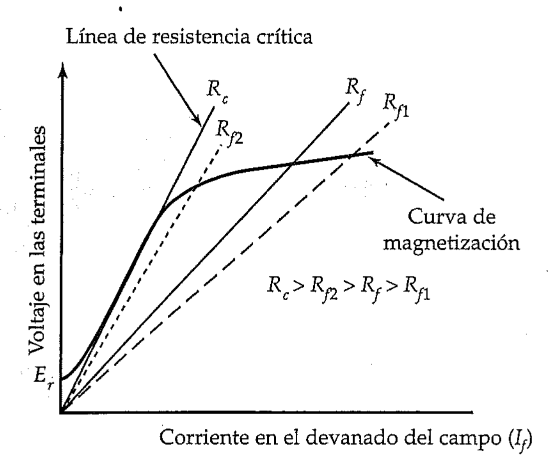


Figura 5.24. Crecimiento del voltaje para varios valores de la resistencia del circuito del campo.

duce el flujo que apoya al flujo residual, y *c*) la resistencia del circuito del campo es menor que la resistencia crítica.

Las ecuaciones que rigen la operación de un generador shunt en estado estable son las siguientes

$$I_a = I_L + I_f \tag{5.28}$$

$$V_t = I_f(R_{fw} + R_{fx}) = I_f R_f \tag{5.29}$$

y

$$V_t = I_L R_L = E_a - I_a R_a \tag{5.30}$$

Característica externa

Sin carga, la corriente en la armadura es igual a la corriente del campo, la que generalmente es una fracción de la corriente de carga. Por tanto, el voltaje en las terminales sin carga V_{sc} es casi igual a la fem inducida E_a, puesto que la caída $I_a R_a$ es despreciable. Conforme aumenta la corriente de carga, el voltaje en las terminales disminuye por lo siguiente:

1. El aumento en la caída $I_a R_a$.
2. El efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura.
3. La disminución en la corriente del campo debida a la caída en la fem inducida.

En la figura 5.25 se muestra el efecto de cada uno de estos factores.

Para operar satisfactoriamente, el generador shunt debe funcionar en la región saturada. De no ser así, el voltaje en las terminales sin carga podría caer hasta cero por la razón siguiente:

Supongamos que el generador opera en la región lineal y hay 10% de caída en el voltaje en las terminales en cuanto la carga toma algo de corriente. La caída de 10%

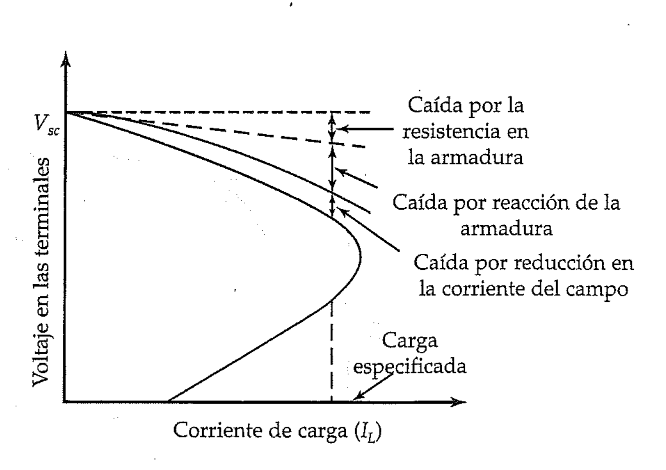


Figura 5.25. Característica externa de un generador shunt.

en el voltaje en las terminales origina 10% de caída en la corriente del campo, lo cual a su vez reduce el flujo en 10%. La reducción de 10% en el flujo disminuye la fem inducida también en 10% y ocasiona que el voltaje en las terminales caiga aún más, y así sucesivamente. En poco tiempo, el voltaje en las terminales cae a un nivel (de casi cero) que no permite alimentar alguna carga apreciable. La saturación del material magnético viene al rescate. Cuando el generador opera en la región saturada, 10% de caída en la corriente del campo puede ocasionar sólo un 2% o 3% de caída en el flujo y el sistema se estabiliza en un voltaje en las terminales algo más bajo que V_{sc}, pero en un nivel adecuado para operar satisfactoriamente.

Conforme se aplica carga al generador, la corriente de carga se incrementa hasta un punto denominado *punto de ruptura* con la disminución de la resistencia de la carga. Cualquier disminución adicional en la resistencia de carga ocasiona que la corriente de carga disminuya como resultado de una caída muy rápida en el voltaje en las terminales. Cuando la resistencia de carga disminuye hasta cero (un cortocircuito), la corriente del campo desciende hasta cero y la corriente a través del cortocircuito es la razón entre el voltaje residual y la resistencia del circuito de la armadura.

Ejemplo 5.6

En la figura 5.26 se muestra la curva de magnetización de un generador shunt a 1 200 rpm. Los demás parámetros son $R_{fw} = 30\ \Omega$, $R_a = 0.2\ \Omega$, $N_f = 200$ vueltas/polo, $P_r = 1\,200$ W y la fmm de desmagnetización por polo debida a la reacción de la armadura es igual a 50% de la corriente de carga. La resistencia externa del campo, R_{fx}, se ajusta para que dé un voltaje sin carga de 170 V. ¿Cuál es el valor de R_{fx}? Si el gene-

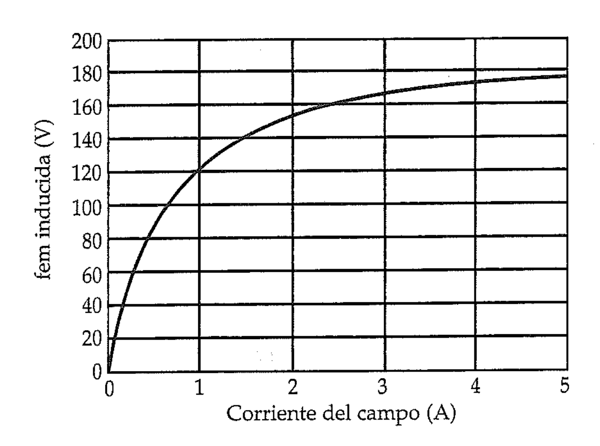


Figura 5.26. Curva de magnetización de una máquina de cc a 1 200 rpm (200 vueltas por polo).

rador alimenta una carga especificada igual a 100 A, determine *a*) el voltaje en las terminales, *b*) la regulación del voltaje, y *c*) la eficiencia de la máquina.

- Solución

A partir de la curva de desmagnetización se observa que la corriente del campo correspondiente al voltaje sin carga de 170 V es de 3.5 A. La resistencia total del circuito del campo es

$$R_f = \frac{170}{3.5} = 48.57\ \Omega$$

Por tanto, la resistencia externa en el circuito del devanado del campo es

$$R_{fx} = R_f - R_{fw} = 48.57 - 30 = 18.57\ \Omega$$

El comportamiento no lineal de la fem inducida indica la aplicación de iteraciones para determinar el voltaje en las terminales con la corriente de carga especificada $I_L = 100$ A. La fmm de desmagnetización es $0.5 \times 100 = 50$ A•t/polo.

Primera iteración:
Si se supone que $E_a = 170$ V y que la corriente en el campo es de 3.5 A, el voltaje en las terminales con la carga especificada es

$$V_{t1} = 170 - 103.5 \times 0.2 = 149.3 \text{ A}$$

Segunda iteración:
Las corrientes real y efectiva del campo son

$$I_{f2} = \frac{149.3}{48.57} = 3.07 \text{ A}$$

$$I_{fe2} = \frac{(200 \times 3.07 - 50)}{200} = 2.82 \text{ A}$$

De la gráfica, la fem inducida es $E_{a2} \approx 165$ V. Luego,

$$V_{t2} = 165 - 103.07 \times 0.2 = 144.4 \text{ V}$$

Tercera iteración:

$$I_{f3} = \frac{144.4}{48.57} = 2.97 \text{ A}$$

$$I_{fe3} = \frac{(200 \times 2.97 - 50)}{200} = 2.72$$

De la gráfica, $E_{a3} \approx 163$ V. Por tanto,

$$V_{t3} = 163 - 102.97 \times 0.2 = 142.4 \text{ V}$$

La diferencia entre V_{t2} y V_{t3} es tan pequeña (menos de 2%) que no se precisan más iteraciones.

a) Entonces, $V_t = 142.4$ V e $I_f = 142.4/48.57 = 2.93$ A cuando $I_L = 100$ A. Luego, $I_{fe} = (200 \times 2.93 - 50)/200 = 2.68$ A. De la curva de desmagnetización, $E_a \approx 163$ V.

b) La regulación del voltaje es

$$RV\% = \frac{170 - 142.4}{142.4} \times 100 = 19.38\%$$

c) La potencia de salida: $P_o = 142.4 \times 100 = 14\ 240$ W
La pérdida de potencia eléctrica es

$$P_{co} = (102.93)^2 \times 0.2 + 2.93^2 \times 48.57 = 2\ 535.89 \text{ W}$$

La potencia desarrollada: $P_d = 14\ 240 + 2535.89 = 16\ 775.89$ W

La potencia alimentada: $P_{in} = 16\ 775.89 + 1\ 200 = 17\ 975.89$ W

Por tanto, la eficiencia es $\eta = \dfrac{14\ 240}{17\ 975.89} = 0.7922$ o 79.22%

Observe que también era posible calcular la potencia desarrollada como sigue:

$$P_d = E_a I_a = 163 \times 102.93 = 16\ 777.59 \text{ W}$$

■

Ejercicios

5.14. La resistencia del circuito del campo del generador shunt del ejemplo 5.6 se ajusta a 64 Ω. ¿Cuál es el voltaje sin carga a su velocidad especificada? Si el generador opera a 50% de su carga especificada, determine *a*) el voltaje en las terminales, *b*) la eficiencia, y *c*) el par aplicado.

5.15. Un generador shunt de 50 kW y 120 V tiene los parámetros siguientes: $R_a = 0.09$ Ω, $R_{fw} = 30$ Ω, $R_{fx} = 15$ Ω, $N_m = 900$ rpm y $P_r = 5$ kW. El generador alimenta la carga especificada al voltaje especificado en las terminales. Determine *a*) la fem generada, *b*) el par aplicado, y *c*) la eficiencia. No tenga en cuenta la reacción de la armadura.

5.14. Generador serie

Como su nombre lo indica, el devanado del campo de un generador serie está conectado en serie con la armadura y el circuito externo. Debido a que el devanado del campo en serie tiene que conducir la corriente de carga especificada, generalmente tiene pocas vueltas de un conductor grueso.

El circuito equivalente de un generador serie se ilustra en la figura 5.27. Una resistencia variable R_d, conocida como *desviador para campo en serie,* puede conectarse en paralelo con el devanado del campo serie para controlar la corriente que lo atraviesa y, por tanto, también al flujo que produce.

Cuando el generador opera sin carga, el flujo producido por el devanado del campo en serie es igual a cero. Por tanto, el voltaje en las terminales del generador es igual a la fem inducida debido al flujo residual, E_r. En cuanto el generador entrega una corriente de carga, la fmm del devanado del campo en serie produce un flujo que apoya al flujo residual. Por consiguiente, la fem inducida, E_a, en el devanado de la armadura es mayor cuando el generador entrega potencia que cuando está sin carga. No obstante, el voltaje en las terminales, V_t, es más bajo que la fem inducida debido a *a*) la caída de voltaje a través de la resistencia de la armadura, R_a, la resistencia del devanado del campo en serie R_s, y *b*) la acción de desmagnetización por la reacción de la armadura. Como las caídas de voltaje a través de las resistencias y la reacción de la armadura son funciones de la corriente de carga, la fem inducida y también el voltaje en las terminales dependen de la corriente de carga.

La curva de magnetización para el generador serie se obtiene al excitar en forma independiente el devanado del campo en serie. El voltaje en las terminales correspondiente a cada punto de la curva de magnetización es menor en una cantidad igual a las caídas de voltaje a través de R_a y R_s cuando la reacción de la armadura es igual a cero. El voltaje en las terminales cae aún más cuando la reacción de la armadura también está presente, como se ilustra en la figura 5.28. Una vez que la corriente de carga impele al generador hacia la región saturada, cualquier incremento adicional en su valor vuelve tan grande la reacción de la armadura que ocasiona la caída brusca del

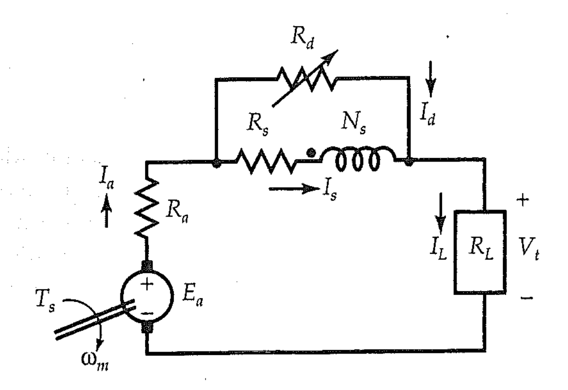


Figura 5.27. Circuito equivalente de un generador serie.

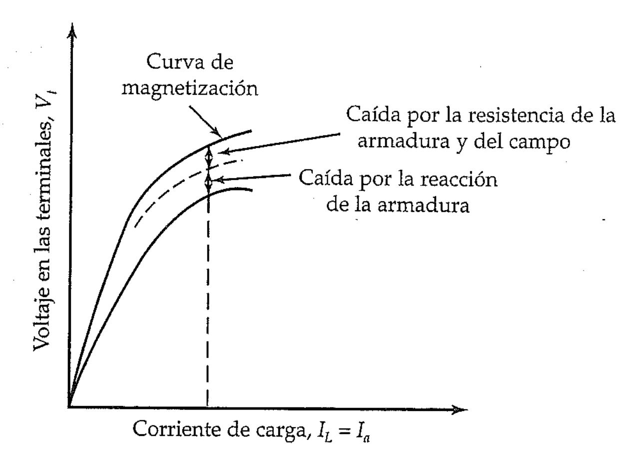


Figura 5.28. Circuito equivalente de un generador serie.

voltaje en las terminales. En realidad, si se llega al extremo, el voltaje en las terminales puede caer hasta cero.

La característica creciente de un generador serie lo hace adecuado cuando se precisa incrementar el voltaje. Otra diferencia clara entre un generador shunt y uno serie es que el primero tiende a mantener un *voltaje constante en las terminales,* mientras que el generador serie tiende a suministrar una *corriente de carga constante.* En Europa, el sistema Thury de transmisión de potencia en alto voltaje y corriente continua requiere varios generadores serie conectados en serie y transmitiendo con corriente constante.

Las ecuaciones básicas que rigen su operación en estado estable son

$$V_t = E_a - I_a R_a - I_s R_s \tag{5.31}$$

$$I_s R_s = I_d R_d \tag{5.32}$$

$$I_a = I_L = I_s + I_d \tag{5.33}$$

donde I_s es la corriente en el devanado del campo en serie, R_s es la resistencia del devanado del campo en serie e I_d es la corriente en la resistencia del desviador para el campo en serie, R_d.

Ejemplo 5.7

La fem inducida en la región lineal de un generador serie se denota con $E_a = 0.4I_s$. El generador tiene $R_s = 0.03\ \Omega$ y $R_a = 0.02\ \Omega$. Se usa como un reforzador entre la barra conductora a 240 V en una estación y un alimentador con resistencia igual a 0.25 Ω. Calcule el voltaje entre el extremo alejado del alimentador y la barra conductora con una corriente de 300 A.

• Solución

En ausencia de R_d, $I_a = I_s = 300$ A. La fem inducida es

$$E_a = 0.4 \times 300 = 120 \text{ V}$$

La caída de voltaje a través de R_a, R_s, y el alimentador es

$$V_d = 300 \times (0.02 + 0.03 + 0.25) = 90 \text{ V}$$

Por tanto, el voltaje entre el extremo alejado del alimentador y la barra conductora es

$$V_t = 240 + 120 - 90 = 270 \text{ V}$$

El incremento neto de 30 V puede exceder el límite deseado. Puede ser necesario instalar una resistencia para desvío de la corriente del campo a fin de regular el voltaje terminal en el extremo alejado del alimentador.

■

Ejercicios

5.16. Para el ejemplo 5.7, determine la resistencia del desviador para campo que limite el aumento del voltaje a 5 V.

5.17. La curva de magnetización de la figura 5.26 se obtuvo de un generador shunt de cc con 200 vueltas por polo en su devanado del campo shunt. Se agrega un devanado del campo en serie con cinco vueltas por polo y se opera como generador serie. La resistencia del campo serie es 0.05 Ω, y la resistencia de la armadura es 0.2 Ω. La pérdida de potencia por rotación es de 1 200 W. Cuando el generador opera a su velocidad especificada de 1 200 rpm, suministra una corriente de 140 A a un banco de lámparas conectadas en paralelo. Si en estas condiciones la reacción de la armadura equivale a una reducción de 6% en el flujo, determine *a*) el voltaje en las terminales, *b*) la potencia de salida, *c*) el par aplicado, y *d*) la eficiencia.

5.15. Generadores compound

La característica de descenso de un generador shunt y la de ascenso de un generador serie brinda la motivación suficiente para teorizar acerca de la posibilidad de una característica externa mejor con la fusión de los dos tipos de generadores en uno solo. En realidad, y con ciertas restricciones, poner los dos generadores juntos es como transformar dos generadores en uno solo con buen comportamiento. Esto se logra devanando ambos tipos de campos, serie y shunt, en cada polo del generador. Cuando se agrega la fmm del campo en serie a la fmm del campo shunt, se habla de un *generador compound cumulativo* (fig 5.29*a*). De otro modo, se denomina *generador compound diferencial* (fig. 5.29*b*).

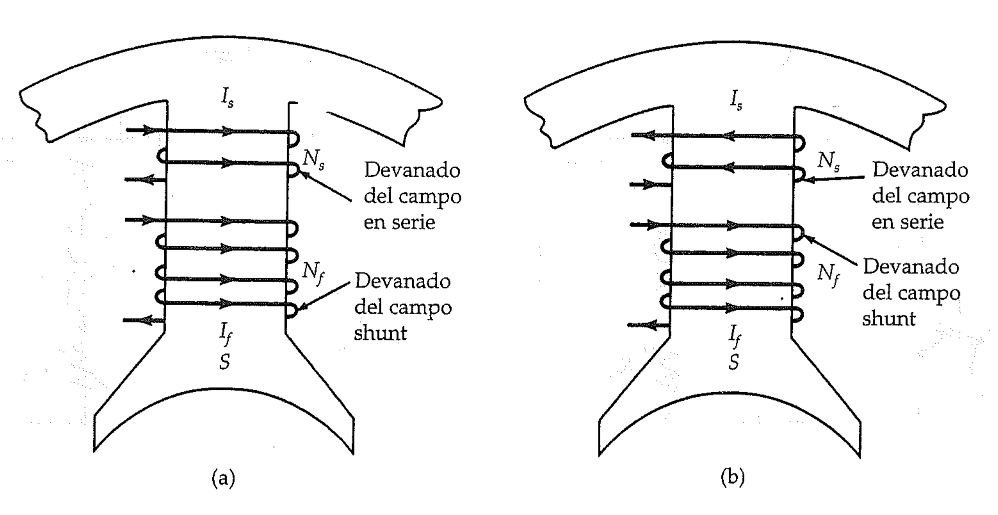


Figura 5.29. Distribuciones de la corriente en los devanados de los campos en serie y shunt de generadores **(a)** compound cumulativo y **(b)** compound diferencial.

Cuando el devanado del campo shunt se conecta directamente a las terminales de la armadura, se llama *generador shunt en derivación corta*. En un generador de este tipo (fig. 5.30), el devanado del campo en serie lleva la corriente de carga en ausencia de una resistencia desviadora para el campo. Se dice que un generador es *shunt en derivación larga* si el devanado de campo shunt se conecta en paralelo con la carga,

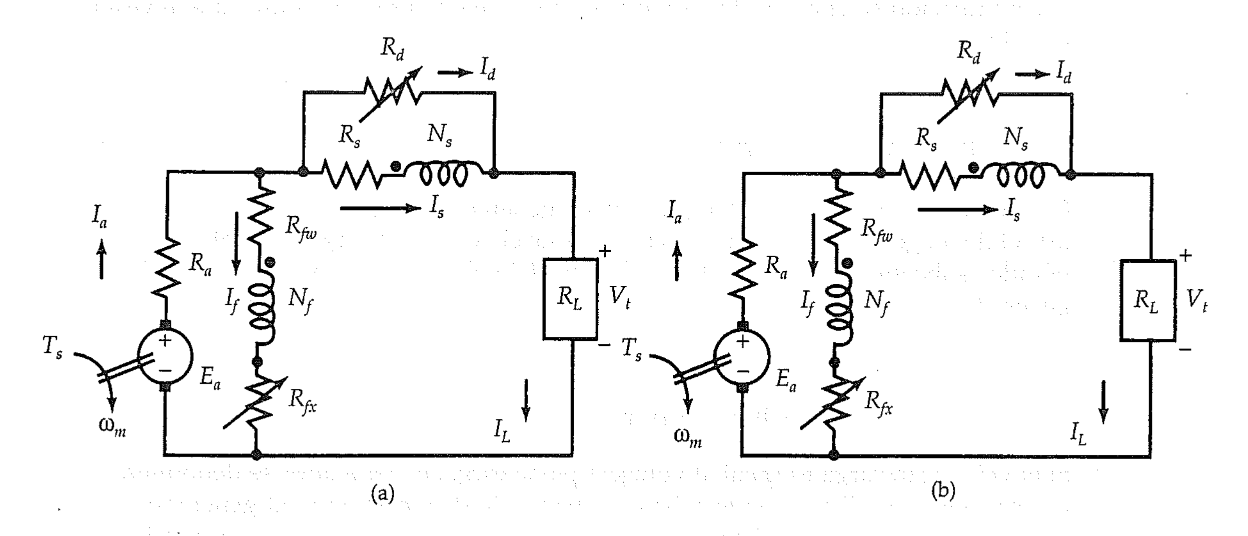


Figura 5.30. Circuitos equivalentes de generadores compound en derivación corta **(a)** cumulativo y **(b)** diferencial.

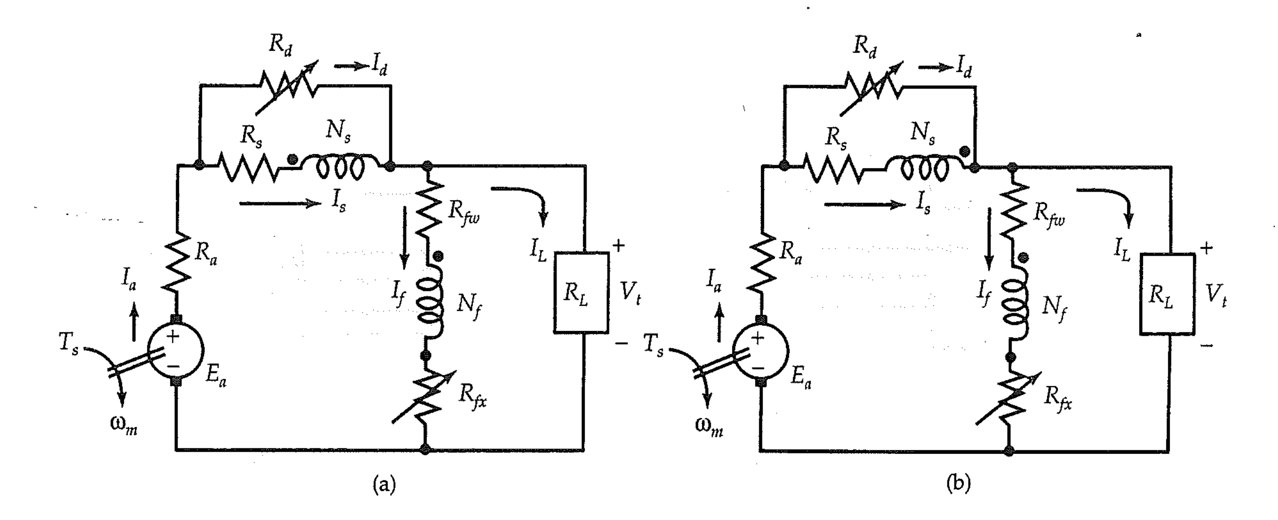


Figura 5.31. Circuitos equivalentes de generadores compound en derivación larga **(a)** cumulativo y **(b)** diferencial.

como lo indica la figura 5.31. Nos apresuramos a agregar que el campo shunt crea la mayor parte del flujo. El campo en serie proporciona ante todo control sobre el flujo total. Por tanto, pueden obtenerse distintos niveles de funcionamiento compound, limitando la corriente a través del campo en serie, como se explicó en la sección 5.14. A continuación se analizan tres grados de funcionamiento compound que revisten gran interés.

Generador subcompound

Cuando el voltaje con carga completa en un generador compound es un tanto mayor que el de un generador shunt, pero menor que el voltaje sin carga, se habla de un generador subcompound. En él, la regulación del voltaje es un poco mejor que la del generador shunt.

Generador compound llano o normal

Si el voltaje sin carga es igual al voltaje a plena carga, el generador se denomina *generador compound llano* o *normal*. Se usa cuando la distancia entre el generador y la carga es corta. En otras palabras, no ocurre ninguna caída de voltaje significativa en la línea de transmisión (llamada *alimentador*) que conecta el generador con la carga.

Generador ultracompound

Si el voltaje a plena carga es mayor que el voltaje sin carga, el generador es *ultracompound*, el cual es el que se elige cuando el generador se conecta a la carga mediante una línea de transmisión larga. La línea de transmisión larga supone una caída significativa del voltaje y pérdida de potencia en la línea de transmisión.

La práctica habitual consiste en diseñar un generador ultracompound. Los ajustes pueden hacerse canalizando la corriente fuera del devanado del campo en serie utilizando la resistencia de desvío para el campo.

Las características externas de los generadores compound se aprecian en la figura 5.32. Con fines meramente comparativos, también se incluyen las características de otros generadores.

En seguida se presentan las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento en estado estable de los generadores shunt en derivación corta y shunt en derivación larga.

Shunt en derivación corta

$$I_a = I_L + I_f \tag{5.34}$$

$$I_s = \frac{R_d}{R_d + R_s} I_L \tag{5.35}$$

$$V_t = E_a - I_a R_a - I_s R_s \tag{5.36}$$

$$V_f = E_a - I_a R_a \tag{5.37}$$

$$\text{fmm} = I_f N_f \pm I_s N_s - \text{fmm}_d \tag{5.38}$$

donde el signo más o el menos indican si el generador compound es cumulativo o diferencial, y fmm_d es la fmm desmagnetizadora debida a la reacción de la armadura.

Shunt en derivación larga

$$I_a = I_L + I_f \tag{5.39}$$

$$I_s = \frac{R_d}{R_d + R_s} I_a \tag{5.40}$$

$$V_f = V_t = E_a - I_a R_a - I_s R_s \tag{5.41}$$

$$\text{fmm} = I_f N_f \pm I_s N_s - \text{fmm}_d \tag{5.42}$$

Ejemplo 5.8

Un generador compound cumulativo de 240 V, en derivación corta, está especificado a 100 A. La corriente en el campo shunt es de 3 A. Tiene una resistencia en la armadura de 50 mΩ, una resistencia en el campo serie de 10 mΩ, una resistencia para

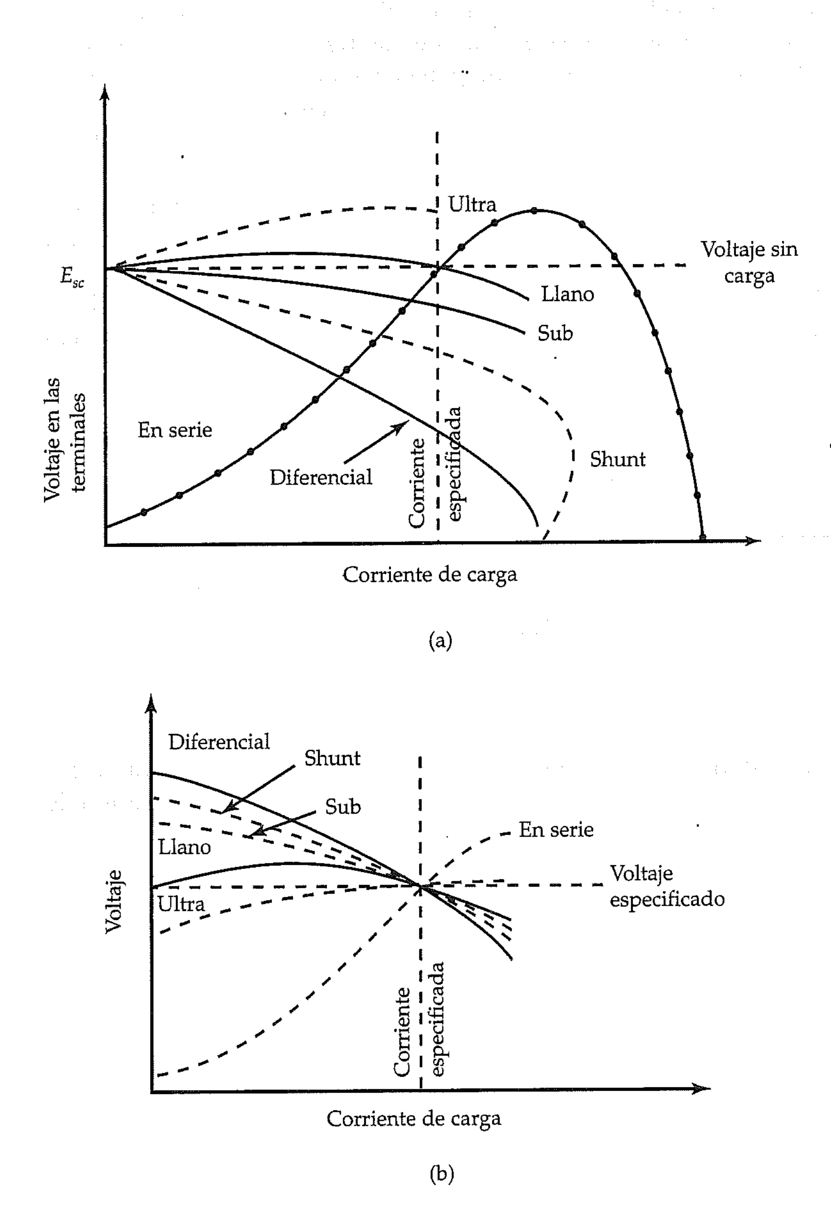


Figura 5.32. (a) Características externas de generadores de cc. **(b)** Voltaje en las terminales ajustado para el valor especificado.

desvío de campo de 40 mΩ y una pérdida por rotación de 2 kW. El generador está conectado a la carga por medio de un alimentador, R_{fe}, de 30 mΩ de resistencia. Determine la eficiencia del generador cuando opera a plena carga al voltaje especificado. Trace el diagrama de flujo de potencia para mostrar la distribución de potencia.

● Solución

$$P_o = 240 \times 100 = 24\,000 \text{ W}$$

Puesto que $I_f = 3$ A, $I_a = 100 + 3 = 103$ A

$$I_s = \frac{0.04}{0.04 + 0.01} \times 100 = 80 \text{ A}$$
$$I_d = 100 - 80 = 20 \text{ A}$$
$$E_a = V_t + I_L R_{fe} + I_s R_s + I_a R_a$$
$$= 240 + 100 \times 0.03 + 80 \times 0.01 + 103 \times 0.05 = 248.95 \text{ V}$$
$$V_f = E_a - I_a R_a$$
$$= 248.95 - 103 \times 0.05 = 243.8 \text{ V}$$

Por tanto, $R_f = \dfrac{243.8}{3} = 81.267\ \Omega$

Pérdidas en el cobre:

Armadura: $I_a^2 R_a = 103^2 \times 0.05 = 530.45$ W

Campo en serie: $I_s^2 R_s = 80^2 \times 0.01 = 64$ W

Campo shunt: $I_f^2 R_f = 3^2 \times 81.267 = 731.4$ W

Resistencia del desviador: $I_d^2 R_d = 20^2 \times 0.04 = 16$ W

Resistencia del alimentador: $I_L^2 R_{fe} = 100^2 \times 0.03 = 300$ W

Pérdida total en el cobre: $P_{co} = 530.45 + 64 + 731.4 + 16 + 300 = 1\,641.85$ W

Luego, la potencia desarrollada es

$$P_d = P_o + P_{co} = 24\,000 + 1\,641.85 = 25\,641.85 \text{ W}$$

Sin embargo, la potencia desarrollada también puede calcularse como

$$P_d = E_a I_a = 248.95 \times 103 = 25\,641.85 \text{ W}$$

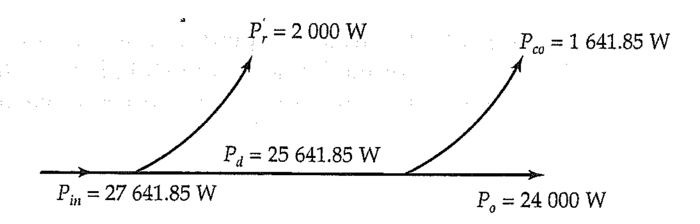


Figura 5.33. Diagrama de flujo de potencia de un generador compound en derivación corta, del ejemplo 5.8.

La potencia de entrada es

$$P_{in} = P_d + P_r = 25\,641.85 + 2\,000 = 27\,641.85 \text{ W}$$

Por tanto, la eficiencia es

$$\eta = \frac{P_o}{P_{in}} = \frac{24\ 000}{27\,641.85} = 0.8682 \qquad \text{y} \qquad 86.82\%$$

En la figura 5.33 se muestra el diagrama de flujo de potencia.

■

Ejercicios

5.18. Un generador compound en derivación corta tiene un voltaje en las terminales de 240 V cuando entrega 125 A. La corriente en el campo shunt es de 5 A, la resistencia de la armadura es de 25 mΩ y la resistencia del campo en serie es de 15 mΩ. A la velocidad de operación de 600 rpm, la pérdida por rotación es de 3 kW. Determine su eficiencia y el par suministrado por la máquina de impulsión. Trace su diagrama de flujo de potencia.

5.19. Un generador compound en derivación larga tiene un voltaje en las terminales de 240 V, con la corriente especificada de 200 A. Sus resistencias son las siguientes: del campo shunt: 60 Ω, del campo en serie, 20 mΩ, de la armadura, 80 mΩ y del campo interpolar: 25 mΩ. Las pérdidas magnética y mecánica son de 1 500 W y 250 W, respectivamente. Trace su diagrama de flujo de potencia y determine su eficiencia.

5.20. Un generador compound en derivación larga entrega 75 A a su voltaje especificado en las terminales de 230 V. Los parámetros pertinentes que restan son: $R_a = 40$ mΩ, $R_s = 20$ mΩ, $R_d = 80$ mΩ, y $R_f = 115$ Ω. Si hay una caída de 1 V a través de cada escobilla, determine la fem inducida y la eficiencia. Trace su diagrama de flujo de potencia.

5.16. Criterio de máxima eficiencia

La curva de eficiencia en comparación con la carga de una máquina determinada se obtiene por medio de pruebas con carga real o bien, calculando su rendimiento con distintas cargas. Si partimos de esa curva, resulta evidente que la eficiencia se incrementa con la carga hasta alcanzar un punto máximo. Cualquier incremento posterior en la carga ocasiona una disminución en la eficiencia. Por tanto, es imperativo saber con qué carga resulta máxima la eficiencia de la máquina. La operación de la máquina a su eficiencia máxima da como resultado *a*) una disminución en las pérdidas en la máquina, lo cual a su vez abate la temperatura de operación de ésta, y *b*) una reducción en el costo de operación de la máquina.

Antes de obtener una expresión para determinar la carga a la que el generador proporciona eficiencia máxima, demos otra mirada a las pérdidas. Las pérdidas en un generador pueden agruparse en dos categorías: fijas y variables. Las pérdidas fijas no varían con la carga cuando el generador trabaja a velocidad constante. La pérdida por rotación pertenece a esta categoría. La corriente en el campo shunt, I_f, se toma como constante, aunque esto no es rigurosamente cierto para los generadores autoexcitados. Por tanto, la pérdida de potencia debida a I_f puede considerarse también como parte de la pérdida fija. Por otro lado, la pérdida variable es la que varía con la corriente de carga.

Para un generador de cc tipo PM, la potencia de salida es

$$P_o = V_t I_L$$

y la potencia de entrada es

$$P_{in} = V_t I_L + I_L^2 R_a + P_r$$

Luego, la eficiencia es

$$\eta = \frac{V_t I_L}{V_t I_L + I_L^2 R_a + P_r}$$

Para que la eficiencia sea máxima, la tasa de cambio de η con respecto a I_L debe ser igual a cero cuando $I_L \rightarrow I_{Lm}$, donde I_{Lm} es la corriente de carga a eficiencia máxima. Es decir,

$$\frac{[V_t I_{Lm} + I_{Lm}^2 R_a + P_r]V_t - V_t I_{Lm}[V_t + 2I_{Lm} R_a]}{[V_t I_{Lm} + I_{Lm}^2 R_a + P_r]^2} = 0$$

De donde se obtiene

$$I_{Lm}^2 R_a = P_r \tag{5.43}$$

Luego, la corriente de carga a eficiencia máxima para un generador de cc tipo PM es

$$I_{Lm} = \sqrt{\frac{P_r}{R_a}} \tag{5.44}$$

Las condiciones para obtener la eficiencia máxima para otros generadores se describen a continuación:

Con excitación independiente:

$$I_{Lm}^2 R_a = P_r + I_f^2 R_f \tag{5.45}$$

Shunt:

$$I_{Lm}^2 R_a = P_r + I_f^2 (R_a + R_f) \tag{5.46}$$

Serie: .

$$I_{Lm}^2 R_a (R_a + R_s) = . \tag{5.47}$$

En derivación corta:

$$I_{Lm}^2 (R_a + R_s) = P_r + I_f^2 (R_a + R_f) \tag{5.48}$$

En derivación larga:

$$I_{Lm}^2 (R_a + R_s) = P_r + I_f^2 (R_a + R_s + R_f) \tag{5.49}$$

Ejemplo 5.9

Un generador compound en derivación larga de 50 kW y 120 V alimenta una carga a eficiencia máxima y voltaje especificado. La resistencia de la armadura es de 50 mΩ, la resistencia del campo en serie es de 20 mΩ, la resistencia del campo shunt es de 40 Ω y la pérdida por rotación es de 2 kW. ¿Cuál es la máxima eficiencia del generador?

- **Solución**

La corriente en el campo shunt es

$$I_f = \frac{120}{40} = 3 \text{ A}$$

De la ecuación 5.49 se tiene que

$$I_{Lm}^2 (0.05 + 0.02) = 3^2 (0.05 + 0.02 + 40) + 2\,000$$

o bien

$$I_{Lm} = 183.64 \text{ A}$$

Luego, la potencia de salida a eficiencia máxima es

$$P_o = 120 \times 183.64 = 22\,036.08 \text{ W}$$

La pérdida total en el cobre es

$$P_{co} = I_a^2(R_a + R_s) + I_f^2 R_f = 186.64^2 \times 0.07 + 3^2 \times 40 = 2\,798.41 \text{ W}$$

La potencia desarrollada a eficiencia máxima es

$$P_d = P_o + P_{co} = 22\,036.8 + 2\,798.41 = 24\,835.21 \text{ W}$$

La potencia de entrada: $P_{in} = 24\,835.21 + 2\,000 = 26\,835.21$ W
Por tanto, la eficiencia máxima es

$$\eta = \frac{22\,036.8}{26\,835.21} = 0.8211 \quad \text{y} \quad 82.11\%$$

■

Ejercicios

5.21. Demuestre que la corriente de carga a eficiencia máxima de un generador con excitación independiente está dada por la ecuación 5.45.
5.22. Compruebe si se cumple la ecuación 5.46 para la corriente de carga a eficiencia máxima de un generador shunt.
5.23. Demuestre que la ecuación 5.47 da la corriente de carga a eficiencia máxima de un generador serie.
5.24. Obtenga las expresiones para la corriente de la carga a eficiencia máxima de los generadores en derivación corta y en derivación larga.

Resumen

Dedicamos este capítulo a estudiar distintos tipos de generadores de cc. La mayor parte de los principios que se enunciaron se aplican por igual a las máquinas de cc. Los componentes principales de una máquina de cc son el estator, la armadura y el conmutador.

La fem inducida en el devanado de la armadura varía senoidalmente con una frecuencia de

$$f = \frac{P}{120} N_m$$

Sin embargo, el conmutador la rectifica y se obtiene un voltaje de salida casi constante. El voltaje generado con cc es

$$E_a = K_a \Phi_P \omega_m$$

y el par desarrollado por el generador es

$$T_d = K_a \Phi_P I_a$$

La máquina de impulsión debe aplicar el par en dirección opuesta al par desarrollado. La energía mecánica aplicada se convierte en energía eléctrica.

El devanado de la armadura puede ser imbricado u ondulado utilizando el devanado en dos capas. En el devanado imbricado, los dos extremos de la bobina se conectan a los segmentos adyacentes del conmutador. En el caso del devanado ondulado, los dos extremos están separados casi 360° eléctricos. El devanado imbricado ofrece tantas trayectorias paralelas como polos haya en la máquina. Sólo hay dos trayectorias paralelas en una máquina con devanado ondulado.

A fin de predecir el rendimiento de una máquina se necesita información acerca de su saturación magnética. Generalmente, tal información se presenta en la forma de curva de magnetización. Para que un generador con excitación independiente funcione de manera satisfactoria, el punto de operación debe estar en la región de saturación.

La corriente en el devanado de la armadura produce su propio flujo, el cual ejerce en la máquina un efecto de desmagnetización, llamado *reacción de la armadura*. Para reducir al mínimo la reacción de la armadura se emplean técnicas como los devanados interpolares, los devanados de conmutación, o ambos. Cuando la máquina opera con carga constante puede producirse la reacción de la armadura haciendo avanzar las escobillas desde su eje neutro geométrico hasta el nuevo eje neutro.

Hay dos tipos básicos de generadores: con excitación independiente y autoexcitados. Los generadores autoexcitados se clasifican en los tipos shunt, serie y compound. Salvo los generadores ultracompound, el voltaje en las terminales de todos los demás está en función de la corriente de carga. La regulación del voltaje es tan sólo una medida del cambio en el voltaje en las terminales a plena carga.

Las pérdidas en una máquina de cc reducen su eficiencia. Se clasifican de la manera siguiente: por rotación, en el cobre y por carga parásita. La pérdida por rotación incluye la pérdida mecánica debida a la fricción y el viento, y la pérdida magnética se debe a las corrientes parásitas y la histéresis. La pérdida en el cobre agrupa todas las pérdidas eléctricas en la máquina. Cuando una pérdida no puede identificarse de forma adecuada, se considera parte de la pérdida por carga parásita.

Preguntas de repaso

5.1. ¿Cuál es la diferencia entre un generador y un motor?

5.2. Explique la construcción de una máquina de cc.

5.3. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de una máquina de cc tipo PM en comparación con una máquina devanada de cc?

5.4. ¿Qué es un devanado del campo? Mencione todos los tipos de devanados del campo.

5.5. ¿Por qué un devanado del campo shunt tiene gran número de vueltas en comparación con un devanado del campo serie?

5.6. ¿Por qué se mantiene pequeña la resistencia de la armadura?

5.7. Explique la diferencia entre el devanado imbricado y el ondulado.

5.8. ¿Cuál es la diferencia entre el devanado ondulado progresivo y el regresivo?

5.9. La armadura de una máquina tetrapolar de cc tiene 30 ranuras. ¿Es apropiado este motor para el devanado ondulado? ¿Con 29 ranuras? ¿Con 31?

5.10. La armadura de una máquina hexapolar de cc tiene 30 ranuras. ¿Puede emplearse el devanado ondulado? ¿Con 29 ranuras? ¿Con 31?

5.11. ¿Qué sucede al campo magnético existente cuando un conductor que porta corriente se coloca en él? Trace esquemas para explicar la respuesta.

5.12. ¿Cuál debe ser el área mínima de la sección transversal de un campo polar a fin de tener la misma densidad de flujo que en la sección del yugo?

5.13. El paso de bobina de una máquina es 5. Si un extremo de ella se coloca en la ranura 3, determine la ranura en la que debe situarse el otro.

5.14. La fem inducida en un generador tetrapolar de cc con devanado imbricado es de 240 V. La corriente máxima que puede suministrar cada conductor de la armadura es de 25 A. ¿Cuál es la especificación de potencia del generador?

5.15. Si las bobinas de la armadura del generador de la pregunta 5.14 se reconectan para formar un devanado ondulado, ¿cuáles son el voltaje, la corriente y la especificación de potencia del generador?

5.16. En una máquina de cc la densidad del flujo en el entrehierro es de 6 kG (10 kG = 1 T) y el área por cara polar es de 3×5 cm. Determine el flujo por polo en la máquina.

5.17. Un generador decapolar de cc con devanado imbricado y 500 V está especificado para 100 hp. Determine el voltaje, la corriente y la especificación de potencia si tuviera devanado ondulado.

5.18. ¿Cuál es la frecuencia de la fem inducida en el devanado de la armadura de un generador octapolar que opera a una velocidad de 600 rpm?

5.19. Determine los requerimientos de fmm por polo para que se establezca una densidad de flujo de 69 000 líneas/pulg^2 en el entrehierro de 0.16 pulg de la máquina. Suponga que la permeabilidad del material magnético es infinita [1 T = 64.516×10^3 líneas/pulg^2].

5.20. ¿Cuáles son los diferentes tipos de generadores de cc? Trace un esquema de cada uno de ellos. Dibuje la sección transversal de cada máquina y muestre las conexiones reales de los devanados.

5.21. Un generador serie requiere 620 A•t/polo para entregar una carga de 105 A. Determine el número de vueltas por polo.

5.22. Calcule la corriente en la armadura por conductor de un generador hexapolar de cc con excitación independiente, de 60 kW, 240 V, si se devana con devanado *a*) imbricado y *b*) ondulado.

5.23. ¿Qué es conmutación?

5.24. Explique la reacción de la armadura. Mencione los métodos que se usan comúnmente para compensar el efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura.

5.25. ¿Cuál es la causa principal de las chispas en las escobillas? ¿Las chispas ocurren en el borde anterior o posterior de las escobillas?

5.26. ¿Cuál es el significado *sin carga* o *no carga*? ¿Y el de *plena carga*?

5.27. Explique la regulación del voltaje. La regulación del voltaje del generador *A* es de 10% y la del *B* es de 5%. ¿Cuál generador es mejor?

5.28. Explique los términos siguientes: pérdidas mecánicas, pérdidas magnéticas, pérdida por rotación, pérdida en el cobre y pérdida por carga parásita.

5.29. ¿Cómo pueden reducirse las pérdidas magnéticas?

5.30. ¿Cuáles son las causas de que un generador shunt falle en el crecimiento del voltaje? ¿Cuáles son las soluciones?

5.31. Explique los términos siguientes: resistencia crítica, característica de magnetización (curva), característica externa (curva) y línea de resistencia del campo.

5.32. ¿Cuál es el efecto de la reacción de la armadura en la característica externa de un generador de cc?

5.33. Trace circuitos equivalentes de distintos tipos de generadores de cc. Explique el crecimiento del voltaje en cada caso.

5.34. ¿Por qué se llama al generador en serie *reforzador*?

5.35. ¿Por qué los polos de conmutación o interpolos se conectan en serie con la armadura?

5.36. Explique los términos siguientes: derivación larga, derivación corta, subcompound, compound llano, ultracompound, cumulativo y diferencial.

5.37. ¿Cuál es la importancia de una resistencia para desvío del campo?

5.38. Enuncie el criterio de la eficiencia máxima. ¿Cuál es su significado?

5.39. La fem inducida en un generador con excitación independiente es de 135 V sin carga, mientras que el voltaje en las terminales a plena carga es de 115 V. ¿Cuál es su regulación del voltaje?

5.40. La pérdida en el cobre a plena carga en un generador de cc de 25 kW y 120 V es de 2.5 kW. Si el generador opera a su eficiencia máxima, ¿cuál es ésta? Trace un esquema del diagrama de flujo de potencia.

5.41. Un generador shunt de 25 kW y 125 V entrega la mitad de la carga a su voltaje especificado. La velocidad de operación es 1 725 rpm. Su eficiencia es de 85%. ¿Cuáles son las pérdidas totales y la potencia de entrada a la máquina? Trace el diagrama de flujo de potencia. ¿Cuál es el par aplicado por la máquina de impulsión?

Problemas

5.1. La armadura de una máquina tetrapolar con devanado imbricado tiene 24 ranuras. Determine el paso de ranura, el paso anterior y el paso posterior. Trace el diagrama de sus devanados polares y resalte las trayectorias paralelas.

Si la corriente de la armadura es de 200 A, ¿cuál es la corriente por cada trayectoria?

5.2. La armadura de una máquina tetrapolar con devanado imbricado tiene 12 ranuras. ¿Cuáles son el paso de ranura, el paso posterior y el paso anterior? Muestre los devanados de la armadura y señale sus cuatro trayectorias paralelas. Determine la corriente por trayectoria si la corriente en la armadura es de 40 A.

5.3. Trace un diagrama del devanado polar para una armadura con devanado imbricado de ocho polos y 72 ranuras. Calcule el paso de ranura, el paso anterior y el paso posterior. Si cada bobina es capaz de llevar una corriente máxima de 20 A, ¿cuál es la especificación de corriente máxima de la armadura?

5.4. La armadura de una máquina hexapolar con devanado imbricado tiene 36 ranuras. Determine el paso de ranura, el paso anterior y el paso posterior. Trace un diagrama del devanado polar y resalte las trayectorias paralelas. Si cada bobina puede llevar una corriente de 12 A, determine la especificación de corriente de la armadura.

5.5. Trace un diagrama completo del devanado polar para una armadura tetrapolar y 21 ranuras con devanado ondulado. ¿Cuáles son el paso de ranura, el paso anterior, el paso posterior y el paso del conmutador? Si la corriente especificada de la armadura es de 80 A, calcule la corriente por trayectoria.

5.6. Determine el paso posterior, el paso anterior y el paso del conmutador para una armadura tetrapolar con devanado ondulado de 15 ranuras. Trace el diagrama del devanado polar. Si la corriente por trayectoria es de 25 A, ¿cuál es la especificación de corriente de la armadura?

5.7. Determine el paso posterior, el paso anterior y el paso del conmutador de una armadura tetrapolar con devanado ondulado y 13 ranuras. Trace el diagrama del devanado polar para un devanado regresivo. Si la corriente de cada bobina está limitada a 30 A, ¿cuál es la limitación en la corriente de la armadura?

5.8. Determine el paso posterior, el paso anterior y el paso del conmutador para una armadura tetrapolar con devanado ondulado y 19 ranuras. Trace el diagrama del devanado polar. Si la corriente máxima en la armadura es de 100 A, ¿cuál es la especificación de corriente de cada bobina?

5.9. La armadura de una máquina tetrapolar con devanado imbricado tiene 48 ranuras. Hay 10 conductores por ranura. La longitud axial de la armadura es de 10.8 cm y su diámetro es de 25 cm. El arco polar es de 15 cm y la densidad de flujo por polo es 1.2 T. Si la velocidad de la armadura es de 1 200 rpm, determine *a*) la fem inducida en el devanado de la armadura, *b*) la fem inducida por bobina, *c*) la fem inducida por vuelta, y *d*) la fem inducida en cada conductor. Determine la frecuencia de la fem inducida en el devanado de la armadura.

5.10. Repita el problema 5.9 para una máquina con devanado ondulado.

5.11. La armadura de una máquina hexapolar con devanado imbricado tiene 48 bobinas. Cada bobina tiene 12 vueltas. La armadura está envuelta por un imán permanente de cerámica con forma de anillo, y la densidad de flujo por polo es 0.7 T. La armadura tiene 12 cm de longitud y 31.6 cm de diámetro. Si la velocidad de la armadura es de 900 rpm, determine la fem inducida *a*) en la ar-

madura, b) en cada bobina, c) en cada conductor. Determine la frecuencia de la fem inducida en el devanado de la armadura.

5.12. Calcule la fem inducida en el devanado de la armadura si la velocidad de la armadura del problema 5.11 se cambia a a) 600 rpm, b) 450 rpm, y c) 1 200 rpm. ¿Cuál es la frecuencia de la fem inducida para cada velocidad?

5.13. Si la corriente en la armadura del problema 5.11 es de 30 A, determine a) la corriente por trayectoria, b) la potencia desarrollada, y c) el par desarrollado. Si 90% de la potencia mecánica se convierte en eléctrica, ¿cuál debe ser el par aplicado por la máquina de impulsión?

5.14. Se tiene una máquina tetrapolar de cc de 120 kW y 240 V cuya curva de magnetización, a la velocidad especificada de 600 rpm se aproxima con la fórmula siguiente:

$$E_a = \frac{2\,400 I_f}{7.5 + 6.5 I_f}$$

Grafique las curvas de magnetización para velocidades de 600, 400 y 300 rpm. La corriente del campo se restringe a un máximo de 10 A.

5.15. Se tomaron los datos siguientes para obtener la curva de magnetización de una máquina hexapolar de cc de 15 kW y 150 V a su velocidad especificada de 1 200 rpm

I_f (A)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
E_a (V)	6	70	112	130	140	145	149	152	155	157	158	159

Trace las curvas de magnetización para velocidades de 1 200 rpm y 800 rpm.

5.16. Un generador de cc octapolar tipo PM con devanado imbricado tiene 72 ranuras y seis vueltas por bobina. La corriente especificada por conductor es de 12.5 A. El voltaje en las terminales sin carga a 1 600 rpm es de 120 V. Calcule a) el flujo que se requiere por polo y b) la potencia desarrollada. Si la máquina tiene devanado ondulado, ¿cuál sería su voltaje especificado, corriente de la armadura y potencia?

5.17. Una máquina tetrapolar de cc con devanado ondulado tiene 71 ranuras y dos vueltas por bobina. El radio y la longitud de la armadura son de 25.4 y 20 cm, respectivamente. El arco polar cubre 70% de la armadura. La densidad de flujo por polo es 0.9 T. La velocidad de la armadura es de 560 rpm. Para una corriente de la armadura de 40 A, determine el par desarrollado por la máquina.

5.18. El voltaje sin carga de un generador de cc tipo PM a 1 800 rpm es de 120 V. La resistencia del circuito de la armadura es 0.02 Ω. La pérdida por rotación a 1 800 rpm es de 2.5 kW. Si el generador está especificado para 200 A y opera en la región lineal, calcule a) el voltaje en las terminales, b) la regulación del voltaje, c) el par aplicado, y d) la eficiencia.

5.19. El generador del problema 5.18 opera con la mitad de la carga cuando la velocidad se ajusta a 1 200 rpm. Si la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad, determine el par aplicado y la eficiencia a media carga.

5.20. Un generador de cc con excitación independiente, de 120 V y 1 200 rpm tiene los parámetros siguientes: $R_a = 0.05\ \Omega$, $R_{fw} = 50\ \Omega$, $V_f = 120$ V, y $N_f = 100$ vueltas/polo. La fmm de desmagnetización debida a la reacción de la armadura es 20% de la corriente de carga. Se sabe que la fem inducida sin carga sigue la relación

$$E_a = \frac{2\,000 I_f}{5 + 8I_f}$$

El generador entrega su carga especificada de 50 A al voltaje especificado de 120 V. La pérdida por rotación es de 850 W. Determine *a*) la resistencia del devanado del campo, *b*) una resistencia externa que debe agregarse en el circuito del campo, *c*) la eficiencia, y *d*) la regulación del voltaje.

5.21. El generador de cc del problema 5.16 tiene una resistencia en el circuito de la armadura de 0.05 Ω. La pérdida por rotación es de 1 500 W. Calcule *a*) la eficiencia, *b*) el par aplicado, y *c*) la regulación del voltaje. Desprecie el efecto de la reacción en la armadura.

5.22. La máquina de cc del problema 5.17 está conectada como generador con excitación independiente. Sus parámetros son $R_a = 0.25\ \Omega$, $R_f = 90\ \Omega$, $V_f = 90$ V y $P_r = 2$ kW. Determine la eficiencia y la regulación del voltaje con la corriente de 40 A a plena carga. Desprecie la reacción de la armadura.

5.23. Un generador con excitación independiente de 50 kW, 250 V y 600 rpm tiene una resistencia en la armadura de 0.05 Ω. El generador alimenta la carga especificada a su voltaje especificado. El circuito del devanado del campo tiene una resistencia de 100 Ω y está conectado a una fuente de 200 V. La pérdida por rotación es de 5 kW. Determine la eficiencia, el par aplicado y la regulación del voltaje cuando la reacción de la armadura es igual a cero.

5.24. Un generador shunt de 230 V, 1 800 rpm y 4.6 kW tiene una resistencia en el circuito de la armadura de 0.2 Ω y una resistencia en el circuito del campo de 65 Ω. La fem inducida debida al flujo residual es de 10 V. Si el generador se conecta en cortocircuito antes de operarlo, ¿cuál es la corriente de cortocircuito? ¿Habrá crecimiento del voltaje?

5.25. El generador del problema 5.20 se conecta como generador shunt. Se ajusta la corriente del campo de modo que alimenta la carga especificada al voltaje especificado. Calcule *a*) la resistencia externa en el circuito del devanado del campo, *b*) la eficiencia, y *c*) la regulación del voltaje.

5.26. Un generador shunt de 23 kW, 230 V y 900 rpm tiene 240.5 V inducidos en el devanado de su armadura cuando alimenta la carga especificada al voltaje especificado. La corriente del campo es de 5 A. ¿Cuál es la resistencia de la armadura? ¿Cuál es la resistencia del circuito del campo? El voltaje sin carga del generador es de 245 V. ¿Cuál es la regulación del voltaje? ¿Por qué no es igual la fem inducida con la carga especificada a la inducida sin carga?

5.27. Determine el valor de la resistencia crítica del circuito del campo para la curva de magnetización *a*) de la figura 5.21 y *b*) de la figura 5.26.

5.28. La máquina de cc del problema 5.15 alimenta la carga especificada al voltaje especificado cuando se conecta como generador shunt a la velocidad de 1 200 rpm. La resistencia del circuito del campo es de 37.5 Ω. La pérdida por rotación es de 1 800 W. La reacción de la armadura es igual a cero. Determine *a*) la resistencia de la armadura, *b*) la regulación del voltaje, y *c*) la eficiencia.

5.29. Un generador shunt octapolar de 600 rpm con 800 conductores en la armadura y conexión ondulada alimenta una carga de 20 A a su voltaje especificado en las terminales de 240 V. La resistencia de la armadura es de 0.2 Ω y la resistencia del devanado del campo es de 240 Ω. La pérdida por rotación es 280 W. Calcule *a*) la corriente de la armadura, *b*) la fem inducida, *c*) el flujo por polo, *d*) el par aplicado, y *e*) la eficiencia.

5.30. Un generador shunt tetrapolar con una resistencia del campo shunt de 100 Ω y resistencia en la armadura de 1 Ω tiene 400 conductores en conexión imbricada en su armadura. El flujo por polo es de 20 mWb. La pérdida por rotación es de 500 W. Si se conecta una resistencia de carga de 10 Ω a la armadura y el generador se opera a 1 200 rpm, calcule *a*) el voltaje en las terminales y *b*) la eficiencia. Desprecie la reacción de la armadura.

5.31. La curva de magnetización de un generador shunt tetrapolar de 110 V y 1 000 rpm es la siguiente:

I_f (A)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
E_a (V)	8	60	100	116	120	123	125	126	127

La resistencia de 140 conductores en conexión imbricada de la armadura es de 0.1 Ω. La resistencia del devanado del campo es 40 Ω. Calcule *a*) el voltaje sin carga, *b*) la resistencia crítica, *c*) el flujo residual, y *d*) la velocidad a la que falla la máquina para el crecimiento del voltaje.

5.32. El generador del problema 5.31 alimenta una carga a su voltaje de especificación en las terminales. La pérdida por rotación es igual a la pérdida en el cobre. Si el flujo se reduce en 5% debido a la reacción en la armadura, encuentre *a*) la carga que alimenta el generador, *b*) el par aplicado, *c*) la regulación del voltaje, y *d*) la eficiencia.

5.33. Un generador serie de cc, de 12 kW y 120 V tiene una resistencia del campo en serie de 0.05 Ω. La fem generada es de 135 V cuando el generador alimenta la carga especificada a su voltaje especificado en las terminales. ¿Cuál es la resistencia de la armadura? Si la carga se reduce a 80% de su valor especificado al voltaje especificado, ¿cuál es la fem inducida en la armadura? Si la fem generada es de 130 V y el generador suministra 4.167 kW, ¿cuál es el voltaje en las terminales?

5.34. Un generador serie opera en la región lineal donde el flujo es directamente proporcional a la corriente en la armadura. La resistencia de la armadura es de 80 mΩ y la resistencia del devanado del campo en serie es de 20 mΩ. A una velocidad de 1 200 rpm, el voltaje en las terminales es de 75 V y la corriente en la armadura es de 20 A. ¿Cuál debe ser la corriente en la armadura para contar con un voltaje en las terminales de 120 V a 1 200 rpm? Si se requiere

un voltaje en las terminales de 100 V, con una corriente en la armadura de 25 A, ¿cuál debe ser la velocidad de la armadura?

5.35. Se obtuvieron los datos siguientes sin carga al excitar el devanado del campo shunt con 200 vueltas de un generador de cc a la velocidad de 1 200 rpm:

I_f (A)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
E_a (V)	5	50	90	112	120	125	128	130	131	131.5

La resistencia de la armadura es de 50 mΩ. Cuando se conecta como generador compound en derivación corta, el voltaje sin carga es de 120 V. Para una operación compound llana a la corriente de carga especificada de 100 A, diseñe un devanado del campo en serie de modo que su resistencia no exceda 30 mΩ.

5.36. Un generador compound de 120 V y 6 kW tiene una resistencia en la armadura de 50 mΩ, una resistencia del campo en serie de 30 mΩ y una resistencia del campo shunt de 25 Ω. Si se conecta el generador en derivación larga, calcule la corriente de su armadura y la fem inducida. Si la pérdida por rotación es de 800 W, determine su eficiencia.

5.37. Repita el problema 5.36 cuando se conecta el generador en derivación corta.

5.38. Un generador shunt se convierte en generador compound al agregarle un devanado del campo en serie. Al efectuar una prueba en el generador sólo con excitación shunt, se encuentra que *a*) una corriente en el campo de 8 A genera 240 V sin carga y *b*) que 10 A mantienen el mismo voltaje a plena carga. Si el devanado del campo shunt tiene 500 vueltas por polo, calcule el número de vueltas en serie que se requieren. Presente los presupuestos.

5.39. Un generador compound en derivación larga de 240 V y 48 kW tiene una resistencia del campo en serie de 0.04 Ω y una resistencia en el campo shunt de 200 Ω. Cuando el generador suministra la carga especificada al voltaje especificado, la potencia de entrada es de 54 kW. La pérdida por rotación es de 2.5 kW. Encuentre *a*) la resistencia del circuito de la armadura y *b*) la eficiencia.

5.40. Un generador compound en derivación larga de 50 kW, 250 V y 600 rpm, equipado con una resistencia para el desvío del campo, alimenta la carga especificada al voltaje especificado. Las resistencias de la armadura y del campo en serie son de 0.05 Ω y 0.01 Ω, respectivamente. Hay 100 vueltas por polo en el devanado del campo shunt y dos vueltas por polo en el devanado del campo en serie. La pérdida por rotación es de 4.75 kW. Las mediciones de la corriente a través del devanado del campo shunt y la resistencia para desvío son de 5 A y 41 A, respectivamente. Calcule *a*) la corriente del campo en serie, *b*) la resistencia para desvío, *c*) la eficiencia, y *d*) el par aplicado por la máquina de impulsión.

5.41. Si el generador del problema 5.40 se reconecta como generador compound en derivación corta y alimenta la carga especificada al voltaje especificado, ¿qué clase de ajustes serán necesarios para mantener el mismo flujo y la misma potencia desarrollada?

5.42. Los datos de una prueba a circuito abierto en un generador compound cumulativo de cc en derivación larga, de 30 kW y 150 V a 1 200 rpm, son los siguientes:

I_f (A)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
E_a (V)	56	112	150	180	200	216	230

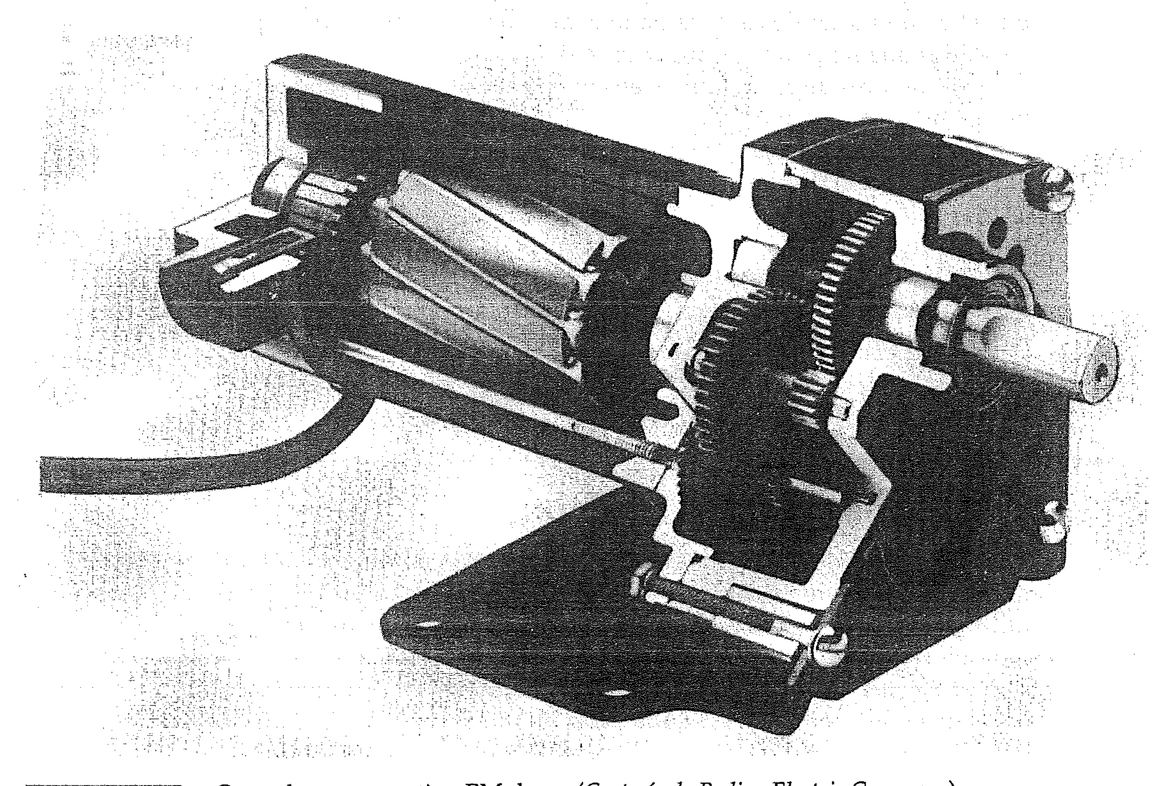
Los demás parámetros son $R_a = 0.06\ \Omega$, $R_s = 0.04\ \Omega$, $N_f = 2\ 000$ vueltas y $N_s = 4$ vueltas. Determine la reacción de la armadura en términos de una corriente equivalente en el campo cuando el generador alimenta una carga de 24 kW a 120 V. Determine la velocidad a la que el generador debe operarse para alimentar una carga de 20 kW a 200 V. Suponga que la reacción de la armadura es proporcional al cuadrado de la corriente en la armadura.

5.43. Un generador compound en derivación larga, de 10 kW y 125 V, tiene los parámetros siguientes: $R_a = 10\ \text{m}\Omega$, $R_s = 20\ \text{m}\Omega$, $R_f = 50\ \Omega$, $N_s = 5$ vueltas, $N_f = 500$ vueltas y $P_r = 740$ W. En condiciones sin carga, el voltaje en las terminales se reduce a 100 V. Para convertir el generador en compound llano, el campo en serie debe producir 300 A·t/polo. Calcule *a*) la resistencia para desvío que permita operar el cambio, *b*) la fmm total por polo a plena carga y sin carga, y *c*) la eficiencia.

5.44. Un generador compound en derivación corta está diseñado para alimentar una carga de 75 A a 440 V. Los demás parámetros son: $R_a = 0.2\ \Omega$, $R_s = 0.5\ \Omega$, $R_d = 1.5\ \Omega$, $I_f = 2.5$ A y $P_r = 1$ kW. Calcule *a*) la potencia desarrollada por la armadura, *b*) todas las pérdidas eléctricas, y *c*) la eficiencia. Trace el diagrama de flujo de potencia.

6

Motores de corriente continua



Corte de un motor tipo PM de cc. (*Cortesía de Bodine Electric Company.*)

6.1. Introducción

En el capítulo 5 se explicó que un generador es una máquina que convierte energía mecánica en eléctrica. Cuando una máquina convierte energía eléctrica en mecánica se llama *motor*. No hay ninguna diferencia fundamental entre la construcción u operación de ambas máquinas. En realidad, la misma máquina puede usarse como motor o como generador.

Hay básicamente dos tipos de motores: de corriente alterna (ca) y de corriente continua (cc). Un motor de ca (tema de los capítulos 9 y 10) convierte energía eléctrica alterna (variable en el tiempo) en energía mecánica. Cuando una máquina convierte energía eléctrica que no varía en el tiempo en energía mecánica, recibe el nombre de *motor de cc*. Dedicaremos este capítulo al estudio de los motores de cc.

Cuando la mayor parte de la energía eléctrica que se genera, transmite y consume tiene la forma de ca, el uso de un motor de cc requiere la instalación de equipo adicional para convertir la ca en cc. Para justificar el costo adicional de un conmutador, por un lado, y la instalación de convertidores de ca en cc, por el otro, solamente puede ponerse en servicio un motor de cc cuando su rendimiento supere el de un motor de ca. Por *rendimiento superior* se entiende que un motor de cc es capaz de realizar lo que no puede hacerse fácilmente con un motor de ca. Por ejemplo, un motor de cc es capaz de desarrollar un par de arranque varios órdenes de magnitud mayor que el de un motor de ca de tamaño comparable. Un motor de cc puede operar a velocidades que no puede alcanzar un motor de ca.

Los motores de cc se usan extensamente en sistemas de control, como equipos de posicionamiento, debido a que tanto su velocidad como su par pueden controlarse con precisión en un rango muy amplio. Por supuesto, un motor de cc es la elección lógica cuando se dispone de una fuente de energía de cc.

La unidad nominal para especificar la potencia de salida de un motor de cc es el caballo de fuerza (1 hp = 746 W). Los motores de cc se construyen en tamaños que varían de las fracciones de caballo de fuerza a más de 1 000 caballos de fuerza. Algunas de las aplicaciones de motores de cc incluyen automóviles, barcos, aviones, computadoras, impresoras, robots, afeitadoras eléctricas, juguetes, grabadoras de cintas de audio y vídeo, cámaras de cine, motores de tracción para locomotoras, trenes subterráneos y tranvías, equipos de laminación, grúas, troqueladoras y montacargas.

6.2. Operación de un motor de cc

Puesto que no hay diferencia entre la construcción de un generador de cc y la de un motor de cc, los tres tipos de generadores de cc estudiados en el capítulo 5 pueden utilizarse también como motores de cc. Por consiguiente, hay tres tipos generales de motores de cc: shunt, serie y compound. El motor de imanes permanentes (PM, *permanent-magnet*) es un caso especial de un motor shunt con densidad de flujo uniforme (constante). También se puede tener un motor con excitación independiente si se usa una fuente auxiliar para el devanado del campo. No es práctico emplear dos fuentes de energía eléctrica, una para el devanado del campo y otra para el circuito

de la armadura, de modo que el motor con excitación independiente prácticamente no existe. Sin embargo, un motor con excitación independiente también puede tratarse como un caso especial de un motor shunt.

El principio de operación de un motor de cc se explica detalladamente en la sección 3.4; ahora sólo se presenta una breve reseña. En un motor de cc se crea un campo magnético uniforme mediante sus polos. Los conductores de la armadura se ven forzados a conducir corriente por medio de la conexión a una fuente de energía de cc (suministro), como se muestra en la figura 6.1. El conmutador mantiene la misma dirección de la corriente en los conductores bajo cada polo. De acuerdo con la ecuación de fuerza de Lorentz, *un conductor que porta corriente experimenta una fuerza que tiende a moverlo cuando se coloca en un campo magnético*. Tal es, en esencia, el principio de operación de un motor de cc. Todos los conductores situados en la periferia de un motor de cc están sujetos a esa fuerza, como se aprecia en la figura. Además, la fuerza ocasiona que la armadura gire en el sentido de las manecillas del reloj. Por tanto, *la armadura de un motor de cc gira en dirección del par desarrollado por el motor*. Por ello, el par que desarrolla el motor se llama *par impulsor*. Observe que el par desarrollado por los conductores situados en la armadura de un generador de cc va en dirección opuesta a su movimiento. Por ende, puede denominarse *par retardador*.

La magnitud del par promedio que desarrolla esa fuerza debe ser la misma en ambas máquinas, pues no importa si la corriente es forzada a través de los conduc-

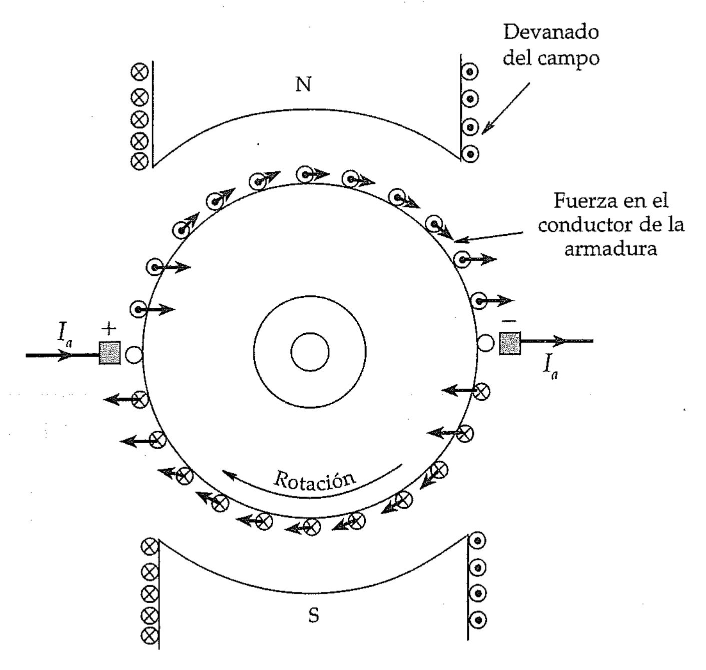


Figura 6.1. Fuerza que experimentan los conductores de la armadura en un motor bipolar de corriente continua.

tores de la armadura por una fuente de energía eléctrica externa o es resultado de la fem inducida en los conductores. Por tanto,

$$T_d = K_a \Phi_P I_a \qquad (6.1)$$

donde $K_a = PZ/2\pi a$ es la constante de máquina, Φ_P es el flujo por polo e I_a es la corriente de la armadura.

Conforme la armadura gira, cada bobina en ella experimenta un cambio en el flujo que pasa a través de su plano. Por tanto, en cada bobina se induce una fuerza electromotriz (fem). De acuerdo con la ley de la inducción de Faraday, la fem inducida debe *oponerse* a la corriente que entra en la armadura. En otras palabras, la fem inducida se opone al voltaje aplicado, por lo que la fem inducida en un motor suele recibir el nombre de *fuerza contraelectromotriz* o *fuerza electromotriz inversa* del motor.

Sin embargo, el valor promedio de la fem inducida en las terminales de la armadura debe ser el mismo que el de un generador de cc, ya que en realidad no importa que la armadura se ponga en movimiento mediante una máquina de impulsión o por su propio par impulsor. Por tanto,

$$E_a = K_a \Phi_P \omega_m \qquad (6.2)$$

donde ω_m es la velocidad angular de la armadura (rad/s).

Si R es la resistencia efectiva (total) en el circuito de la armadura y V_s es el voltaje aplicado a través de las terminales de la armadura, la corriente de la armadura es

$$I_a = \frac{V_s - E_a}{R} \qquad (6.3)$$

La ecuación anterior también puede expresarse como

$$V_s = E_a + I_a R \qquad (6.4)$$

Puesto que la resistencia R del circuito de la armadura generalmente es muy pequeña, la caída de voltaje a través de ella también es pequeña en comparación con la fuerza contraelectromotriz E_a. Por ende, se precisa la mayor parte del voltaje aplicado V_s para superarla. De la ecuación anterior debe tornarse evidente que la fuerza contraelectromotriz en el motor es menor que el voltaje aplicado.

Arranque de un motor de cc

En el momento del arranque, la fuerza contraelectromotriz en el motor vale cero porque la armadura no está girando. Para un valor pequeño de la resistencia R del cir-

cuito de la armadura, la corriente de arranque en la armadura será sumamente alta si el valor especificado de V_s se aplica a través de las terminales de la armadura. La corriente en exceso puede causar un daño permanente a los devanados de la armadura. Por tanto, *un motor de cc nunca debe arrancarse a su voltaje especificado*. Con objeto de arrancar un motor de cc debe agregarse una resistencia externa en serie con el circuito de la armadura, como se ilustra en la figura 6.2 para un motor tipo PM. La resistencia externa se reduce en forma gradual a medida que la armadura aumenta su velocidad. Finalmente, cuando alcanza su velocidad normal, la resistencia externa se elimina del circuito de la armadura.

Reacción de la armadura

La teoría de la conmutación y la reacción de la armadura, como se delineó en el capítulo 5 para los generadores de cc, también es aplicable a los motores de cc. La única diferencia radica en que la dirección de la corriente en un conductor bajo un polo en un motor de cc es opuesta a la de un generador para la misma dirección de rotación. Por tanto, el campo creado por la corriente en la armadura en un motor de cc tiene dirección opuesta al producido por la corriente de la armadura de un generador de cc. Como las escobillas se adelantan para garantizar una buena conmutación en un generador de cc, en un motor de cc deben retrasarse.

Si una máquina de cc tiene interpolos, las polaridades de éstos para el motor de cc deben ser opuestas a las de un generador de cc. Como los interpolos llevan corriente de la armadura y ésta se encuentra en la dirección opuesta, las polaridades de los interpolos se invierten automáticamente. Lo mismo se cumple para los devanados de compensación. Así, no se necesita emprender acción alguna cuando se utiliza como motor de cc un generador de cc diseñado con interpolos o devanados compensadores.

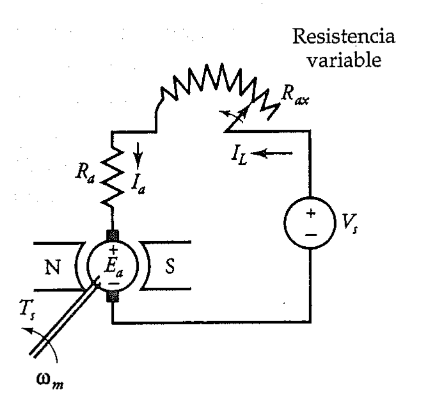


Figura 6.2. Resistencia variable insertada en serie con el circuito de la armadura durante el arranque de un motor tipo PM de corriente continua.

6.3. Regulación de la velocidad

La corriente en la armadura de un motor se incrementa con la carga. Para un voltaje aplicado constante, el incremento en la corriente de la armadura ocasiona una disminución en la fuerza contraelectromotriz, lo que origina una caída en la velocidad del motor. La regulación de la velocidad es una medida del cambio en la velocidad desde la ausencia de carga hasta la plena carga. Cuando el cambio en la velocidad a plena carga se expresa como porcentaje de su velocidad a plena carga, se llama *regulación porcentual de la velocidad (RV%)*. En forma de ecuación, la regulación porcentual de la velocidad es

$$RV\% = \frac{N_{mnL} - N_{mpc}}{N_{mpc}} \times 100 = \frac{\omega_{mnL} - \omega_{mpc}}{\omega_{mpc}} \times 100 \tag{6.5}$$

donde N_{mnL} (ω_{mnL}) es la velocidad sin carga y N_{mpc} (ω_{mpc}) es la velocidad a plena carga de un motor de cc.



Al avanzar en el análisis de los motores de cc se observará que *a*) un motor serie es de velocidad variable debido a que su regulación de velocidad es muy alta, *b*) un motor shunt es esencialmente de velocidad constante porque su regulación de velocidad es muy baja, y *c*) un motor compound es de velocidad variable porque su regulación de velocidad es mayor que la del motor shunt.

6.4. Pérdidas en un motor de cc

La potencia de entrada a un motor de cc es eléctrica, y la de salida es mecánica. La diferencia entre la potencia de entrada y la de salida es la pérdida de potencia. Un motor de cc presenta las mismas pérdidas de potencia que un generador de cc (para más detalles, véase la sección 5.11).

Cuando se suministra potencia a un motor, una parte significativa se disipa en las resistencias de la armadura y los devanados del campo como pérdidas en el cobre. El motor convierte la potencia restante (potencia desarrollada) en potencia mecánica. Una parte de la potencia desarrollada se consume por la pérdida por rotación. La diferencia es la potencia mecánica neta disponible en el eje del motor. En la figura 6.3 se presenta un diagrama común de flujo de potencia.

6.5. Motor serie

En un motor serie, el devanado del campo se conecta en serie con el circuito de la armadura, como se ilustra en la figura 6.4, donde también se incluye una resistencia externa R_{ax} en serie con la armadura que puede usarse para arrancar el motor y después *cortocircuitarse*, o bien para controlar la velocidad del motor. Como el deva-

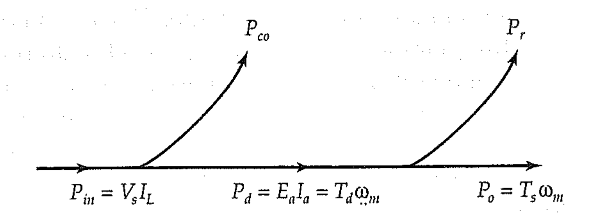


Figura 6.3. Diagrama de flujo de potencia de un motor de corriente continua.

nado del campo en serie conduce la corriente especificada de la armadura para el motor, tiene pocas vueltas de conductor grueso. Conforme la corriente de la armadura cambia con la carga, también lo hace el flujo que produce el devanado del campo. En otras palabras, el flujo que establece un motor serie es una función de la corriente de la armadura. Si el flujo por polo puede expresarse como

$$\Phi_P = k_f I_a \tag{6.6}$$

luego, la fuerza contraelectromotriz es

$$E_a = K_a k_f I_a \omega_m \tag{6.7}$$

y el par que desarrolla el motor serie es

$$T_d = K_a k_f I_a^2 \tag{6.8}$$

Con base en las ecuaciones anteriores es evidente que la fuerza contraelectromotriz en el motor es proporcional a la corriente de la armadura y que el par que desarrolla un motor serie es proporcional al *cuadrado* de la corriente de la armadura en la

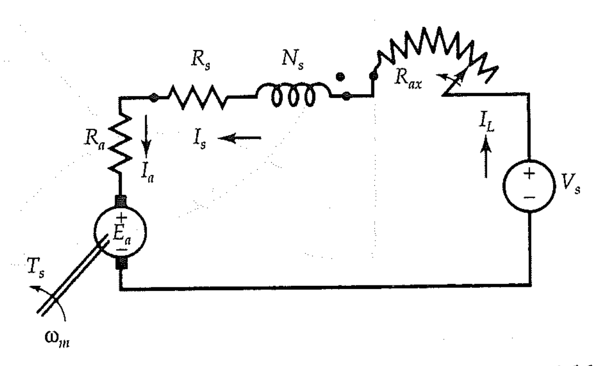


Figura 6.4. Circuito equivalente de un motor serie con resistencia variable de arranque.

medida en que el motor opera en la región lineal. Conforme se incrementa la corriente en la armadura, también lo hace el flujo producido por ella. Un aumento en el flujo mejora el nivel de saturación en el motor. Cuando el motor está saturado, el flujo se incrementa sólo gradualmente con un aumento adicional en la corriente de la armadura. Por tanto, el par desarrollado deja de ser proporcional al cuadrado de la corriente. En la figura 6.5 se muestra la característica par *versus* corriente de la armadura para un motor serie.

Cuando un motor serie opera sin carga, el par que desarrolla es apenas suficiente para superar la pérdida por rotación en la máquina. Como la pérdida por rotación es solamente una fracción del par a plena carga, resulta que el par desarrollado por la máquina es muy pequeño sin carga. De la ecuación 6.8 se desprende que la corriente de la armadura también debe ser muy pequeña. Por tanto, la fuerza contraelectromotriz sin carga debe ser casi igual al voltaje aplicado V_s. Como la fuerza contraelectromotriz también es proporcional a la corriente de la armadura, y esta corriente es una fracción pequeña de su valor especificado, el motor debe alcanzar una velocidad relativamente alta. En realidad, un motor serie sin carga puede autodestruirse debido a la acción centrífuga.

Conforme se aplica carga al motor, el par que desarrolla debe crecer. El incremento en el par necesita que la corriente de la armadura aumente. El incremento en la corriente de la armadura ocasiona un incremento en la caída de voltaje a través de las resistencias del circuito de la armadura, del devanado del campo y la externa. Para un voltaje fijo aplicado, la fuerza contraelectromotriz debe disminuir con la carga. Como la fuerza contraelectromotriz también es proporcional a la corriente de la armadura, debe abatirse la velocidad del motor. En la figura 6.6 se muestra la característica par-velocidad de un motor serie. En breve comentaremos la naturaleza de esa curva. En la figura también se aprecia la potencia que desarrolla un motor serie como función de su velocidad.

Del circuito equivalente de la figura 6.4 se tiene

$$\begin{aligned} E_a &= V_s - I_a(R_a + R_s + R_{ax}) \\ &= V_s - I_aR \end{aligned}$$

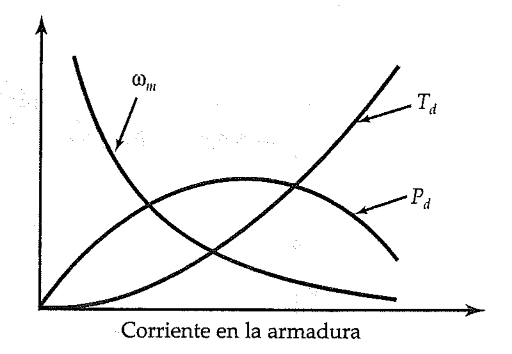


Figura 6.5. Par y potencia desarrollados y características de velocidad de un motor serie como función de la corriente en la armadura.

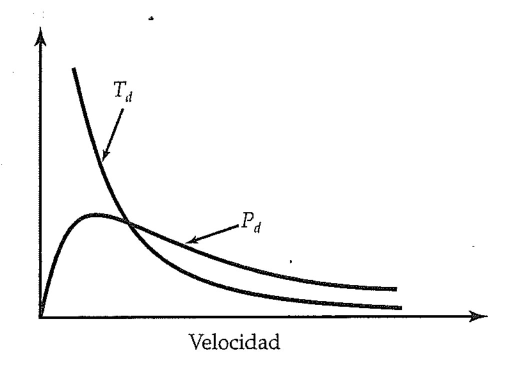


Figura 6.6. Características de par y potencia desarrollada de un motor serie como función de la velocidad.

donde $R = R_a + R_s + R_{ax}$ es la resistencia total del circuito de la armadura. Al sustituir para E_a con base en la ecuación 6.7, se obtiene una expresión para la velocidad del motor en términos de la corriente de la armadura:

$$\omega_m = \frac{V_s - I_a R}{K_a k_f I_a} \tag{6.9}$$

Esta ecuación establece que la velocidad de un motor serie guarda una proporción prácticamente inversa con la corriente de la armadura. En la figura 6.5 se describe la naturaleza de la característica velocidad-corriente.

La ecuación 6.9 puede escribirse también como

$$I_a = \frac{V_s}{K_a k_f \omega_m + R} \tag{6.10}$$

Según la ecuación 6.8, el par desarrollado puede expresarse como

$$T_d = \frac{K_a k_f V_s^2}{[R + K_a k_f \omega_m]^2} \tag{6.11}$$

A partir de esta ecuación es evidente que para cualquier fin práctico el par desarrollado por un motor serie es inversamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Por ende, debe resultar obvia la naturaleza de la característica velocidad-par de la figura 6.6. Un motor serie proporciona un par elevado a velocidad baja, lo que lo hace apropiado para cabrias, grúas, trenes eléctricos y una variedad de aplicaciones que requieren pares de arranque considerables.

Puesto que el par que desarrolla un motor serie también es proporcional al cuadrado del voltaje aplicado, dicho par puede controlarse si se controla el voltaje apli-

cado. Por ejemplo, a una velocidad determinada la duplicación del voltaje aplicado ocasiona que el par se cuadruplique.

La potencia desarrollada por un motor serie es

$$\begin{aligned} P_d &= E_a I_a \\ &= [V_s - I_a R] I_a \end{aligned}$$

Para un voltaje constante aplicado, la potencia que desarrolla un motor serie es máxima cuando $I_a \rightarrow I_{am}$ y $dP_d/dI_a \rightarrow 0$. Así, al derivar la ecuación anterior con respecto a I_a e igualar a cero el resultado, se obtiene

$$I_{am} = \frac{V_s}{2R} \tag{6.12}$$

La potencia máxima desarrollada por un motor serie es

$$P_{dm} = \frac{V_s^2}{4R} \tag{6.13}$$

Para operación estable, el rango de funcionamiento de un motor serie está muy por debajo de la potencia máxima desarrollada por él. En la figura 6.5 se muestra la potencia (y el par desarrollado) como función de la corriente de la armadura.

Ejemplo 6.1

En la figura 6.7 se muestra la curva de magnetización de un motor serie de 10 hp y 220 V a 1 200 rpm. Los demás parámetros del motor son $R_a = 0.75\ \Omega$, $R_s = 0.25\ \Omega$ y $P_r = 1.04$ kW. ¿Cuál es la corriente de la armadura cuando el motor entrega su carga

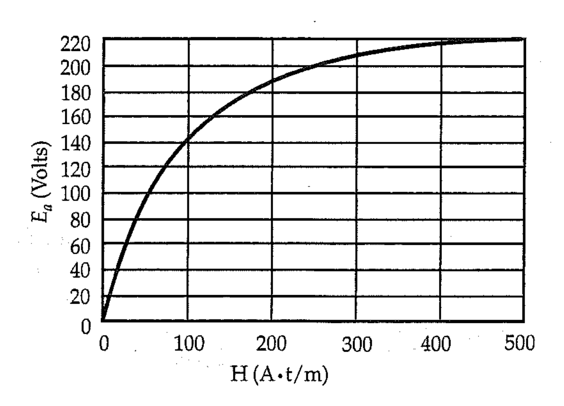


Figura 6.7. Curva de magnetización de un motor de cc a 1 200 rpm.

especificada a 1 200 rpm? ¿Cuál es la eficiencia del motor a plena carga? ¿Cuál es el número de vueltas por polo? Si la carga se reduce gradualmente, la corriente de la armadura decrece a 16.67 A. Calcule *a*) la nueva velocidad del motor y *b*) el par impulsor.

- Solución

Potencia de salida: $P_o = 10 \times 746 = 7\,460$ W

Potencia desarrollada: $P_d = P_o + P_r = 7\,460 + 1040 = 8\,500$ W

Resistencia del circuito de la armadura: $R = 0.25 + 0.75 = 1\ \Omega$

Puesto que $P_d = E_a I_a = 8\,500$ W y $E_a = V_s - I_a R$, se tiene que

$$E_a I_a = [V_s - I_a R] I_a$$

Al sustituir los valores se obtiene

$$I_a^2 - 220 I_a + 8\,500 = 0$$

o $$I_a = 50 \text{ A}$$

La potencia de entrada es: $P_{in} = V_s I_a = 220 \times 50 = 11\,000$ W

Por tanto, $$\eta = \frac{7\,460}{11000} = 0.6782 \quad \text{o} \quad 67.82\%$$

La fem inducida es $E_a = 220 - 50 \times 1 = 170$ V.

Con base en la curva de magnetización a 1 200 rpm, la fuerza magnetomotriz (fmm) del devanado del campo en serie que corresponde a una fuerza contraelectromotriz de 170 V es igual a 150 A·t/polo. Luego, las vueltas por polo son

$$N_s = \frac{150}{50} = 3 \text{ vueltas/polo}$$

Con carga reducida: $I_{an} = 16.67$ A

$$E_{an} = 220 - 16.67 \times 1 = 203.33 \text{ V}$$

La fmm del devanado en serie es 16.67 × 3 = 50 A•t/polo. A partir de la curva de magnetización se obtiene que la fuerza contraelectromotriz a 1 200 rpm es de 90 V. A fin de obtener una fuerza contraelectromotriz de 203.33 V con la misma fmm de 50 A•t/polo, la nueva velocidad del motor es

$$N_{mn} = \frac{203.33}{90} \times 1\,200 \approx 2\,711 \text{ rpm} \qquad \text{o} \qquad \omega_{mn} = 283.9 \text{ rad/s}$$

La potencia desarrollada a carga reducida es: $P_{dn} = 203.33 \times 16.67 = 3\,389.51$ W

$$T_{dn} = \frac{3\,389.51}{283.9} = 11.94 \text{ N} \cdot \text{m}$$

■

Ejercicios

6.1. Un motor serie desarrolla un par de 20 N • m cuando la corriente de la armadura es de 40 A. Si la carga del motor se incrementa gradualmente, la corriente de la armadura aumenta a 60 A. Si el motor opera en una región lineal, determine el par que desarrolla.

6.2. Un motor serie de 240 V toma 80 A cuando impulsa su carga especificada a 600 rpm. Los demás parámetros del motor son $R_a = 0.2\ \Omega$ y $R_s = 0.3\ \Omega$. Calcule la eficiencia si 5% de la potencia desarrollada se pierde por rotación. ¿Cuál es la especificación del motor en caballos de fuerza? Si un incremento de 50% en la corriente de la armadura ocasiona un aumento de 20% en el flujo, determine *a*) la velocidad del motor cuando la corriente de la armadura es de 120 A y *b*) el par que desarrolla el motor.

6.3. Un motor serie trabaja en la región lineal donde el flujo es proporcional a la corriente de la armadura. Cuando esta corriente es de 12 A, la velocidad del motor es de 600 rpm. El voltaje de la línea es de 120 V, la resistencia de la armadura es de 0.7 Ω y la resistencia del devanado del campo en serie es de 0.5 Ω. ¿Cuál es el par desarrollado por el motor? Para que el motor opere a una velocidad de 2 400 rpm, determine *a*) la corriente de la armadura y *b*) el par impulsor.

6.6. Motor shunt

En la figura 6.8 se muestra el circuito equivalente de un motor shunt con una resistencia de arranque en el circuito de la armadura. El devanado del campo se conecta directamente a la fuente. Si el voltaje de ésta es constante, el flujo que crea el devanado del campo es constante. El par que desarrolla el motor es

$$T_d = K_a \Phi_P I_a = K I_a \tag{6.14}$$

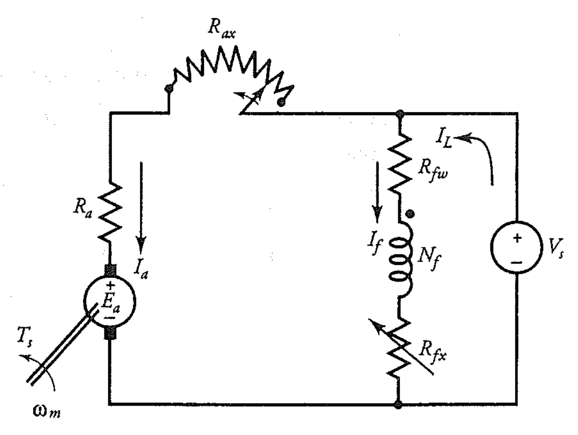


Figura 6.8. Circuito equivalente de un motor shunt con una resistencia de arranque en el circuito de la armadura.

donde $K = K_a\Phi_P$ es una cantidad constante. Por tanto, el par que desarrolla un motor shunt es proporcional a la corriente de la armadura, como se muestra en la figura 6.9.

Cuando el motor shunt trabaja con cierta carga, la fuerza contraelectromotriz del motor es

$$E_a = V_s - I_a R_a \tag{6.15}$$

Puesto que $E_a = K_a\Phi_P\omega_m$, la velocidad angular de operación (velocidad) del motor es

$$\omega_m = \frac{V_s - I_a R_a}{K_a\Phi_P} \tag{6.16}$$

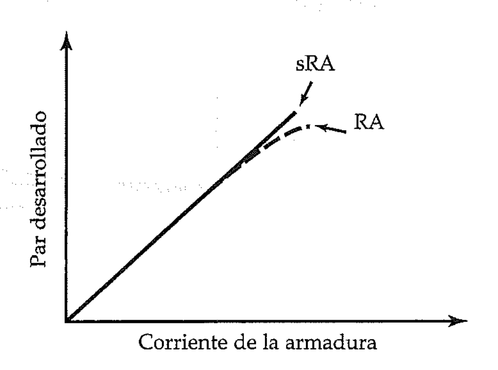


Figura 6.9. Par desarrollado por un motor shunt como función de la corriente de la armadura con reacción y sin reacción de ésta (RA: reacción de la armadura; sRA: sin reacción de la armadura).

Aunque estamos desarrollando relaciones en términos de la velocidad angular ω_m, aludiremos a ella como *velocidad del motor*.

Cuando se incrementa la carga en el motor tienen lugar los cambios siguientes:

a) La corriente de la armadura I_a se incrementa para satisfacer la demanda del aumento de carga.

b) Aumenta la caída de voltaje a través de la resistencia R_a del circuito de la armadura.

c) Para un voltaje de fuente fija, la fuerza contraelectromotriz E_a disminuye.

d) Puesto que el flujo es constante cuando la reacción de la armadura es despreciable, la disminución en la fuerza contraelectromotriz del motor se acompaña de un decrecimiento en su velocidad, como se ilustra en la figura 6.10 (curva *d*).

Con el incremento en la corriente de la armadura la reacción de ésta se vuelve más significativa si el motor no se compensa por ello. El aumento en la reacción de la armadura disminuye el flujo en el motor, lo que a su vez ocasiona un aumento en la velocidad. Según la saturación magnética del motor y la severidad de la reacción de la armadura, el incremento en la velocidad como respuesta a la reacción de la armadura puede ser menor, igual o mayor que la caída en la velocidad debida al incremento en la corriente de la armadura, como se describe en la figura 6.10 por medio de las curvas *a*, *b* y *c*, respectivamente. La curva *c* no es en realidad deseable, ya que puede conducir a una operación inestable. Es posible evitar este efecto si se agregan algunas vueltas en el devanado del campo, en serie con la armadura del motor. Cuando se incluye un devanado así como parte de un motor shunt, se le conoce como *devanado estabilizador*.

La ecuación 6.16 también puede expresarse como

$$\omega_m = \omega_{mnL} - \frac{R_a}{K_a \Phi_P} I_a \qquad (6.17)$$

donde $\omega_{mnL} = V_s/K_a\Phi_P$ es la velocidad del motor sin carga. Ésta es la velocidad a la que el par desarrollado por el motor es igual a cero. La velocidad real del motor es-

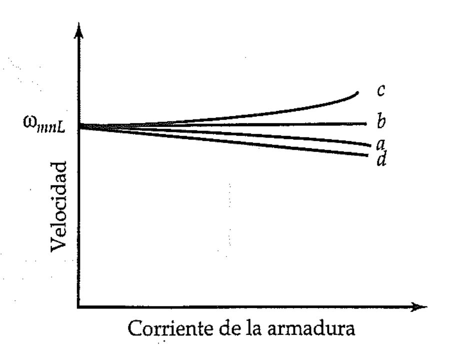


Figura 6.10. Característica de velocidad *versus* corriente de la armadura de un motor shunt.

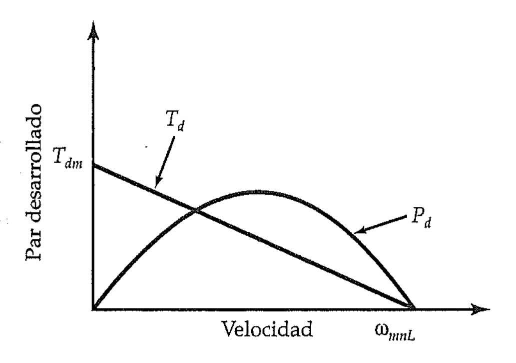


Figura 6.11. Par y potencia desarrollados como función de la velocidad de un motor shunt común.

tá limitada a ser menor que ω_{mnL} debido a la pérdida por rotación. Cuando $R_a \rightarrow 0$, la velocidad de un motor shunt $\omega_m \rightarrow \omega_{mnL}$. En otras palabras, *un motor shunt es básicamente un motor de velocidad constante.*

A partir de las ecuaciones 6.14 y 6.16 es asimismo posible obtener una expresión para el par desarrollado en términos de la velocidad del motor:

$$T_d = \frac{K_a \Phi_P V_s}{R_a} - \frac{K_a^2 \Phi_P^1}{R_a} \omega_m \tag{6.18}$$

Esta relación lineal, que se ilustra en la figura 6.11, es la *característica par-velocidad* para un motor shunt. Establece que la velocidad se incrementa conforme disminuye la carga en el motor. En la figura 6.11 también se aprecia la potencia que desarrolla la máquina como función de su velocidad. Es posible demostrar que la potencia que desarrolla un motor shunt es máxima cuando su velocidad es igual a 0.5 ω_{mnL}. La expresión correspondiente para la máxima potencia desarrollada por la máquina es

$$P_{dm} = \frac{V_s^2}{4R_a} \tag{6.19}$$

Ejemplo 6.2

Un motor shunt de 240 V toma una corriente de 3.5 A sin carga. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.5 Ω y la resistencia del devanado en derivación del campo es 160 Ω. Cuando el motor trabaja a plena carga a 2 400 rpm, requiere 24 A. Determine *a*) su eficiencia a plena carga, *b*) el par desarrollado y el par útil, *c*) la velocidad sin carga, y *d*) la regulación porcentual de la velocidad. Trace el diagrama de flujo de potencia para cada condición de operación.

- Solución

Condición sin carga:

Corriente del campo shunt:	$I_{fnL} = \dfrac{240}{160} = 1.5$ A
Corriente de la armadura:	$I_{anL} = 3.5 - 1.5 = 2$ A
Fuerza contraelectromotriz:	$E_{anL} = 240 - 2 \times 0.4 = 239.2$ V
Potencia desarrollada:	$P_{dnL} = 239.2 \times 2 = 478.4$ W
Pérdida total en el cobre:	$P_{conL} = 2^2 \times 0.4 + 240 \times 1.5 = 361.6$ W
Potencia de entrada:	$I_{innL} = 240 \times 3.5 = 840$ W

Sin carga, la pérdida por rotación debe ser igual a la potencia desarrollada porque la potencia de salida es igual a cero, como se muestra en la figura 6.12*a*. También se supone que la pérdida por rotación permanece constante para cualquier condición de carga. Por tanto, $P_r = 478.4$ W.

Condición de plena carga:

Potencia de entrada:	$P_{inpc} = 240 \times 24 = 5\,760$ W
Corriente de la armadura:	$I_{apc} = 24 - 1.5 = 22.5$ A
Fuerza contraelectromotriz:	$E_{apc} = 240 - 0.4 \times 22.5 = 231$ V
Potencia desarrollada:	$P_{dpc} = 231 \times 22.5 = 5\,197.5$ W
Potencia de salida:	$P_{opc} = 5\,197.5 - 478.4 = 4\,719.1$ W
Pérdida total en el cobre:	$P_{copc} = 240 \times 1.5 + 22.5^2 \times 0.4 = 562.5$ W

a) Eficiencia del motor: $\eta = \dfrac{4\,719.1}{5\,760} = 0.8193$ u 81.93%

En la figura 6.12*b* se presenta el diagrama de flujo de potencia para la condición de plena carga.

b) El par desarrollado T_{dpc} y el par útil disponible en el eje T_{spc} pueden calcularse como sigue

$$\omega_{mpc} = \frac{2\pi \times 2\,400}{60} = 80\pi \text{ rad/s}$$

$$T_{dpc} = \frac{5\,197.5}{80\pi} = 20.68 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{spc} = \frac{4\,719.1}{80\pi} = 18.78 \text{ N} \cdot \text{m}$$

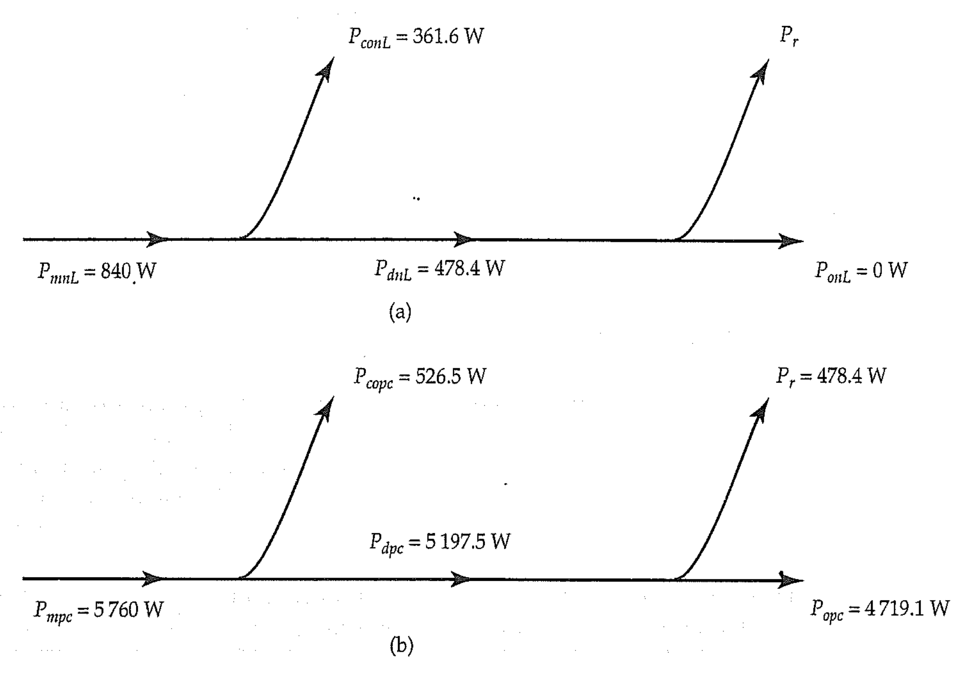


Figura 6.12. Diagramas de flujo de potencia para el ejemplo 6.2, **(a)** sin carga y **(b)** con plena carga.

c) Para un flujo constante en la máquina, la fuerza contraelectromotriz es directamente proporcional a la velocidad del motor. Los datos indican que la velocidad a plena carga es de 2 400 rpm. Por tanto, la velocidad sin carga es

$$N_{mnL} = 2\,400 \times \frac{239.2}{231} \approx 2\,485 \text{ rpm}$$

d) La regulación de la velocidad se obtiene con la ecuación (6.5) como

$$RV\% = \frac{2\,485 - 2\,400}{2\,400} \times 100 = 3.54\%$$

■

Ejercicios

6.4. Compruebe la ecuación 6.19.

6.5. Un motor shunt de 120 V toma 4 A cuando opera a su velocidad sin carga de 1 200 rpm. La resistencia del devanado de su armadura es de 0.8 Ω y la resistencia del campo shunt es de 60 Ω. Determine la eficiencia y la velocidad del motor cuando entrega su carga especificada de 2.4 kW.

6.6. Un motor shunt de 220 V toma 10 A a 1 800 rpm. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.2 Ω y la del devanado del campo es de 440 Ω. La pérdida por rotación es de 180 W. Determine *a*) la fuerza contraelectromotriz, *b*) el par impulsor, *c*) el par en el eje, y *d*) la eficiencia del motor.

6.7. Si el par desarrollado por el motor del ejercicio 6.6 es de 20 N·m, calcule *a*) su velocidad, *b*) la corriente de línea, y *c*) su eficiencia. Suponga que la reacción de la armadura es igual a cero y la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

6.7. Motor compound

Un motor shunt puede tener un devanado del campo en serie adicional, de la misma manera que un generador shunt. El devanado del campo en serie puede conectarse de modo que el flujo que produce apoye al flujo establecido por el devanado del campo shunt, caso en que se trata de un *motor compound cumulativo*. Un motor es *compound diferencial* si el flujo del devanado del campo en serie se opone al flujo del devanado del campo shunt. En realidad, el devanado estabilizador analizado en la sección anterior hace que un motor shunt se comporte como un motor compound cumulativo.

Un motor compound puede conectarse como *motor shunt en derivación corta* o como *motor shunt en derivación larga*. En un motor shunt en derivación larga, el devanado del campo shunt se conecta directamente al suministro, como se muestra en la figura 6.13*b*. Por tanto, el flujo que crea el devanado del campo shunt es constante para cualquier condición de carga. Por otro lado, el devanado del campo shunt de un motor compound en derivación corta se conecta en paralelo con las terminales de la armadura, como se muestra la figura 6.13*a*. El flujo creado por el devanado del campo shunt de un motor shunt en derivación corta disminuye (ligeramente) con el incremento en la carga debido a la caída de voltaje a través del devanado del campo en serie.

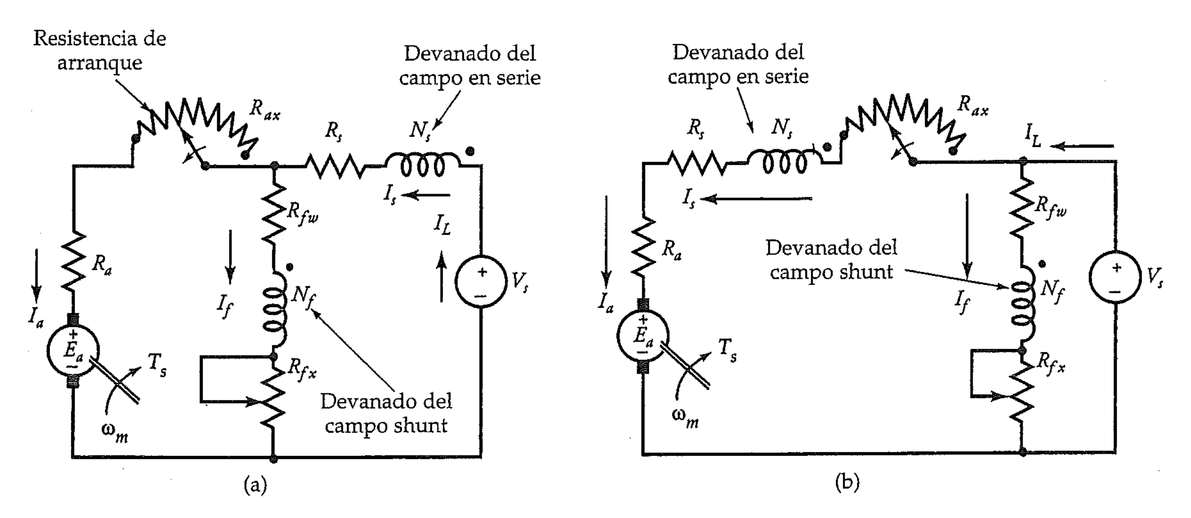


Figura 6.13. Motor compound **(a)** en derivación corta y **(b)** en derivación larga.

Las características de un motor compound son una combinación de las de un motor shunt y las de un motor serie. A medida que se incrementa la carga en un motor compound, ocurre la secuencia de cambios siguiente:

1. El flujo total aumenta/disminuye debido al incremento en la corriente del devanado en serie para un motor compound cumulativo/diferencial. Es decir

$$\Phi_P = \Phi_{sh} \pm k_f I_a \tag{6.20}$$

donde Φ_P es el flujo total en el motor, Φ_{sh} es el flujo debido al devanado del campo shunt y $k_f I_a$ es el flujo producido por el devanado del campo en serie. Obsérvese que el signo menos es para el motor compound diferencial.

2. El aumento/disminución en el flujo con un incremento en la corriente de la armadura ocasiona que el par aumente/disminuya a una tasa más rápida en un motor compound cumulativo/diferencial que en un motor shunt. Esto se basa en el hecho de que el par desarrollado por un motor compound es

$$T_d = K_a I_a \Phi_{sh} \pm K_a k_f I_a^2 \tag{6.21}$$

En la figura 6.14 se muestran las características del par *versus* la corriente de la armadura para los motores compound cumulativos y diferenciales.

3. El incremento/disminución del flujo acompañado por el aumento en la caída de voltaje a través de las resistencias del circuito de la armadura y del devanado del campo en serie ocasionan que la velocidad del motor disminuya/aumente con más rapidez que en un motor shunt. Esto sucede porque la velocidad del motor es

$$\omega_m = \frac{V_s - I_a(R_a + R_s)}{K_a(\Phi_{sh} \pm k_f I_a)} \tag{6.22}$$

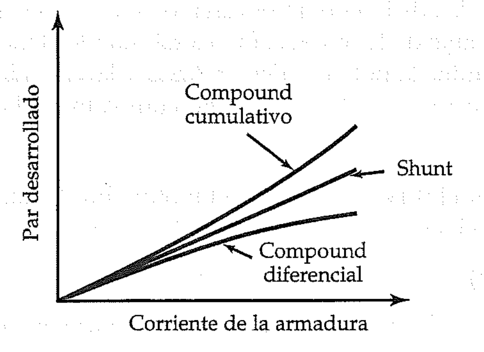


Figura 6.14. Característica par-corriente de motores shunt, compound cumulativo y compound diferencial.

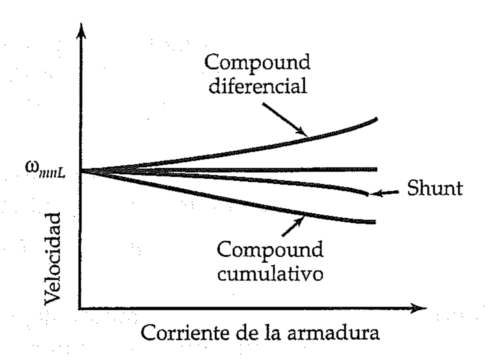


Figura 6.15. Característica velocidad-corriente de motores shunt, compound cumulativo y compound diferencial.

La velocidad *versus* las características de la corriente de la armadura para los motores compound cumulativos y diferenciales se presentan en la figura 6.15.

En un motor compound diferencial el flujo disminuye con el incremento en la corriente de la armadura. Por tanto, existe cierta posibilidad de que un motor compound diferencial alcance una velocidad peligrosamente alta conforme el flujo originado por el devanado del campo en serie se aproxima al flujo creado por el devanado del campo shunt.

Un motor compound cumulativo tiene una velocidad definida sin carga, de modo que no "se desboca" como un motor serie cuando se elimina la carga. También desarrolla un par de arranque elevado cuando la carga se incrementa de forma súbita. Esto lo hace apropiado para aplicaciones como trenes de laminación, cizalladoras y troqueladoras; también se prefiere para aplicaciones (como grúas y elevadores) que *a*) requieran un par de arranque elevado, *b*) sean susceptibles a cambios rápidos de carga y *c*) enfrenten la posibilidad de pasar de la condición de plena carga a otra sin carga.

Ejemplo 6.3

El motor shunt del ejemplo 6.2 se convierte en motor compound en derivación larga mediante la adición de un devanado de campo en serie con una resistencia de 0.1 Ω. Hay un cambio de 12.5% en el flujo total cuando el motor compound desarrolla el mismo par. Determine la potencia desarrollada y la velocidad del motor compound cuando se conecta como *a*) motor compound cumulativo y *b*) motor compound diferencial.

• Solución

Sea Φ_P el flujo por polo en el motor shunt cuando desarrolla un par de 20.68 N·m a una velocidad de 2 400 rpm (80π rad/s).

a) *Motor compound cumulativo*

Cuando el devanado del campo en serie se conecta para formar un motor compound cumulativo en derivación larga, el flujo total por polo en el motor es $\Phi_{Pc} = 1.125\ \Phi_P$. Puesto que el par desarrollado es proporcional al pro-

ducto del flujo total en el motor y la corriente de la armadura, esta corriente, que es la de un motor compound cumulativo en derivación larga, puede calcularse como

$$I_{ac} = \frac{I_a \Phi_P}{\Phi_{Pc}} = \frac{22.5}{1.125} = 20 \text{ A}$$

A continuación pueden calcularse las otras cantidades que interesan:

Fuerza contraelectromotriz: $E_{ac} = 240 - 20(0.4 + 0.1) = 230$ V

Potencia desarrollada: $P_{dc} = 230 \times 20 = 4\,600$ W

Velocidad: $\omega_{mc} = \dfrac{4\,600}{20.68} = 222.437$ rad/s o 2124 rpm

Es evidente (véase la fig. 6.15) que un motor compound cumulativo desarrolla el mismo par a velocidad más baja (2 124 rpm) que la de un motor shunt (2 400 rpm).

b) *Motor compound diferencial*

En el caso del motor compound diferencial en derivación larga, el flujo total por polo en el motor es $\Phi_{Pd} = 0.875\ \Phi_P$. La corriente de la armadura del motor compound diferencial en derivación larga puede calcularse como

$$I_{ad} = \frac{I_a \Phi_P}{\Phi_{Pd}} = \frac{22.5}{0.875} = 25.714 \text{ A}$$

A continuación pueden calcularse las otras cantidades que interesan:

Fuerza contraelectromotriz: $E_{ad} = 240 - 25.714(0.4 + 0.1)$
$= 227.143$ V

Potencia desarrollada: $P_{dd} = 227.143 \times 25.714 = 5\,840.755$ W

Velocidad: $\omega_{mc} = \dfrac{5\,840.755}{20.68}$
$= 282.435$ rad/s o 2 697 rpm

De la figura 6.15 resulta evidente que un motor compound diferencial desarrolla el mismo par a una velocidad más alta (2 697 rpm) que la de un motor shunt (2 400 rpm).

Ejercicios

6.8. Un motor compound cumulativo en derivación larga, de 230 V y 1 800 rpm tiene una resistencia del campo shunt de 460 Ω, resistencia del campo serie de

0.2 Ω y resistencia del circuito de la armadura de 1.3 Ω. La corriente de línea a plena carga es de 10.5 A. La pérdida por rotación es 5% de la potencia desarrollada. Calcule la eficiencia del motor a plena carga.

6.9. En el motor del ejercicio 6.8, la corriente de línea aumenta a 15.5 A al incrementarse la carga. Suponga que hay un aumento de 20% en el flujo en el motor debido al incremento en la corriente de línea. Calcule *a*) la velocidad del motor y *b*) su eficiencia.

6.8. Métodos para el control de la velocidad

La principal razón por la que se utilizan con gran frecuencia motores de cc en el diseño de sistemas de control es la facilidad con que su desempeño se adapta para satisfacer las demandas del sistema. Expresado de manera distinta: un motor de cc permite modificar su velocidad a cualquier par conveniente sin efectuar ningún cambio en su construcción.

Los dos métodos más utilizados para obtener el control de la velocidad son el de *control de la resistencia de la armadura* y el *control del campo.*

Control de la resistencia de la armadura

Con este método, el control de la velocidad se logra insertando una resistencia R_c en el circuito de la armadura de un motor shunt, serie o compound, como se ilustra en la figura 6.16. En un motor shunt o compound, el devanado del campo se conecta directamente al voltaje pleno de línea. La resistencia adicional en el circuito de la armadura reduce la fuerza contraelectromotriz en el motor para cualquier corriente de la armadura que se requiera. Puesto que el flujo en el motor es constante y el par depende de la corriente de la armadura, la disminución en la fuerza contraelectromotriz da lugar a una caída en la velocidad del motor.

La velocidad de un motor de cc puede expresarse en términos de la corriente de su armadura, como

$$\omega_m = \frac{V_s - I_a R}{K_a \Phi_P} \tag{6.23}$$

donde $$R = R_a + R_s + R_c$$

para un motor serie o uno compound, y

$$R = R_a + R_c$$

para un motor shunt.

De la ecuación anterior resulta evidente que cualquier incremento en el valor de la resistencia de control R_c disminuye la velocidad del motor. *El método de control de la resistencia de la armadura, en consecuencia, resulta apropiado para operar al motor a velocidad más baja que la especificada, al tiempo que se mantiene el par desarrollado.* En la figura 6.17

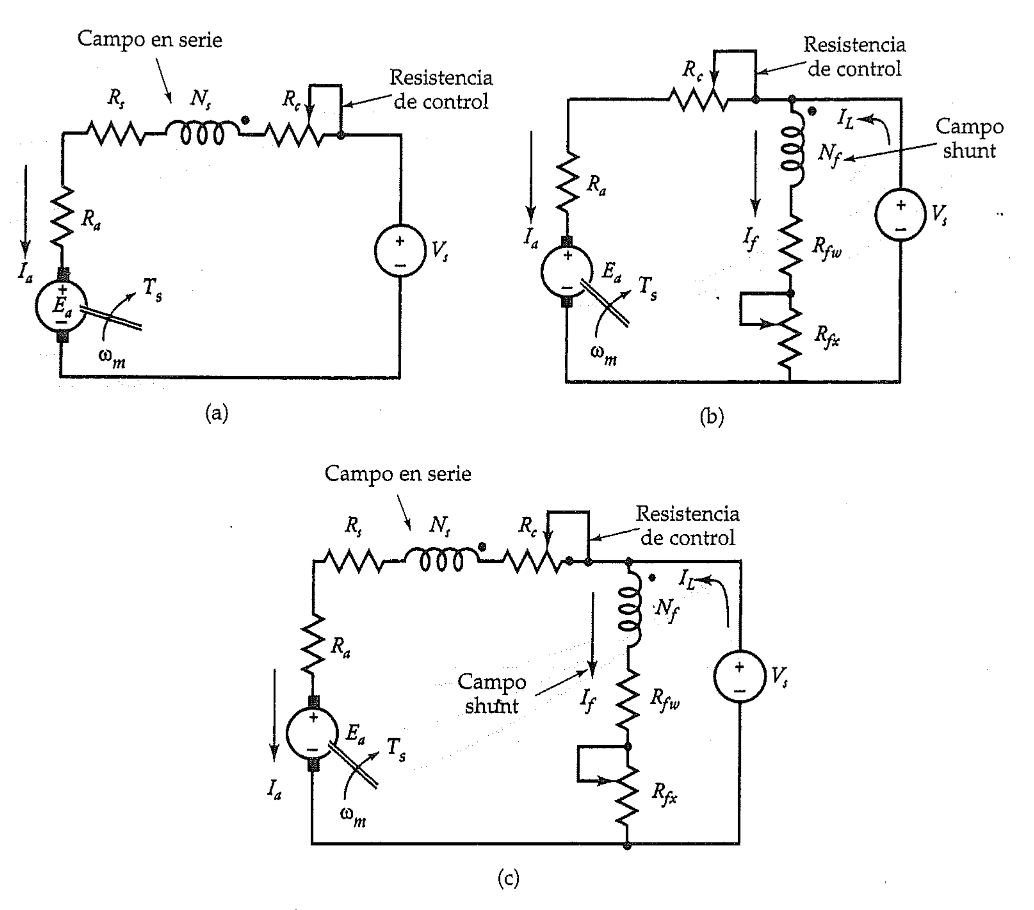


Figura 6.16. Control de la resistencia en la armadura para motores **(a)** serie, **(b)** shunt y **(c)** compound.

se ilustran las características velocidad-par de motores serie, shunt y compound para distintos valores de la resistencia de control. De hecho, las resistencias de arranque también pueden utilizarse para propósitos de control de la velocidad, como se mostró en los circuitos equivalentes de los motores de cc.

Las desventajas de este método de control de la velocidad son las siguientes:

a) Pérdida de potencia considerable en la resistencia de control R_c.
b) Disminución en la eficiencia del motor.
c) Deficiente regulación de la velocidad de los motores shunt y compound.

En esencia, el método de control de la resistencia de la armadura se basa en la reducción del voltaje aplicado a las terminales de la armadura de un motor de cc. Por tanto, debe ser posible controlar la velocidad de un motor de cc con la simple conexión de su armadura a una fuente de voltaje variable. Este método de control de la velocidad se conoce como *método Ward-Leonard* y se estudia en la sección próxima.

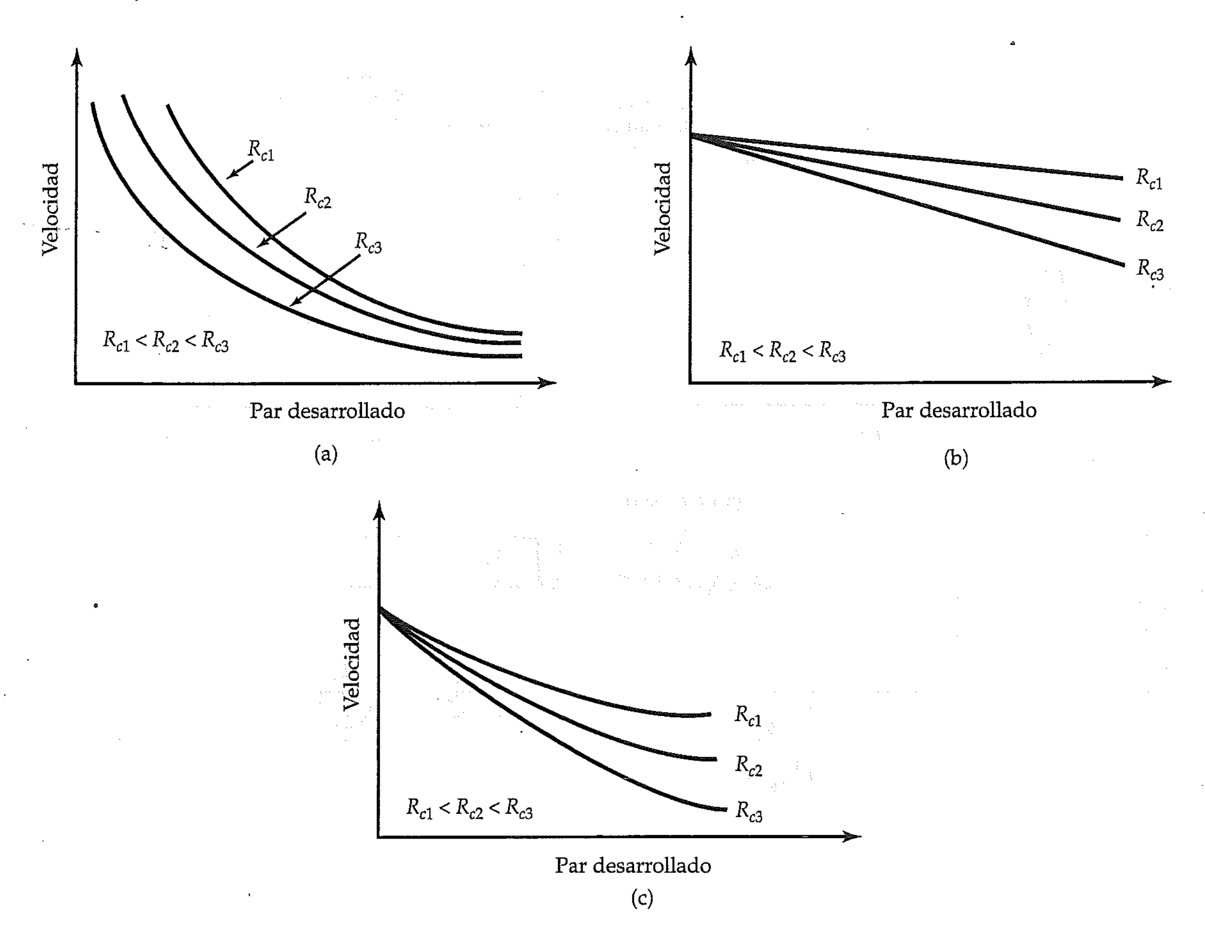


Figura 6.17. Característica velocidad-par que muestra el efecto de resistencia adicional en el circuito de la armadura para motores **(a)** serie, **(b)** shunt y **(c)** compound.

Ejemplo 6.4

Un motor shunt de 120 V y 2 400 rpm tiene una resistencia de la armadura de 0.4 Ω y una resistencia del campo shunt de 160 Ω. El motor opera a su velocidad especificada a plena carga y toma 14.75 A. La corriente sin carga es de 2 A. Si se inserta una resistencia externa de 3.6 Ω en el circuito de la armadura sin cambio alguno en el par desarrollado, calcule la velocidad del motor, la pérdida de potencia en la resistencia externa y la eficiencia del motor. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

- Solución

La corriente del campo: $I_f = 120/160 = 0.75$ A

De los datos *sin carga* se tiene:

$$I_a = 2 - 0.75 = 1.25 \text{ A}$$

$$E_{anL} = 120 - 1.25 \times 0.4 = 119.5 \text{ V}$$

$$P_{dnL} = 119.5 \times 1.25 = 149.38 \text{ W}$$

La potencia desarrollada sin carga explica la pérdida por rotación en el motor.
De los datos a *plena carga* se tiene:

$$I_{apc} = 14.75 - 0.75 = 14 \text{ A}$$

$$E_{apc} = 120 - 14 \times 0.4 = 114.4 \text{ V}$$

$$P_{dpc} = 114.4 \times 14 = 1\,601.6 \text{ W}$$

$$N_{mpc} = 2\,400 \text{ rpm}$$

Por tanto, la velocidad sin carga es: $N_{mnL} = \dfrac{119.5}{114.4} \times 2\,400 \approx 2\,507$ rpm

La pérdida por rotación a plena carga: $P_{rpc} = \dfrac{2\,400}{2\,507} \times 149.38 = 143$ W

La potencia de salida es: $P_{opc} = 1\,601.6 - 143 = 1\,458.6$ W

La potencia de entrada es: $P_{inpc} = 120 \times 14.75 = 1\,770$ W

Luego, la eficiencia es: $\eta = \dfrac{1\,458.6}{1770} = 0.824$ u 82.4%

Con *una resistencia externa en el circuito de la armadura y ningún cambio en el par desarrollado:*

$$I_{an} = I_{apc} = 14 \text{ A}$$

$$E_{an} = 120 - 14 \times (0.4 + 3.6) = 64 \text{ V}$$

$$P_{dn} = 64 \times 14 = 896 \text{ W}$$

$$N_{mn} = \frac{64}{114.4} \times 2\,400 \approx 1343 \text{ rpm}$$

$$P_{rn} = \frac{1343}{2\,507} \times 149.38 = 80 \text{ W}$$

La potencia de salida y la eficiencia son

$$P_{on} = 896 - 80 = 816 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{816}{1\,770} = 0.461 \qquad \text{o} \qquad 46.1\%$$

La pérdida de potencia en la resistencia externa es: $P_c = 14^2 \times 3.6 = 705.6$ W

La pérdida porcentual de potencia es: $\dfrac{705.6}{1\,770} \times 100 = 39.86\%$

De este ejemplo resulta evidente que *a*) un porcentaje alto de la potencia que se suministra al motor se pierde en la resistencia de control, *b*) la eficiencia decrece en forma considerable, y *c*) la velocidad se ha reducido a la mitad de su valor especificado. Se deja al lector la comprobación de que no hay cambio en el par que desarrolla el motor.

■

Ejercicios

6.10. Un motor shunt de 240 V y 1 800 rpm tiene $R_a = 2.5\ \Omega$ y $R_f = 160\ \Omega$. Cuando trabaja a plena carga y a su velocidad especificada, toma 21.5 A de la fuente. ¿Qué resistencia debe colocarse en serie con la armadura a fin de reducir su velocidad a 450 rpm si se conserva el mismo par que desarrolla el motor?

6.11. Un motor serie de 20 hp y 440 V tiene una eficiencia de 87% cuando entrega su carga especificada a 900 rpm. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.3 Ω y la resistencia del campo serie es de 0.2 Ω. Si se introduce una resistencia externa de 2.5 Ω en el circuito de la armadura y se reduce la carga en 20%, determine la velocidad del motor. Suponga que el motor opera en la región lineal.

6.12. Un motor serie de 120 V toma 20 A al tiempo que entrega su carga especificada a 1 600 rpm. La resistencia de la armadura es de 0.5 Ω y la del campo en serie es de 0.3 Ω. Calcule la resistencia que debe agregarse para obtener el par especificada *a*) a 1 600 rpm y *b*) a 1 200 rpm.

Método de control del campo

Otro procedimiento para controlar la velocidad de un motor de cc implica el control de la corriente del campo, que a su vez controla el flujo en el motor. La corriente en el campo en un motor shunt puede controlarse introduciendo una resistencia exter-

na en serie con el devanado del campo. Debido a que la corriente del campo es una fracción muy pequeña de la corriente total que consume un motor shunt, la potencia que disipa la resistencia externa es relativamente pequeña. Por tanto, el método de control del flujo es mejor desde el punto de vista económico que el de control de la resistencia de la armadura.

Para controlar el flujo en un motor serie, se conecta una resistencia desviadora para el campo, en paralelo con el devanado del campo en serie. Si todas las bobinas de un devanado del campo en serie están conectadas en serie, también puede cambiarse el flujo en un motor serie si se conectan (las bobinas) en paralelo.

La adición de una resistencia en serie con el devanado del campo shunt o en paralelo con el devanado del campo en serie ocasiona la disminución de la corriente en el campo y, con ella, la reducción en el flujo del motor. Como la velocidad de un motor es inversamente proporcional a su flujo, una disminución de éste produce un incremento en su velocidad. En consecuencia, *el método de control del flujo permite que un motor opere a una velocidad más alta que la especificada (nominal).*

Como el par desarrollado por un motor shunt es proporcional al producto de la corriente de la armadura y el flujo por polo, una disminución del flujo debe acompañarse por el aumento correspondiente en la corriente de la armadura para que el motor entregue el mismo par. Por consiguiente, este método de control de la velocidad resulta insatisfactorio para motores compound, ya que cualquier disminución del flujo producido por el devanado del campo shunt se contrarresta por un aumento del flujo producido por el devanado del campo en serie originado por el aumento en la corriente de la armadura.

Ejemplo 6.5

Si en el motor shunt del ejemplo 6.4 se introduce una resistencia externa de 80 Ω en serie con el devanado del campo shunt, en vez de hacerlo en el circuito de la armadura, calcule *a*) la velocidad del motor, *b*) la pérdida de potencia en la resistencia externa, y *c*) la eficiencia. Suponga que el flujo es proporcional a la raíz cuadrada de la corriente en el devanado del campo y que el motor desarrolla el mismo par.

- Solución

La nueva corriente en el devanado del campo es

$$I_{fn} = \frac{120}{160 + 80} = 0.5 \text{ A}$$

Sea Φ_P el flujo a plena carga con la corriente del campo igual a 0.75 A, y Φ_{Pn} el flujo cuando la corriente en el campo es de 0.5 A. El flujo nuevo en el motor es

$$\Phi_{Pn} = \sqrt{\frac{0.5}{0.75}}\,\Phi_P = 0.8165\,\Phi_P$$

Para que el par desarrollado sea el mismo, la nueva corriente de la armadura debe ser

$$I_{an} = \frac{\Phi_P}{\Phi_{Pn}} I_a = \frac{1}{0.8165} \times 14 = 17.15 \text{ A}$$

Luego, la nueva fuerza contraelectromotriz del motor es

$$E_{an} = 120 - 17.15 \times 0.4 = 113.14 \text{ V}$$

a) Por tanto, la nueva velocidad del motor es

$$N_{mn} = \frac{\Phi_P E_{an}}{\Phi_{Pn} E_a} N_m = \frac{113.14 \times 2\,400}{0.8165 \times 114.4} \approx 2\,907 \text{ rpm}$$

b) La pérdida de potencia en la resistencia externa es

$$P_{fx} = 0.5^2 \times 80 = 20 \text{ W}$$

c) La potencia de entrada es: $P_{in} = 120 \times (17.15 + 0.5) = 2\,118$ W

La potencia desarrollada es: $P_{dn} = 113.14 \times 17.15 = 1\,940.35$ W

Para determinar la eficiencia se necesita información acerca de las pérdidas por rotación. Se espera que el motor tenga una menor pérdida en el núcleo producida por la reducción del flujo, pero mayores pérdidas por fricción y viento debidas al aumento de velocidad. Es posible que un tipo de pérdida contrarreste a otro. Si se supone que la pérdida por rotación es la misma que para 2 400 rpm, la potencia de salida es

$$P_o = 1\,940.35 - 143 = 1\,797.35 \text{ W}$$

Luego, $\eta = \frac{1\,797.35}{2118} = 0.849$ u 84.9%

■

Ejercicios

6.13. Un motor shunt de 220 V, cuya curva de magnetización se muestra más adelante, opera a una velocidad de 1 200 rpm. La resistencia del devanado del

campo es de 40 Ω. Determine la resistencia que debe introducirse en serie con el devanado del campo para incrementar la velocidad a 1 800 rpm sin carga.

I_f (A)	1	2	3	4	5	6
Φ_P (mWb)	4.5	8	10	11	11.6	12.2

6.14. Un motor serie de 120 V trabaja a 2 000 rpm a plena carga y toma una corriente de 12 A. La resistencia del devanado de la armadura es de 0.3 Ω y la del campo en serie de 0.2 Ω. Se conecta una resistencia desviadora de 0.2 Ω en paralelo con el campo en serie, y se ajusta la carga del motor. Si el motor toma 20 A en estas condiciones, ¿cuál es la velocidad nueva del motor? Calcule el par desarrollado en cada caso.

6.15. Un motor shunt de 440 V tiene una resistencia de la armadura de 0.5 Ω. La corriente del campo es de 2 A. El motor toma una corriente de 22 A a plena carga. Determine la reducción porcentual en su flujo si el motor tiene que desarrollar el mismo par con el doble de velocidad.

6.9. El sistema Ward-Leonard

Un examen crítico del método de control de la resistencia de la armadura revela que la introducción de una resistencia externa en serie con el circuito de la armadura equivale a aplicar un voltaje menor que el especificado a las terminales de la armadura. Por tanto, debe resultar evidente que es posible lograr el mismo efecto aplicando un voltaje reducido a las terminales de la armadura de un motor de cc, en tanto que el voltaje a través del devanado del campo shunt de un motor compound o shunt se mantiene constante. Este método de control de la velocidad se conoce como *control del voltaje de la armadura*. La ventaja de este método es que elimina la excesiva pérdida de potencia inherentemente asociada con el control de la resistencia de la armadura. La desventaja principal es que requiere dos fuentes de energía para controlar la velocidad de un motor shunt o compound.

El sistema Ward-Leonard para controlar la velocidad descansa en el método de control del voltaje de la armadura. Para controlar la velocidad de un motor de cc, este sistema precisa dos generadores y un motor de ca. El motor trifásico de ca actúa como impulsor primario que mueve ambos generadores, como se ilustra en la figura 6.18. Un generador, llamado *excitador*, suministra un voltaje constante que se aplica a los devanados del campo del otro generador con excitación independiente y el motor con excitación independiente bajo control, como se muestra. El devanado de la armadura del motor está conectado permanentemente a las terminales de la armadura del otro generador, cuyo voltaje puede variarse modificando su corriente del campo. El voltaje variable de la armadura proporciona los medios con los que puede controlarse la velocidad del motor.

La velocidad del motor es alta cuando el voltaje en el generador es alto. Para que el voltaje en el generador sea alto, se requiere que la resistencia total en su circuito

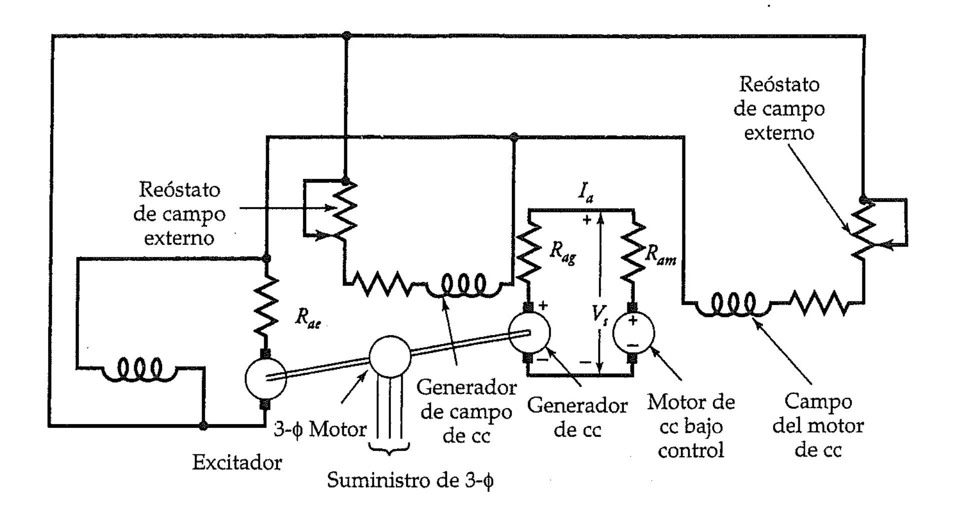


Figura 6.18. Sistema Ward-Leonard para controlar la velocidad.

del campo sea baja. Por otro lado, una resistencia elevada en el circuito del campo del generador ocasiona un voltaje bajo en el generador y con esto una velocidad baja del motor. En otras palabras, con el simple control de la corriente en el devanado del campo del generador de cc puede conseguirse un control ilimitado en la velocidad de un motor de cc.

Debe resultar evidente que se necesita un conjunto de tres máquinas para controlar la velocidad de un motor de cc. El sistema es costoso, pero se utiliza cuando se desea lograr un control excepcionalmente amplio y muy sensible de la velocidad. Este sistema ofrece un control excelente sin etapas y es muy apropiado para aplicaciones como ascensores de pasajeros, malacates para minas y excavadoras eléctricas, por citar algunas.

Ejemplo 6.6

Un motor shunt de 120 V tiene una resistencia de la armadura de 0.3 Ω y se usa como motor con excitación independiente en un sistema Ward-Leonard. La corriente del campo del motor está ajustada a 1.2 A. El voltaje de salida del excitador es de 120 V. El generador de cc tiene 200 vueltas por polo y trabaja a una velocidad de 1 200 rpm. En la figura 5.26 se muestra la curva de magnetización del generador. La resistencia del devanado del campo del generador es de 30 Ω y la resistencia de su armadura es de 0.2 Ω. Determine la resistencia externa en el circuito del devanado del campo del generador cuando el motor desarrolla *a*) un par de 30 N · m a 2 000 rpm y toma 50 A

y *b*) el mismo par pero a una velocidad reducida de 715 rpm. Desprecie el efecto de desmagnetización que ocasiona la reacción de la armadura.

- Solución

a)
$$\omega_m = \frac{2\,000 \times 2 \times \pi}{60} = 209.44 \text{ rad/s}$$

La potencia que desarrolla el motor es: $P_d = 30 \times 209.44 = 6\,283.2$ W
La fuerza contraelectromotriz del motor es: $E_{am} = 6\,283.2/50 = 125.66$ V
El voltaje aplicado a las terminales de la armadura del motor es:

$$V_s = 125.66 + 50 \times 0.3 = 140.66 \text{ V}$$

La fem inducida del generador debe ser

$$E_{ag} = 140.66 + 50 \times 0.2 = 150.66 \text{ V}$$

A partir de la curva de magnetización, la corriente del campo correspondiente es, aproximadamente, de 1.75 A. La resistencia total en el circuito del campo del generador de cc es

$$R_f = \frac{120}{1.75} = 68.57\ \Omega$$

Luego, la resistencia externa es

$$R_{ax} = 68.57 - 30 = 38.57\ \Omega$$

b) Puesto que el par desarrollado es el mismo, la corriente de la armadura del motor también debe ser la misma. Sin embargo, la nueva fuerza contraelectromotriz del motor es

$$E_{amn} = \frac{125.66 \times 715}{2\,000} = 44.92 \text{ V}$$

El nuevo voltaje en las terminales de la armadura del motor es

$$V_{sn} = 44.92 + 50 \times 0.3 = 59.92 \text{ V}$$

La nueva fem inducida en el generador debe ser

$$E_{agn} = 59.92 + 50 \times 0.2 = 69.92 \text{ V}$$

Con base en la curva de magnetización, la corriente correspondiente del campo es de 0.4 A. Por tanto, la resistencia total en el circuito del campo del generador en estas condiciones debe ser de

$$R_{fn} = \frac{120}{0.4} = 300 \ \Omega$$

Por ende, la resistencia externa debe ajustarse a un valor de

$$R_{axn} = 300 - 30 = 270 \ \Omega$$

■

Ejercicios

6.16. Repita el ejemplo 6.6 cuando el efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura equivale a 80% de la corriente en ella.

6.17. Un motor serie con $R_a = 0.6 \ \Omega$ y $R_s = 0.4 \ \Omega$ se usa en un sistema Ward-Leonard. El voltaje en las terminales de la armadura del motor es de 280 V cuando trabaja a una velocidad de 2 500 rpm y toma 25 A. El motor mueve un ventilador cuyo par varía con el cuadrado de la velocidad. Si la velocidad del motor se disminuye a 2 000 rpm, ¿cuál debe ser el voltaje en las terminales de la armadura del motor? Suponga que el motor opera en la región lineal. La curva de magnetización que se muestra en la figura 5.21 se aplica al generador. Determine la corriente del campo en cada caso. La resistencia del circuito de la armadura del generador es de 0.8 Ω.

6.10. Mediciones del par

Los dos métodos más comunes para medir el par de un motor de cc son la *prueba con el freno prony* y la *prueba con el dinamómetro.*

Prueba con el freno prony

El método más común para medir el par y la eficiencia de un motor se llama *prueba con el freno prony*. En la figura 6.19 se muestra el arreglo básico de la prueba. En este

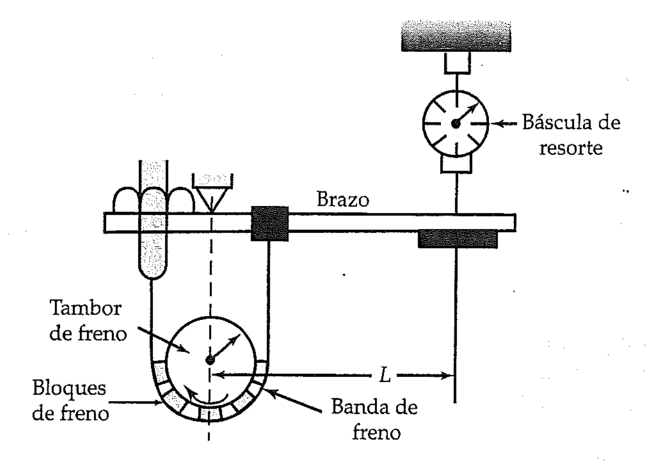


Figura 6.19. Prueba con el freno prony.

método, sobre el eje del motor se monta una polea que actúa como tambor de freno, alrededor del cual se enrolla una banda para freno con o sin bloques de freno, según se ilustra. Un extremo de la banda de freno sujeta en forma permanente al brazo de torsión, y el otro extremo se regula por medio de un tornillo para ajuste manual con la finalidad de tensarlo contra la superficie del tambor de freno. Para motores de potencia elevada puede ser necesario enfriar el tambor de freno.

La banda de freno se tensa paulatinamente hasta que el motor opera a su velocidad especificada. A la tendencia del brazo de torsión a moverse con el tambor se opone la fuerza de la báscula de resorte sujeta al extremo lejano del brazo de torsión. Es posible calibrar la deflexión del resorte en términos de unidades de fuerza o en unidades de par. Si la calibración se efectúa en unidades de fuerza, el par es el producto de la fuerza por la longitud efectiva del brazo de torsión. La longitud efectiva no es otra que la distancia entre el centro de la polea y el punto en el que se sujeta la báscula de resorte.

En la explicación hemos supuesto que el brazo de torsión está en posición perfectamente horizontal antes de comenzar la prueba y que el peso muerto del brazo es igual a cero. En la práctica, el peso muerto (tara) del brazo de torsión ha de tenerse en cuenta, como lo ilustra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6.7

Se prueba un motor de 120 V y 0.75 hp a 2 400 rpm utilizando la prueba con el freno prony. La corriente admitida es de 7 A y la fuerza de deflexión en el resorte es de 4.57 N. La longitud efectiva del brazo de torsión es de 50 cm y su peso muerto es de 0.03 N. Calcule el par y la eficiencia del motor.

• Solución

Fuerza neta sobre el resorte: $F = 4.57 - 0.03 = 4.54$ N
Par en el eje del motor: $T_s = 4.54 \times 0.5 = 2.27$ N · m
La velocidad angular del eje es

$$\omega_m = \frac{2\pi \times 2\,400}{60} = 251.33 \text{ rad/s}$$

La potencia de salida es: $P_o = 2.27 \times 251.33 = 570.52$ W
La potencia de entrada es: $P_{in} = 120 \times 7 = 840$ W
Por tanto, la eficiencia del motor es

$$\eta = \frac{570.52}{840} = 0.679 \quad \text{o} \quad 67.9\%$$

■

En la figura 6.20 se muestra una variación de la prueba con el freno prony. La cuerda se enrolla alrededor de la polea y sus extremos se sujetan a dos básculas de resorte, como se ilustra. Para el sentido de giro que se muestra, la fuerza F_1 es mayor que la fuerza F_2. La fuerza de tracción en la llanta de la polea es $F_1 - F_2$. El par en el eje es

$$T_s = (F_1 - F_2)a \tag{6.24}$$

donde a es el radio de la polea.

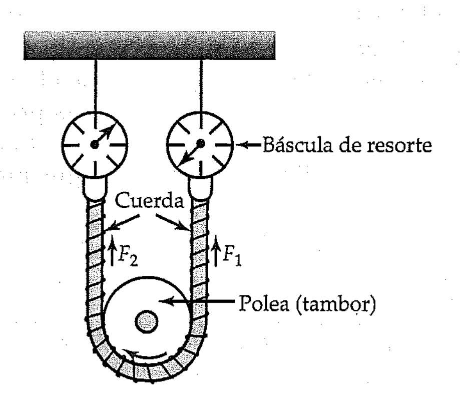


Figura 6.20. Prueba de la cuerda.

Método del dinamómetro

Las desventajas de la prueba con el freno prony son las vibraciones que ocasionan los bloques de freno y la necesidad de enfriar constantemente el tambor de freno. Tales inconvenientes se superan mediante un dispositivo eléctrico para medir el par, conocido como *dinamómetro*. Un dinamómetro es una máquina de cc con devanado de campo excitado independientemente. La única diferencia entre un motor de cc y un dinamómetro es que el estator de este último también tiene libertad para girar, mientras que en un motor de cc es rígido. La máquina se monta sobre rodamientos de bolas de baja fricción. En el exterior del estator de un dinamómetro se fija un brazo de torsión y el otro lado del brazo se fija a una báscula de resorte, como se muestra en la figura 6.21.

La armadura del dinamómetro se hace girar por acoplamiento con el eje del motor que se prueba. La rotación de las bobinas de la armadura en un campo magnético uniforme ocasiona una fem inducida en ellas (acción generadora). Si el circuito de la armadura se completa con la conexión de las bobinas de la armadura a una carga resistiva, fluirá una corriente en el devanado de la armadura. La magnitud de esta corriente depende de la fem inducida y de la resistencia de la carga. Los conductores que transportan corriente en un campo magnético uniforme experimentan una fuerza que actúa sobre ellos (acción motora). La dirección de la fuerza es tal que tiende a oponerse a la rotación de la armadura. Debido a que el estator, que aloja los devanados del campo, tiene libertad para girar, también está sujeto a tracción por la acción motora. La única fuerza de oposición que actúa sobre el estator la provee la báscula de resorte, en forma muy parecida a la prueba con el freno prony. Por medio del control del flujo en el motor, es posible controlar la velocidad de éste y hacerlo trabajar a la velocidad deseada.

Ejemplo 6.8

Un motor de 5 hp con especificación de 1 200 rpm se prueba en un dinamómetro cuyo brazo de torsión tiene 40 cm de longitud. Si se calibra la báscula de resorte en términos de la fuerza, ¿cuál debe ser la lectura en ella?

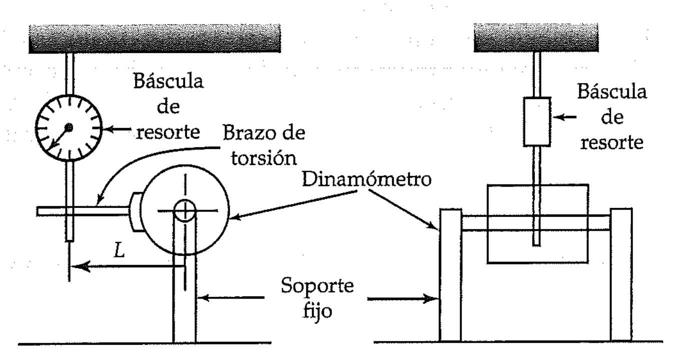


Figura 6.21. Colocación del dinamómetro para probar un motor de corriente continua.

• Solución

La potencia de salida es: $P_o = 5 \times 746 = 3\,730$ W
La velocidad angular del eje es

$$\omega_m = \frac{2\pi \times 1200}{60} = 125.66 \text{ rad/s}$$

El par disponible en el eje es

$$T_s = \frac{3\,730}{125.66} = 29.68 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La lectura de fuerza en la báscula es

$$F = \frac{29.68}{0.4} = 74.2 \text{ N}$$

Si la báscula está calibrada en kilogramos, la lectura será de 74.2/9.81 = 7.564 kg.

■

Ejercicios

6.18. En la prueba de un motor shunt con el freno prony, las lecturas del amperímetro y del voltímetro que indican las cantidades de entrada son de 35 A y 220 V, respectivamente. La velocidad del motor es de 900 rpm. La báscula en un brazo de 50 cm muestra una lectura de 12 kg. El peso muerto del brazo es de 0.8 kg. Determine *a*) la potencia de salida del motor y *b*) la eficiencia.

6.19. En una prueba de freno con cuerda, las lecturas en las dos básculas son 12.6 y 2.4 kg. El diámetro de la polea es de 20 cm. Si la velocidad del motor es de 900 rpm, determine sus caballos de fuerza.

6.20. En la prueba de un motor shunt con un dinamómetro, las lecturas del amperímetro y del voltímetro fueron de 120 V y 20 A. La velocidad del motor fue de 1 200 rpm. La lectura de la báscula fue de 3.9 kg. Si la longitud del brazo de torsión es de 40 cm, calcule *a*) la especificación de los caballos de fuerza y *b*) la eficiencia del motor.

6.11. Frenado o inversión de marcha en motores de cc

En ciertas aplicaciones quizá sea necesario detener rápidamente el motor o invertir su dirección de rotación. El motor puede detenerse por medio de un *freno de fricción*.

Las desventajas del freno de fricción son que la operación es *a*) difícil de controlar, *b*) dependiente de la superficie de frenado, y *c*) no es suave.

Por tanto, es deseable usar otros medios para frenar o invertir la dirección de rotación de un motor de cc. Los tres métodos comúnmente usados son el *bloqueo*, el *frenado dinámico* y el *frenado regenerativo*.

Bloqueo

Detener o invertir la dirección de un motor de cc con la sencilla inversión de las conexiones de suministro en las terminales de la armadura se conoce como *bloqueo* o *frenado por contracorriente*. Las conexiones del devanado del campo para los motores shunt permanecen sin alteración. Este método se emplea para controlar los motores de cc en ascensores, trenes de laminación, prensas para imprimir y máquinas-herramienta, por citar solamente algunos ejemplos.

Justo antes del bloqueo, la fuerza contraelectromotriz en el motor se opone al voltaje aplicado por la fuente. Puesto que la resistencia de la armadura generalmente es muy pequeña, la fuerza contraelectromotriz es casi igual y opuesta al voltaje aplicado. En el instante en que se bloquea el motor, la fuerza contraelectromotriz y el voltaje aplicado están en la misma dirección. Por tanto, el voltaje total en el circuito de la armadura es casi el doble del voltaje aplicado. Para proteger el motor de un aumento súbito en la corriente de la armadura debe agregarse una resistencia externa en serie con el circuito de la armadura. En la figura 6.22 se ilustran las conexiones del circuito para motores shunt y serie, en sus formas más sencillas.

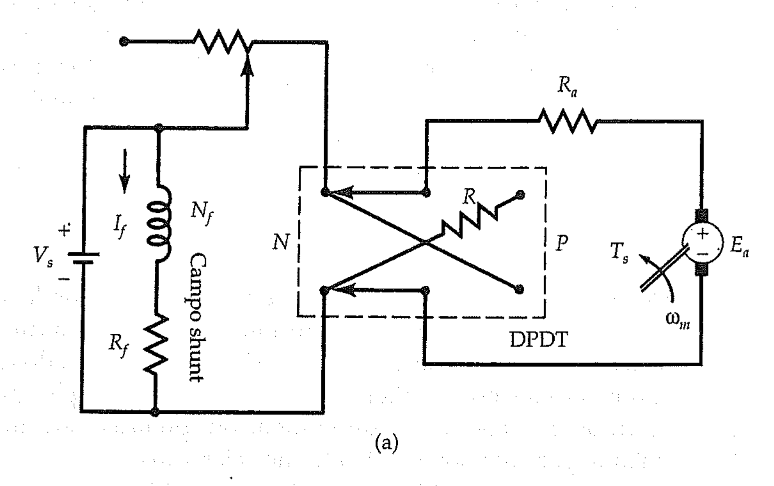
A medida que la corriente en el devanado de la armadura invierte su dirección, produce una fuerza que tiende a hacer girar la armadura en dirección opuesta a su rotación inicial. Esto ocasiona que el motor disminuya su velocidad, se detenga y luego adquiera velocidad en la dirección opuesta. Por tanto, el bloqueo permite invertir la dirección de giro de un motor. Esta técnica también puede utilizarse para detener el motor con la simple desconexión de la energía que recibe el motor cuando alcanza el estado de reposo. Para mayor seguridad, puede aplicarse frenado mecánico cuando el motor se acerca al estado de reposo.

En cualquier momento durante la acción del bloqueo la corriente es

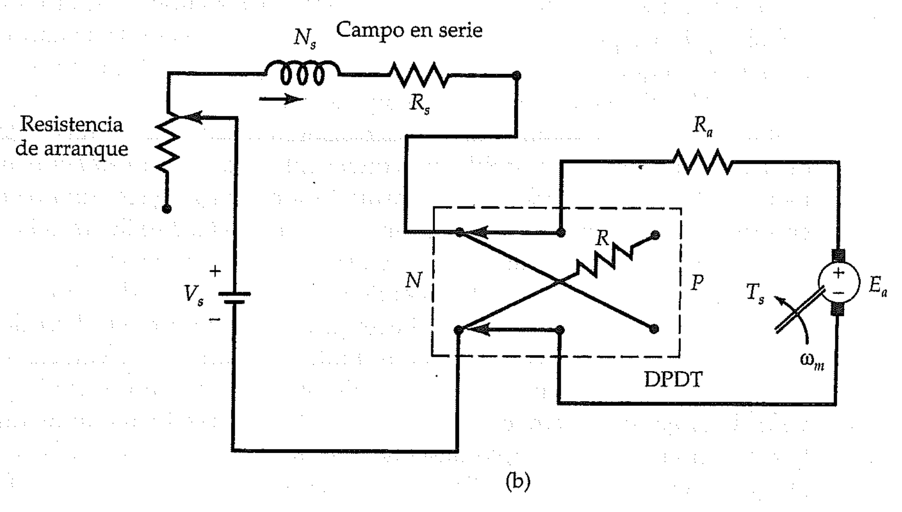
$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_s + E_a}{R + R_a} = \frac{V_s}{R + R_a} + \frac{E_a}{R + R_a} \\ &= \frac{V_s}{R + R_a} + \frac{K_a \Phi_P \omega_m}{R + R_a} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Por tanto, el par de frenado es

$$\begin{aligned} T_b &= K_a I_a \Phi_P \\ &= K_1 \Phi_P + K_2 \Phi_P^2 \omega_m \end{aligned} \tag{6.26}$$



(a)



(b)

Figura 6.22. Bloqueo de un motor **(a)** shunt y **(b)** serie.

donde

$$K_1 = \frac{K_a V_s}{R + R_a} \quad \text{y} \quad K_2 = \frac{K_a^2}{R + R_a}$$

Para el motor serie, el flujo también depende de la corriente de la armadura, la cual depende a su vez de la velocidad del motor. Puesto que el flujo en un motor shunt es constante, la ecuación anterior se convierte en la siguiente:

$$T_b = K_3 + K_4 \omega_m \tag{6.27}$$

donde $$K_3 = K_1\Phi_P \quad \text{y} \quad K_4 = K_2\Phi_P^2$$

De la ecuación anterior, resulta evidente que aun cuando un motor shunt se acerque a una velocidad de cero, existirá cierto par de frenado, $T_b = K_3$. Si no se desconecta el suministro de voltaje en el momento en que el motor alcanza velocidad cero, acelerará en la dirección inversa.

Frenado dinámico

Si el devanado de la armadura de un motor de cc se desconecta repentinamente de la fuente, continuará girando con libertad hasta detenerse. El tiempo que toma al motor quedar en reposo depende de la energía cinética almacenada en el sistema rotatorio.

Por el contrario, el frenado dinámico emplea la fuerza contraelectromotriz en el motor con objeto de detenerlo con rapidez. Si después de haberse desconectado de la fuente, el devanado de la armadura es conectado a través de una resistencia variable R, la fuerza contraelectromotriz producirá una corriente en la dirección opuesta. Una corriente en dirección opuesta en el devanado de la armadura ocasiona un par que se opone a la rotación y obliga al motor a detenerse.

El efecto de frenado dinámico se controla variando R. Al aplicar el freno dinámico, se selecciona R para limitar la entrada de corriente en la armadura a 150%, aproximadamente, de su valor especificado. Al tiempo que la velocidad del motor se abate, también lo hace la fem inducida y la corriente a través de R. Así, la acción de frenado dinámico es máxima al principio y disminuye hasta cero cuando el motor se detiene. En la figura 6.23 se muestran circuitos simples que ilustran el principio del frenado dinámico para motores shunt y serie.

En cualquier momento del proceso de frenado dinámico la corriente de la armadura es

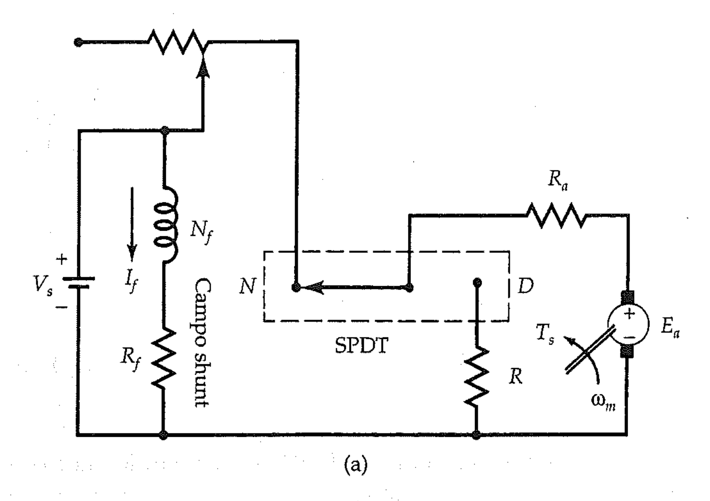
$$I_a = \frac{E_a}{R + R_a} = \frac{K_a\Phi_P\omega_m}{R + R_a}$$

y el par de frenado es

$$T_b = K_a\Phi_P I_a = \frac{K_a^2\Phi_P^2\omega_m}{R + R_a} = K_2\Phi_P^2\omega_m \tag{6.28}$$

Puesto que el flujo en un motor serie es proporcional a la corriente de la armadura, $\Phi_P = k_f I_a$, el par de frenado para un motor de ese tipo se convierte en

$$T_{tb} = K_2 k_f^2 I_a^2 \omega_m \tag{6.29}$$



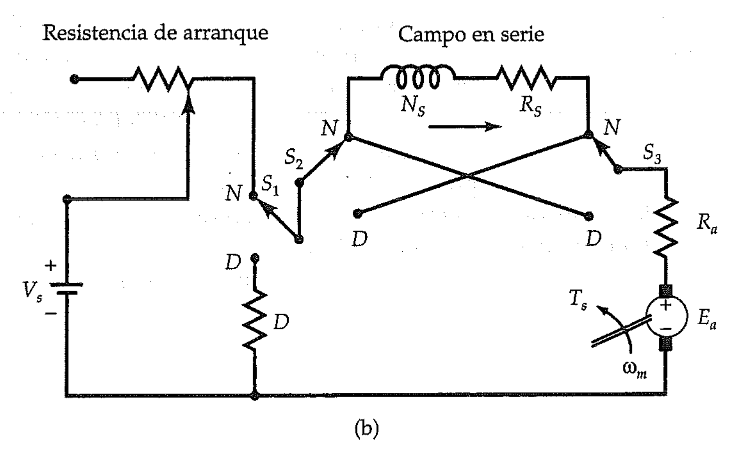


Figura 6.23. Frenado dinámico de un motor **(a)** shunt y **(b)** en serie.

Por otro lado, el par de frenado para un motor shunt es

$$T_b = K_4\omega_m \tag{6.30}$$

Con base en las ecuaciones 6.28, 6.29 y 6.30 resulta evidente que el par de frenado disminuye a medida que la velocidad del motor se aproxima a cero.

Frenado regenerativo

El frenado regenerativo se utiliza en aplicaciones donde es probable que la velocidad del motor se incremente a partir de su valor especificado, como en trenes eléctricos, as-

censores, grúas y cabrias. En condiciones normales de operación de un motor de cc, por ejemplo un motor de imanes permanentes (o tipo PM) de un tren eléctrico, la fuerza contraelectromotriz es ligeramente menor que el voltaje aplicado. Observe que dicha fuerza en un motor tipo PM es directamente proporcional a su velocidad. Suponga ahora que el tren avanza cuesta abajo. Al incrementarse la velocidad del motor, también aumenta la fuerza contraelectromotriz en él; si llegara a ser mayor que el voltaje aplicado, la corriente en el devanado de la armadura invertiría su dirección y el motor se volvería un generador. Enviaría fuerza de regreso a la fuente o a otros equipos que operaran desde la misma fuente. La inversión de la corriente en la armadura produce un par en dirección opuesta a la velocidad del motor. En consecuencia, la velocidad del motor disminuye hasta que la fuerza contraelectromotriz del motor es menor que el voltaje aplicado. La acción regenerativa no sólo controla la velocidad del motor, sino también desarrolla energía que puede usarse en cualquier parte.

Ejemplo 6.9

Un motor shunt de 400 V toma 30 A para satisfacer la carga especificada a una velocidad de 100 rad/s. La resistencia de la armadura es de 1.0 Ω y la del devanado del campo es de 200 Ω. Determine la resistencia externa que debe insertarse en serie con el circuito de la armadura, de modo que la corriente en ésta no exceda 150% de su valor especificado cuando el motor se bloquee. Determine el par de frenado *a*) en el instante del bloqueo y *b*) cuando el motor se aproxime a velocidad cero.

- Solución

Corriente del campo: $I_f = 400/200 = 2$ A
Corriente de la armadura: $I_a = 30 - 2 = 28$ A
Fuerza contraelectromotriz del motor: $E_a = 400 - 28 \times 1 = 372$ V

El voltaje total en el circuito de la armadura en el momento del bloqueo es 400 + 372 = 772 V. La corriente máxima permisible en la armadura es de 1.5 × 28 = 42 A. Luego, la resistencia externa en el circuito de la armadura en el instante del bloqueo debe ser

$$R = \frac{772}{42} - 1 = 17.38\ \Omega$$

De la especificación operativa del motor se tiene que

$$K_a\Phi_P = \frac{E_a}{\omega_m} = \frac{372}{100} = 3.72$$

$$K_3 = \frac{K_a\Phi_P V_s}{R + R_a} = \frac{3.72 \times 400}{17.38 + 1} = 80.96$$

$$K_4 = \frac{(K_a\Phi_P)^2}{R + R_a} = \frac{3.72^2}{18.38} = 0.753$$

Por tanto, con base en la ecuación 6.27, el par de frenado es

$$T_b = 80.96 + 0.753\ \omega_m$$

a) En el instante del bloqueo, $\omega_m = 100$ rad/s, y el par de frenado es

$$T_b = 80.96 + 0.753 \times 100 = 156.26 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) Cuando el motor alcanza velocidad cero, el par de frenado es de 80.96 N • m.

■

Ejercicios

6.21. Un motor tipo PM de 400 V, 600 rpm y 20 hp trabaja a plena carga. Su eficiencia es de 80% y la resistencia de la armadura es de 0.4 Ω. Determine *a*) la resistencia externa que debe agregarse en serie con la resistencia de la armadura para que la corriente en esta última no exceda el doble de la corriente a plena carga cuando se bloquee, *b*) el par de frenado máximo, y *c*) el par de frenado y la corriente en la armadura cuando la velocidad del motor se aproxime a cero.

6.22. Repita el ejercicio 6.21 si el motor se detiene con frenado dinámico.

Resumen

En este capítulo centramos la atención en el estudio de los motores de cc, los cuales, aunque menos utilizados que los motores de ca, ofrecen estupendas características velocidad-par que aquéllos no pueden igualar. También ofrecen control de velocidad más preciso y flexible que sus contrapartes de ca.

El principio de operación de un motor de cc no es diferente del de un generador de cc. La fem inducida en un motor de cc se opone al voltaje aplicado, razón por la que se llama *fuerza contraelectromotriz*. La fuerza contraelectromotriz del motor se ajusta a sí misma en función de los requerimientos de par que ocasiona la carga. Si se tiene en cuenta que en el momento en que el motor arranca la fuerza contraelectromotriz es igual a cero, nunca debe ponerse en marcha un motor de cc aplicando el voltaje especificado a las terminales de la armadura. Debe aplicarse un voltaje variable o introducir una resistencia variable en el circuito de la armadura en el momento de arranque.

Al cambiar la carga en el motor, también lo hace su velocidad. Por tanto, la regulación porcentual de la velocidad de un motor de cc se define como

$$RV\% = \frac{N_{mnL} - N_{mpc}}{N_{mpc}} \times 100 = \frac{\omega_{mnL} - \omega_{mpc}}{\omega_{mpc}} \times 100$$

Durante nuestro estudio de los motores de cc observamos que un motor serie es de velocidad variable, en tanto que un motor shunt lo es esencialmente de velocidad constante. Como la regulación de velocidad del motor compound es mayor que la del motor shunt, también se le considera un motor de velocidad variable.

El motor shunt se usa en aplicaciones tales como esmeriladores, pulidores, cepilladoras para madera y lavadoras. Su velocidad puede ajustarse empleando las técnicas de *a*) control del campo, *b*) control de la armadura, y *c*) voltaje variable. Los motores shunt con velocidad ajustable se hallan en aplicaciones como tornos, ascensores, ventiladores grandes y prensas de impresión pequeñas.

Un motor serie se usa en aplicaciones tales como grúas, tornamesas, elevadores de cangilones, bandas transportadoras continuas y malacates para minas. Su velocidad se controla aplicando las mismas técnicas mencionadas para el motor shunt.

Se usan motores compound en compresoras, prensas rotatorias, troqueladoras, elevadores y máquinas para estampado. Para controlar su velocidad también se pueden usar métodos para control del campo y de la armadura.

El método Ward-Leonard para controlar la velocidad, si bien es costoso, se utiliza cuando se requiere un control de velocidad excepcionalmente amplio y muy sensible. Es el sistema preferido para el proceso de frenado regenerativo.

Se describieron dos métodos para prueba de motores de cc: la prueba con el freno prony y el método del dinamómetro. La prueba con la cuerda es una variante ligera de la prueba con el freno prony. Los motores shunt y compound también pueden probarse operándolos sin carga. La potencia de entrada a estas máquinas en condiciones sin carga produce la información acerca de las pérdidas por rotación.

A fin de detener o invertir la dirección de rotación de un motor de cc se emplean métodos tales como el bloqueo y los frenados dinámico y regenerativo. Cada una de estas técnicas se basa en convertir temporalmente un motor en un generador. En tales condiciones, el par retardador del generador actúa como freno de la máquina.

La técnica de bloqueo requiere invertir el suministro en las terminales de la armadura. El método de frenado dinámico precisa la conexión de una resistencia apropiada entre las terminales de la armadura cuando se desconecta el suministro. Cuando la corriente en la armadura se retroalimenta al suministro, se dice que la técnica de frenado es *regenerativa*. Para el frenado regenerativo, la fem inducida en el motor debe ser mayor que el voltaje en la línea.

Preguntas de repaso

6.1. ¿Por qué la fem inducida en un motor de cc se conoce como *fuerza contraelectromotriz* o fuerza electromotriz inversa?

6.2. Explique por qué un motor de cc no debe ponerse en marcha aplicando el voltaje especificado a las terminales de la armadura.

6.3. Explique la reacción de la armadura en un motor de cc.

6.4. Defina *regulación porcentual de la velocidad*.

6.5. Las velocidades sin carga y a plena carga de un motor de cc son 2 400 rpm y 2 000 rpm, respectivamente. ¿Cuál es la regulación porcentual de la velocidad del motor?
6.6. ¿Cuáles son los dos factores responsables de la disminución de la velocidad cuando se incrementa la carga en un motor serie?
6.7. Un motor tetrapolar de cc tiene 28 ranuras con dos conductores por cada una de ellas. La fuerza contraelectromotriz en su armadura con devanado imbricado es de 240 V a 1 800 rpm. ¿Cuál es el flujo por polo en el motor?
6.8. Un motor tetrapolar de cc consume 25 A con devanado ondulado. Determine la corriente en la armadura para un motor con devanado imbricado que entregue el mismo par.
6.9. La velocidad de un motor de cc cae de 1 200 rpm sin carga a 1 000 rpm a plena carga. ¿Cuál es la regulación porcentual de la velocidad?
6.10. La regulación de la velocidad de un motor de cc es de 2.5%. Si la velocidad a plena carga es de 2 400 rpm, ¿cuál es la velocidad sin carga?
6.11. Una máquina de cc de 120 V tiene una resistencia en el circuito de la armadura de 0.8 Ω. Si la corriente a plena carga es de 15 A, determine la fem inducida cuando la máquina funciona como *a*) generador y *b*) motor.
6.12. La resistencia de la armadura para un motor de cc de 120 V es de 0.25 Ω. Cuando opera a plena carga, la corriente en la armadura es de 16 A a 1 400 rpm. Calcule la velocidad del motor si el flujo se incrementa 20% y la corriente en la armadura es de 26 A.
6.13. ¿Qué es un motor shunt? ¿Por qué se hace referencia a él como *motor de velocidad constante*?
6.14. ¿Es posible que un motor shunt trabaje a plena carga con velocidad superior a la velocidad sin carga? Dé razones que justifiquen la respuesta.
6.15. ¿Qué es un devanado estabilizador? ¿Cómo afecta la operación de un motor shunt?
6.16. Un motor shunt de 120 V toma 10 A a plena carga. Las pérdidas eléctricas totales son de 125 W. La pérdida por fricción y viento es de 75 W. La pérdida en el núcleo es de 100 W. Determine la eficiencia del motor. Trace su diagrama de flujo de potencia. ¿Cuál es la potencia de especificación nominal del motor?
6.17. Un motor eléctrico desarrolla 0.75 hp a 1 725 rpm. Si la polea tiene un radio de 10 cm, determine la fuerza *a*) en newtons-metro, y *b*) en kilogramos (peso) que actúan en la llanta de la polea.
6.18. Explique la variación en el par cuando se incrementa la carga en *a*) un motor shunt, *b*) un motor serie, *c*) un motor compound.
6.19. ¿Cuál es la ventaja de un motor compound cumulativo con relación a uno serie?
6.20. ¿Por qué disminuye el par en un motor compound diferencial con el aumento de la corriente en la armadura?
6.21. ¿Por qué aumenta la velocidad de un motor compound diferencial con el incremento de la corriente en la armadura?
6.22. ¿Qué sucede a la característica de velocidad-par de un motor compound cumulativo si al devanado en serie se le conecta en paralelo una resistencia desviadora del campo?
6.23. ¿Qué métodos se usan para invertir la dirección de rotación de un motor de cc?

6.24. ¿Tiene sentido hablar de la regulación de la velocidad de un motor serie? ¿Y de la de un motor compound diferencial?
6.25. ¿Cuál es el método para controlar la resistencia de la armadura? ¿Puede usarse para aumentar la velocidad de un motor con carga determinada?
6.26. ¿Cuáles son las desventajas del método de control de la resistencia de la armadura?
6.27. ¿En qué consiste el método de control del campo? ¿Puede utilizarse para reducir la velocidad de un motor?
6.28. ¿Qué ventajas tiene el método de control del campo?
6.29. ¿Cuál es la diferencia entre el control y la regulación de la velocidad?
6.30. ¿Qué ventajas ofrece el método Ward-Leonard para controlar la velocidad? ¿Cuáles son sus desventajas?
6.31. Describa el método Ward-Leonard para controlar la velocidad.
6.32. Trace y explique las características de velocidad-par en los motores de cc.
6.33. ¿Qué es el *bloqueo*? ¿Por qué es necesario insertar una resistencia en el circuito de la armadura cuando se bloquea un motor?
6.34. Si un motor bloqueado alcanza la velocidad cero, ¿cuál es la corriente en la armadura?
6.35. ¿Qué es el frenado dinámico? ¿Cuál es la corriente en la armadura del motor cuando la velocidad se aproxima a cero?
6.36. Explique en qué consiste el frenado regenerativo.
6.37. Mencione los métodos para controlar la velocidad de *a*) un motor shunt y *b*) un motor serie.
6.38. Describa *a*) la prueba con el freno prony y *b*) la prueba con el dinamómetro.
6.39. La fuerza puede medirse en kilogramos o en newtons. ¿Cuál es la diferencia entre las dos mediciones?
6.40. ¿Qué significa *peso muerto* del brazo de torsión? ¿Cómo puede determinarse?

Problemas

6.1. Un motor hexapolar de cc con devanado imbricado tiene 180 conductores distribuidos en la superficie de la armadura. Si la corriente de la armadura es de 25 A y el flujo por polo es de 0.5 Wb, determine el par que desarrolla la máquina. Si el motor opera a 900 rpm, ¿cuál es la fuerza contraelectromotriz? ¿Cuál es la corriente en cada conductor?
6.2. El devanado de la armadura de un motor bipolar tiene 1 600 conductores. El flujo por polo es de 50 mWb y la corriente de la armadura es de 80 A. Determine el par desarrollado por el motor cuando *a*) la reacción de la armadura es igual a cero y *b*) la reacción de la armadura ocasiona una caída de 12% en el flujo.
6.3. El par desarrollado por un motor de cc es de 20 N · m cuando la corriente en la armadura es de 25 A. Si el flujo se reduce en 20% de su valor original y la corriente en la armadura se incrementa en 40%, ¿cuál es el par desarrollado por el motor?

6.4. Un motor serie de 125 V y 10 hp entrega la carga especificada a 2 750 rpm. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.08 Ω y la del campo serie es de 0.07 Ω. Si se desprecia la pérdida por rotación, determine el par y la eficiencia del motor. Si el motor se limita a entregar 8 hp a 3 200 rpm, ¿cuál es su reducción porcentual del flujo *P*?

6.5. Un motor serie de cc, de 230 V y 15 A está especificado a 1 800 rpm. Tiene una resistencia en la armadura de 2.1 Ω y una resistencia del campo en serie de 1.25 Ω. En condiciones de carga ligera, el motor toma 5 A de una fuente de 230 V. ¿Cuál es la velocidad del motor?

6.6. Un motor serie de cc de 240 V y 900 rpm toma 25 A a plena carga. Las resistencias de la armadura y del devanado del campo son de 0.2 Ω y 0.3 Ω, respectivamente. La pérdida por rotación es de 300 W. Calcule *a*) la potencia desarrollada, *b*) la potencia de salida, *c*) el par disponible, *d*) la pérdida en el cobre, y *e*) la eficiencia. Si el diámetro de la polea es de 20 cm, ¿cuál es la fuerza que ejerce el motor en la llanta de la polea?

6.7. Un motor serie de 230 V toma 50 A a una velocidad de 1 200 rpm. La resistencia de la armadura es de 0.4 Ω y la del devanado del campo es de 0.6 Ω. El motor opera en la región lineal. Cuando la carga se reduce gradualmente, la corriente admitida es de 20 A. ¿Cuál es el cambio porcentual en el par? ¿Cuál es la velocidad del motor con carga reducida?

6.8. En la figura 6.7 se presenta la curva de magnetización de un motor serie de 200 V a 1 200 rpm. Los otros parámetros del motor son R_a = 0.2 Ω, R_s = 0.4 Ω, N_s = 5 Ω vueltas/polo y P_r = 1 500 W. La resistencia desviadora del campo es de 0.6 Ω. Si la corriente admitida es de 100 A, encuentre *a*) la potencia desarrollada, *b*) la potencia de salida, *c*) la velocidad del motor, *d*) el par disponible, y *e*) la eficiencia.

6.9. Un ventilador que requiere 8 hp a 700 rpm está acoplado directamente a un motor serie de cc. Calcule la eficiencia del motor cuando el suministro de voltaje es de 500 V, suponiendo que la potencia que necesita el ventilador varía con el cubo de la velocidad. La curva de magnetización a 600 rpm se obtiene al operar el motor como generador autoexcitado y es la siguiente:

Corriente de carga (A)	7	10.5	14	27.5
Voltaje en las terminales (V)	347	393	434	458

La resistencia de la armadura y del devanado del campo es de 3.5 Ω, y la pérdida por rotación es de 450 W. Esta última puede suponerse constante para las velocidades correspondientes al rango de las corrientes mencionadas arriba con voltaje normal.

6.10. Un motor shunt hexapolar con devanado imbricado, 3 hp y 120 V tiene 960 conductores en el devanado de la armadura. La resistencia de ésta es de 0.75 Ω y el flujo por polo es de 10 mWb. La corriente en el devanado del campo es de 1.2 A. La pérdida de potencia por rotacional es de 200 W. Calcule *a*) la corriente de la armadura, *b*) el par disponible en el eje, y *c*) la eficiencia.

6.11. Un motor shunt de 120 V toma 2 A en condiciones sin carga y 7 A cuando trabaja a plena carga a 1 200 rpm. La resistencia de la armadura es de 0.8 Ω y la del campo shunt es de 240 Ω. Determine *a*) la pérdida de potencia por rotación, *b*) la velocidad sin carga, *c*) la regulación de la velocidad, *d*) la potencia de salida, y *e*) la eficiencia.

6.12. Un motor shunt de 240 V, 20 hp y 2 000 rpm tiene una eficiencia de 76% a plena carga. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.2 Ω. La corriente en el campo es de 1.8 A. Calcule *a*) la corriente de línea a plena carga, *b*) el par en el eje a plena carga, y *c*) la resistencia de arranque para limitar la corriente de arranque a 1.5 veces la corriente a plena carga. ¿Cuál es la velocidad sin carga y la regulación de la velocidad del motor?

6.13. Un motor shunt de 230 V toma 40 A a plena carga. La corriente del campo shunt es de 2.5 A. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.8 Ω. La pérdida por rotación es de 200 W. Determine la especificación de potencia y la eficiencia del motor. Trace su diagrama de flujo de potencia.

6.14. Un motor shunt de 230 V toma 5 A a una velocidad de 2 400 rpm en condiciones sin carga. La resistencia del campo shunt es de 115 Ω y de la armadura de 0.1 Ω. El motor toma 25 A a plena carga. Determine *a*) la pérdida por rotación, *b*) la velocidad a plena carga, *c*) la regulación de velocidad, *d*) la eficiencia del motor, y *e*) la especificación nominal del motor.

6.15. Un motor shunt tetrapolar y 120 V tiene 280 conductores con devanado imbricado. Toma 21 A a plena carga y desarrolla un par en el eje de 10 N · m a 1 800 rpm. La corriente en el devanado del campo es de 1 A y la resistencia de la armadura es de 0.5 Ω. Calcule *a*) el flujo por polo, *b*) la pérdida por rotación, y *c*) la eficiencia.

6.16. El devanado del campo shunt de un motor compound tetrapolar de cc, de 120 V tiene 200 vueltas por polo y una resistencia de 40 Ω. El campo en serie tiene cinco vueltas por polo y su resistencia es de 0.05 Ω. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.2 Ω. Cuando se prueba a plena carga como motor shunt, toma 53 A con suministro de 120 V. Se encontró que la pérdida por rotación era 10% de la potencia desarrollada por el motor shunt a una velocidad de 1 200 rpm. Luego, el motor se conectó como compound cumulativo en derivación larga. Determine la resistencia externa que debe agregarse en serie con el devanado del campo shunt para que el motor opere a la misma densidad de flujo y velocidad. Trace el diagrama de flujo de potencia para el motor compound y calcule su eficiencia.

6.17. Un motor compound acumulativo en derivación larga toma 24 A de un suministro a 240 V y trabaja a 1 800 rpm. La resistencia del circuito de la armadura es de 0.3 Ω, la resistencia del campo en serie es de 0.2 Ω y la del campo shunt es de 120 Ω. Calcule el par en el eje y la eficiencia cuando la pérdida por rotación es de 350 W.

6.18. La curva de magnetización de un motor compound se obtiene a 600 rpm al excitar solamente su devanado de campo shunt, y es como sigue:

I_f (A)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_a (V)	39	60	82	95	105	112	120	125	128	130

La máquina opera como motor shunt con un suministro de 120 V y toma 462 A a plena carga. Sus otros parámetros son $R_f = 20\ \Omega$, $R_s = 0.02\ \Omega$, $R_a = 0.02\ \Omega$, $N_f = 1\,140$ vueltas/polo, $N_s = 5$ vueltas/polo y $P_r = 2.5$ kW. El efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura equivale a 1 A de la corriente del campo shunt. Determine *a*) la velocidad, *b*) el par en el eje, *c*) la especificación en caballos de fuerza, y *d*) la eficiencia del motor shunt.

6.19. El motor del problema 6.18 se conecta como motor compound en derivación larga. Para la corriente en la armadura a plena carga, determine *a*) la velocidad, *b*) el par en el eje, y *c*) la eficiencia.

6.20. Los parámetros de una máquina compound cumulativa en derivación larga de 120 V son $R_a = 0.02\ \Omega$, $R_s = 0.1\ \Omega$, $R_f = 60\ \Omega$ y $P_r = 115$ W. Toma 52 A y opera con una carga de 30 N · m. Calcule su velocidad y eficiencia. Trace su diagrama de flujo de potencia.

6.21. Un motor compound en derivación corta de 240 V y 1 450 rpm tiene los parámetros siguientes: $R_a = 0.4\ \Omega$, $R_s = 0.2\ \Omega$, y $R_f = 80\ \Omega$. Toma 30 A a plena carga y trabaja a su velocidad nominal. Si la pérdida por rotación es de 500 W, determine el par en el eje y la eficiencia. Trace su diagrama de flujo de potencia.

6.22. Un motor compound en derivación larga de 440 V tiene los parámetros siguientes: $R_a = 0.5\ \Omega$, $R_s = 0.25\ \Omega$, e $I_f = 2$ A. La velocidad a plena carga es de 1 200 rpm y la corriente de carga es de 32 A. El motor toma 7 A sin carga. Si el flujo cae a 80% de su valor a plena carga, determine la velocidad del motor en condiciones sin carga. ¿Cuál es la especificación de eficiencia y caballos de fuerza del motor a plena carga? Suponga que la pérdida por rotación es constante.

6.23. Un motor shunt de 220 V tiene una resistencia de la armadura de 0.25 Ω. La armadura toma 5 A a una velocidad de 2 400 rpm en condiciones sin carga. La corriente del campo shunt es de 1 A. ¿Qué resistencia debe conectarse en serie con la armadura para reducir su velocidad a 800 rpm a su carga especificada de 31 A? ¿Cuánta potencia se pierde en la resistencia de control? ¿Cuál es la regulación de la velocidad? ¿Cuál es la eficiencia del motor? Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad del motor.

6.24. Un motor shunt de 440 V tiene los parámetros siguientes: $R_a = 0.75\ \Omega$ e $I_f = 1$ A. El motor toma 6 A sin carga y opera a una velocidad de 1 200 rpm. Calcule la velocidad especificada del motor cuando entrega la carga especificada y toma 26 A del suministro. Estime la velocidad con dicha carga si se conecta una resistencia de 2.5 Ω en serie con la armadura.

6.25. Un motor shunt de 220 V impulsa una bomba cuyo par varía con el cuadrado de la velocidad. Cuando el motor trabaja a 900 rpm, toma 47 A del suministro. La corriente del campo shunt es de 2 A, y la resistencia de la armadura es de 0.5 Ω. ¿Qué resistencia debe introducirse en el circuito de la armadura con objeto de reducir su velocidad a 600 rpm?

6.26. Un motor serie de 500 V tiene una resistencia de la armadura de 0.25 Ω y la resistencia del campo en serie es de 0.15 Ω. La corriente especificada es de

60 A. ¿Qué resistencia debe introducirse en el circuito de la armadura a fin de obtener un par de arranque igual a 300% de su valor especificado? ¿Cuál es la corriente de la armadura sin carga? Suponga que la operación del motor es lineal.

6.27. Un motor serie con resistencia total en el circuito de la armadura de 1.5 Ω toma 30 A con suministro de 440 V. Si el par de la carga varía con el cubo de la velocidad, calcule la resistencia requerida para reducir la velocidad en 20%.

6.28. Un motor shunt de 120 V tiene una velocidad de 1 800 rpm a plena carga y toma una corriente de 51 A. La corriente del campo shunt es de 1 A, y la resistencia de la armadura es de 0.2 Ω. ¿Qué valor de resistencia debe introducirse en serie con el circuito de la armadura para que el motor desarrolle un par de 15 N · m a una velocidad de 1 500 rpm?

6.29. Un motor serie de 240 V desarrolla un par de 120 N · m a una velocidad de 900 rpm. La resistencia del devanado de la armadura es de 0.2 Ω y la del devanado del campo en serie de 0.1 Ω. Para una carga de par constante, encuentre la velocidad nueva del motor cuando se coloca una resistencia desviadora de 0.1 Ω en paralelo con el devanado del campo en serie.

6.30. Un motor shunt de 120 V cuyos parámetros son $R_a = 0.25$ Ω y $R_{fw} = 80$ Ω toma 4 A a una velocidad de 1 500 rpm sin carga. Si el motor ha de desarrollar un par de 20 N · m a una velocidad de 2 000 rpm, determine la resistencia externa que debe agregarse en serie con el devanado del campo. Si la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad, determine la eficiencia y la especificación en caballos de fuerza del motor a 2 000 rpm.

6.31. Un motor serie de 240 V con $R_a = 0.3$ Ω y $R_s = 0.2$ Ω, toma 50 A cuando trabaja a 900 rpm. Calcule la velocidad de operación del motor cuando el campo en serie se conecta en paralelo con una resistencia desviadora de 0.2 Ω y el par desarrollado se incrementa 50%.

6.32. Un motor shunt de 120 V toma 3 A sin carga y funciona a 600 rpm. La resistencia de la armadura es de 0.5 Ω y la del campo shunt de 120 Ω. Calcule la velocidad del motor cuando trabaja a plena carga y toma una corriente de 25 A. Suponga que la reacción de la armadura debilita el campo 5%.

6.33. Un motor shunt de 120 V se prueba con el freno prony y se dispone de los datos siguientes: longitud del brazo de torsión = 75 cm, tara inicial = 1.25 N, lectura en la báscula = 95 N a 1 000 rpm y corriente de línea = 7.5 A. Calcule el par y la eficiencia del motor.

6.34. La lectura efectiva de la báscula en una prueba con freno es de 40 kg. La longitud del brazo de torsión es de 30 cm. La velocidad del motor es de 720 rpm. Si el motor toma 46 A de un suministro de 220 V, determine *a*) el par en el eje, *b*) la eficiencia, y *c*) la especificación en caballos de fuerza del motor.

6.35. Se obtuvieron los datos siguientes al efectuar una prueba de carga en un motor de cc utilizando un tambor de freno y básculas de resorte. Lecturas en las

básculas, 3 kg y 15 kg; diámetro del tambor, 50 cm; velocidad del motor, 750 rpm; voltaje aplicado, 120 V, y corriente de línea, 25 A. Determine la eficiencia del motor.

6.36. La carga en un extremo de un resorte fue de 20 kg y en el otro fue de 5 kg a una velocidad de 960 rpm. El diámetro del tambor de freno fue de 50 cm. El motor tomaba 36 A de un suministro a 120 V. Calcule *a*) el par en el eje, *b*) la eficiencia, y *c*) los caballos de fuerza del motor.

6.37. En la figura P6.37 se muestra la disposición para una prueba con cuerda. Si la velocidad del tambor es de 600 rpm, determine la potencia del motor en caballos de fuerza.

6.38. Un motor tipo PM de 39 hp y 440 V opera a 1 000 rpm a plena carga. La eficiencia del motor es de 86.72% y la resistencia de la armadura es de 0.377 Ω. El motor se controla por medio de un sistema Ward-Leonard. La resistencia de la armadura del generador es de 0.336 Ω. Determine la fem inducida en el generador a plena carga. ¿Cuál es la pérdida por rotación del motor? Para los problemas siguientes suponga que tanto el motor como el generador operan en la región lineal y que la pérdida por rotación es constante.

6.39. Determine la velocidad sin carga para el motor del problema 6.38 cuando no se hacen ajustes en el circuito del campo del generador.

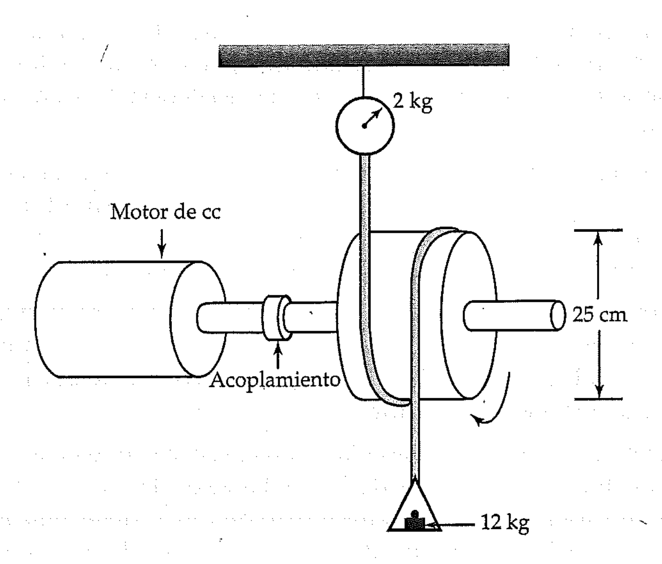


Figura P6.37. Prueba con cuerda.

6.40. ¿Cuál debe ser la reducción porcentual en la fem inducida (o en la corriente del campo) del generador del problema 6.38 para obtener una velocidad sin carga de 1 025 rpm?

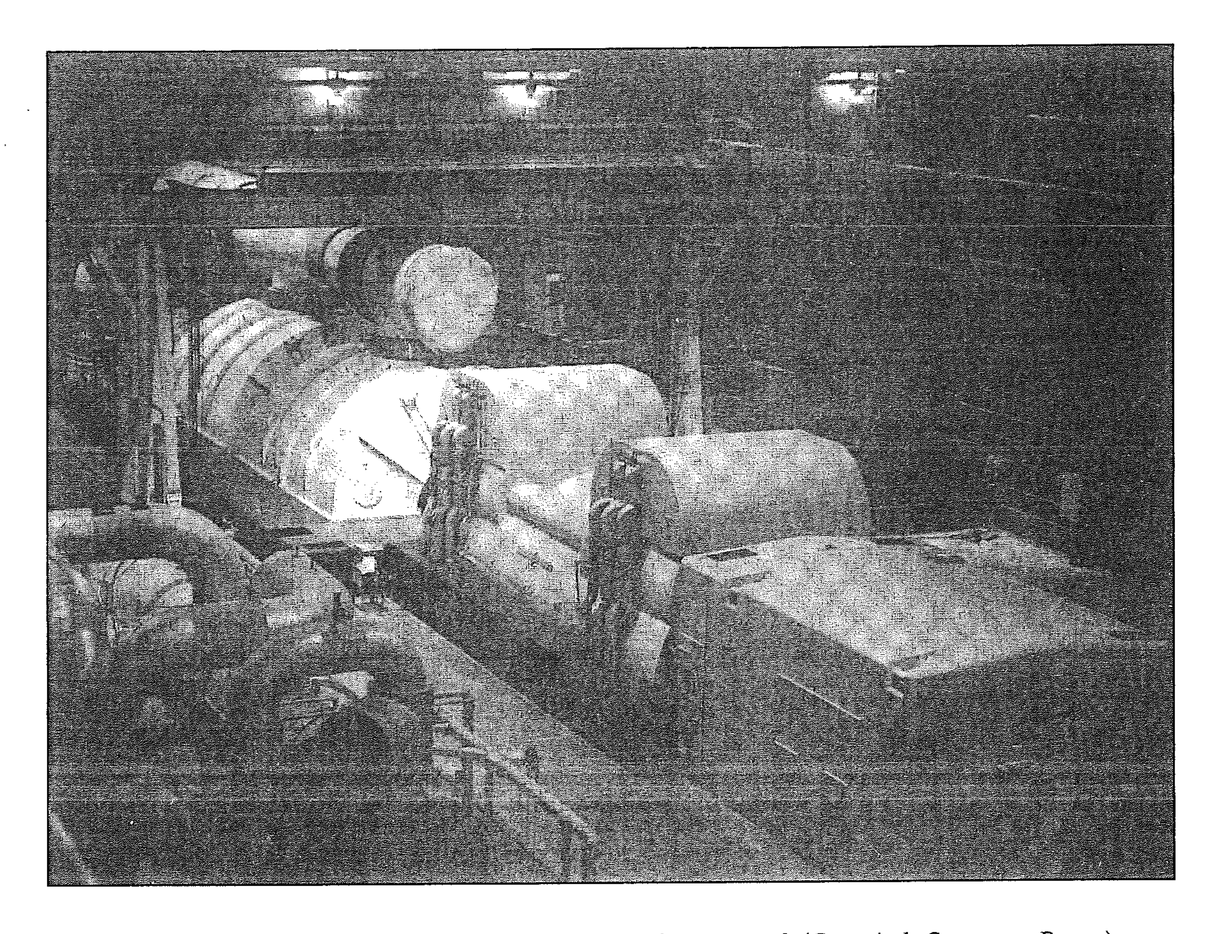
6.41. ¿Cuál debe ser la fem inducida en el generador si el motor suministra el mismo par que en el problema 6.38 pero a una velocidad de 750 rpm? ¿Cuál es el cambio porcentual en la corriente del campo del generador? ¿Cuál será la velocidad del motor en condiciones sin carga?

6.42. Un motor shunt de 220 V requiere 85 A para alimentar la corriente de la armadura cuando entrega la carga de especificación a 2 400 rpm. La resistencia total en el circuito de la armadura es de 0.5 Ω. Determine *a*) la resistencia de bloqueo que limitará la corriente que irrumpe en la armadura a 125 A en el momento del bloqueo, *b*) el par máximo de frenado, y *c*) el par de frenado cuando la velocidad se aproxima a cero.

6.43. Repita el problema 6.42 si el motor debe detenerse mediante técnica de frenado dinámico.

7

Generadores síncronos



Fotografía de un generador síncrono y de su control. (*Cortesía de Consumers Power.*)

7.1. Introducción

Los generadores de corriente alterna (ca) suelen recibir el nombre de *generadores síncronos* o *alternadores*. Una máquina síncrona, ya sea generador o motor, opera a velocidad síncrona, es decir, a la velocidad a la que gira el campo magnético creado por las bobinas del campo. En la sección 3.5 ya se explicó este hecho y se obtuvo la expresión siguiente para la velocidad síncrona N_s, en revoluciones por minuto (rpm):

$$N_s = \frac{120f}{P} \tag{7.1}$$

donde f es la frecuencia en hertz (Hz) y P es el número de polos en la máquina. Luego, para que un generador tetrapolar genere energía a 60 Hz, su velocidad de rotación debe ser de 1 800 rpm. Por otro lado, un motor síncrono que opere a partir de una fuente de 50 Hz gira a sólo 1 500 rpm. Cualquier intento de sobrecargar el motor síncrono podría sacarlo de sincronía y forzarlo a detenerse.

Durante el análisis que hicimos de un generador de corriente continua (cc) indicamos que la fuerza electromotriz (fem) inducida en sus bobinas de la armadura es de tipo alterno. Por tanto, es posible convertir un generador de corriente continua (cc) en uno de corriente alterna (ca) si *a*) se reemplaza su conmutador por un conjunto de anillos rozantes y *b*) haciendo girar la armadura a velocidad constante (síncrona). La idea es novedosa pero no se lleva a la práctica por las razones que se mencionarán en breve.

También se recordará que el movimiento relativo de un conductor respecto del flujo magnético en una máquina da lugar a la fem inducida en ese conductor. En otras palabras, desde el punto de vista de la fem inducida, en realidad no importa si los conductores (bobinas) giran en un campo magnético estacionario o un campo magnético rotatorio se enlaza con un conductor estacionario (bobina). El primer arreglo, estudiado en el capítulo 5, es preferible para los generadores de cc, en tanto que el segundo es más apropiado para los generadores síncronos y es el tema del presente capítulo. Así, la parte estacionaria (estator) de un generador síncrono desempeña la función de armadura, y la parte giratoria (rotor) lleva el devanado del campo para proveer el flujo requerido. Hay varias razones para esa construcción "de dentro hacia fuera" de un generador síncrono, entre ellas las que se mencionan a continuación.

1. La mayor parte de los generadores síncronos se construyen en tamaños mucho más grandes que sus contrapartes de cc. Un incremento en la magnitud de la potencia de un generador requiere conductores más gruesos en el devanado de su armadura para conducir corrientes elevadas y reducir al mínimo las pérdidas en el cobre. También son necesarias ranuras más profundas para acomodar los conductores gruesos. Puesto que el estator tiene menos limitaciones para fabricarse suficientemente grande, se convierte de forma inadvertida en la parte preferida para alojar los conductores de la armadura.
2. Como la salida de un generador síncrono es de tipo alterno, los conductores de la armadura en el estator pueden conectarse directamente a la línea de transmisión, lo cual elimina la necesidad de anillos rozantes para una salida de potencia de ca.

3. Puesto que la mayor parte del calor se genera por el devanado de la armadura, una parte externa estacionaria puede enfriarse más eficazmente que otra interna giratoria.
4. Como el devanado de la armadura de una máquina síncrona es más complicado que el devanado del campo, es más fácil construirlo sobre la parte estacionaria.
5. Puesto que la fem inducida en el devanado de la armadura es muy elevada, es más fácil aislarla cuando se devana dentro de la parte estacionaria que en la parte giratoria. Un bastidor rígido también permite sujetar el devanado de la armadura con mayor firmeza.
6. La colocación de un devanado del campo de baja potencia sobre el rotor no es motivo de disuasión para la construcción de dentro hacia fuera de un generador síncrono. La potencia al devanado del campo puede suministrarse por medio de anillos rozantes, y si el campo se establece por medio de imanes permanentes, pueden eliminarse los anillos.

7.2. Construcción de una máquina síncrona

Los componentes básicos de una máquina síncrona son el estator, que alberga los conductores de la armadura, y un rotor, que provee el campo necesario según se explica a continuación.

Estator

También conocido como *armadura* de una máquina síncrona, el estator está formado por laminaciones delgadas de acero sumamente permeable a fin de reducir las pérdidas en el núcleo. Las laminaciones se mantienen juntas por medio del bastidor del estator. El bastidor, que puede ser de hierro de fundición o fabricarse con placas soldadas de acero suave, no se diseña para conducir flujo, sino para dar apoyo mecánico al generador síncrono. El interior del estator tiene una variedad de ranuras cuyo objetivo es alojar los gruesos conductores de la armadura (bobinas o devanados). Los conductores de la armadura se encuentran simétricamente dispuestos para formar un devanado polifásico equilibrado. Para ello, el número de ranuras por polo y por fase debe ser un (número) entero. La fem inducida por fase en generadores síncronos de gran tamaño es del orden de los kilovolts (kV) con capacidad de generación que se mide en megavolt-amperes (MVA).

La longitud axial del núcleo del estator es comparativamente corta para generadores de baja velocidad y gran diámetro, los cuales tienen muchos polos, se dejan abiertos en ambos extremos con fines de autoenfriamento y se instalan en lugares donde es posible generar energía hidroeléctrica.

La longitud axial de los generadores de alta velocidad con dos o cuatro polos puede ser de varias veces su diámetro. Estos generadores requieren circulación forzada de aire para enfriarse y son totalmente cerrados. Se utilizan cuando los rotores se impulsan por medio de turbinas de gas o vapor.

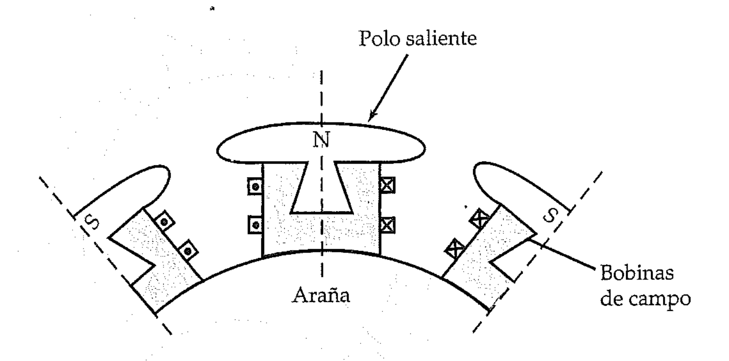


Figura 7.1. Rotor de polos salientes.

Rotor

En el diseño de generadores síncronos se usan dos tipos de rotores, el *cilíndrico* y el *de polos salientes*. El rotor se hace girar a velocidad síncrona mediante un impulsor primario, digamos una turbina de vapor. Además, tiene tantos polos como el estator, y su devanado conduce corriente continua, de modo que produce flujo constante por polo. El devanado del campo generalmente recibe su energía de un generador de cc de 115 o 230 V. El generador de cc puede impulsarse (valga la tautología) por medio del mismo impulsor primario del generador síncrono o por un motor eléctrico independiente.

El rotor de polos salientes se utiliza en generadores de velocidad baja y media porque la pérdida en el devanado es pequeña a esas velocidades. Consta de un conjunto par de polos laminados que se proyectan hacia fuera. Cada polo tiene un extremo en cola de milano que se ajusta en un hueco en forma de cuña, o se sujeta con tornillos a una rueda magnética llamada *araña*. El devanado del campo se sitúa alrededor de cada polo, como se indica en la figura 7.1. Los polos deben alternar su polaridad.

El rotor cilíndrico se emplea en un turbogenerador bi o tetrapolar de alta velocidad. Está formado por un cilindro liso y sólido de acero forjado, con cierto número de ranuras sobre su periferia exterior, las cuales se diseñan para alojar las bobinas del campo, como se muestra en la figura 7.2. La construcción cilíndrica brinda los beneficios siguientes:

1. Resulta en una operación silenciosa a velocidad alta.
2. Ofrece mejor equilibrio que el rotor de polos salientes.
3. Reduce la pérdida por el viento.

7.3. Devanados de la armadura

Los estatores (armaduras) de casi todos los generadores síncronos están devanados con tres arrollamientos distintos e independientes para generar energía trifásica. Se dice que cada devanado representa una fase de un generador trifásico. Los tres de-

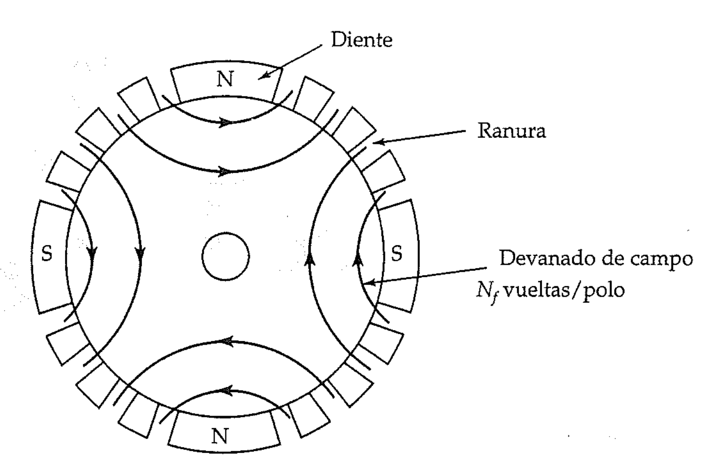


Figura 7.2. Rotor cilíndrico tetrapolar.

vanados son exactamente iguales en su forma, pero desplazados exactamente 120° eléctricos uno del otro para garantizar que las fem inducidas en tales devanados estén exactamente a 120° en tiempo de fase. Los devanados trifásicos pueden conectarse para formar una conexión en *estrella* (Y) o en *delta* (Δ). Si los devanados están conectados internamente para formar una conexión en Y, el punto neutro también se lleva afuera de modo que pueda referirse a tierra de modo apropiado para operar con seguridad.

El devanado de *doble capa* se usa con frecuencia para devanar la armadura de un generador síncrono. Como se recordará, un devanado de doble capa precisa tantas bobinas idénticas como ranuras haya en el estator. Un lado de cada bobina se sitúa en la mitad inferior de una ranura y el otro lado de la misma bobina llena la mitad superior de otra ranura. A fin de colocar de tal modo las bobinas, éstas deben devanarse previamente sobre formas especiales para el propósito y después insertarse en las ranuras.

La cantidad de bobinas por fase (o el número de ranuras por fase para un devanado de doble capa) debe ser un número entero. Como las bobinas deben estar distribuidas igualmente entre los polos, el número de bobinas (ranuras) por polo y por fase también debe ser un entero. En otras palabras, si S es el número de ranuras en la armadura, P el número de polos y q el de fases, se tiene que el número de bobinas por polo y por fase es

$$n = \frac{S}{Pq} \tag{7.2}$$

donde n debe ser un número entero. La cantidad de bobinas por polo y por fase, n, suele conocerse como *grupo de fase* o *cinturón de fase*. Cuando el estator de un generador síncrono trifásico tetrapolar tiene 24 ranuras, el número de bobinas en cada grupo de fase es 2. Hay 12 grupos de fase (polos × fases). Todas las bobinas en un grupo de fase (en este caso, 2) están conectadas en serie.

Cada bobina en un grupo de fase puede devanarse como bobina de paso completo. Dicho de otro modo, cada bobina en la armadura puede abarcar 180° eléctricos. Como las fem inducidas en ambos lados de una bobina de paso completo están exactamente en fase en cualquier instante, el ideal teórico prescribiría la colocación de bobinas de paso completo desde el punto de vista de la fem inducida. Sin embargo, rara vez se usa una bobina de paso completo; más bien, los generadores se devanan con bobinas de paso fraccionario por las razones siguientes:

1. Una bobina de paso fraccionario diseñada en forma apropiada reduce las armónicas que generan distorsión y produce una forma de onda más apegada a la senoidal.
2. Una bobina de paso fraccionario acorta las conexiones finales de los devanados, por lo que no sólo ahorra cobre sino también reduce la pérdida en el cobre de la bobina.
3. Es más fácil manejar una bobina más corta y reduce la acumulación de espiras finales en ambos lados del cuerpo del estator, lo cual disminuye la longitud total del generador y reduce al mínimo la dispersión del flujo.
4. La eliminación de las armónicas de alta frecuencia también disminuye las pérdidas magnéticas en el generador.

La desventaja de una bobina de paso fraccionario es que la fem inducida en ella es más pequeña que en una bobina de paso completo. Ello se debe a que el flujo total que enlaza la bobina de paso fraccionario es más pequeño que el de la bobina de paso completo. La razón del flujo que enlaza la bobina de paso fraccionario respecto al flujo que enlazaría la de paso completo se llama *factor de paso*. Posteriormente, se desarrollará una ecuación para determinar el factor de paso.

Para ilustrar la colocación de los devanados de fase en las ranuras de un generador síncrono supondremos lo siguiente:

a) Todas las bobinas son idénticas.
b) Cada bobina es de paso fraccionario en tanto un grupo de fase contenga más de una bobina. Todas las bobinas en un grupo de fase están conectadas en serie.
c) Cada grupo de fase se extiende 180° eléctricos (un paso completo). Por tanto, las n bobinas en un grupo de fase deben situarse en forma tal que el extremo inicial de la primera quede bajo el principio de un polo y el extremo final de la n-ésima bobina quede bajo el extremo de salida del polo.

El ángulo eléctrico desde el centro de una ranura al centro de otra adyacente se conoce como *alcance de ranura* o *paso de ranura*. El *alcance de bobina* o *paso de bobina*, que es el número de ranuras que abarca cada bobina, puede expresarse en términos de grados eléctricos o del número de ranuras, como se describe en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7.1

Un generador síncrono, trifásico y tetrapolar tiene 24 ranuras. Determine los pasos de ranura, de bobina y el número de bobinas en un grupo de fase. Trace el esquema de la ubicación de las bobinas para una de las fases.

- Solución

Puesto que hay 24 ranuras en el estator, el número de bobinas para un devanado de doble capa también es de 24. El número de bobinas por fase es 24/3 = 8. El número de bobinas por polo y por fase (grupo de fase) es 8/4 = 2. Luego, $n = 2$. El número de ranuras (bobinas) por polo es 24/4 = 6. Como un polo se extiende 180° eléctricos, el alcance de ranura (γ) es 180/6 = 30° eléctricos. En otras palabras, el ángulo eléctrico desde el centro de una ranura al centro de otra adyacente es de 30°.

En la figura 7.3 se describe la ubicación de las bobinas para una fase de un generador síncrono tetrapolar. Por conveniencia, las ranuras están numeradas de 1 a 24. El alcance polar para el grupo de fase A_1 sólo incluye la mitad de la ranura 1 y la mitad de la ranura 7. El extremo inicial de la bobina 1, s_1, se ubica en la ranura 1. El extremo inicial de la bobina 2, s_2, debe colocarse en la ranura 2. Como sólo hay dos bobinas en un grupo de fase, el extremo final de la bobina 2, f_2, debe situarse en la ranura 7 porque el alcance polar es de 6 ranuras. Otra manera de determinar el alcance polar es contar el número de dientes. Puesto que el número de dientes que abarca una bobina es el mismo que el de ranuras abarcadas por ella, un polo debe abarcar 6 dientes. Hay exactamente 6 dientes entre las ranuras 1 y 7. Tras determinar dónde hay que colocar el extremo final de la bobina 2, se sabe de inmediato dónde situar el extremo final de la bobina 1. Debe ir en la ranura 6, ya que todas las bobinas son idénticas. Observe que cada bobina abarca 5 ranuras o 5 dientes. Por tanto, el paso de bobina es 30° × 5 = 150° eléctricos.

El grupo de fase A_2 comienza donde termina el grupo de fase A_1. Luego, el extremo inicial de la bobina 1 para el grupo de fase A_2 debe colocarse en la ranura 7, y así sucesivamente.

En la figura 7.4 se muestra otra manera de determinar la ubicación de las bobinas y, por ende, el paso de bobina. Tal esquema se conoce como *diagrama desarrollado*.

■

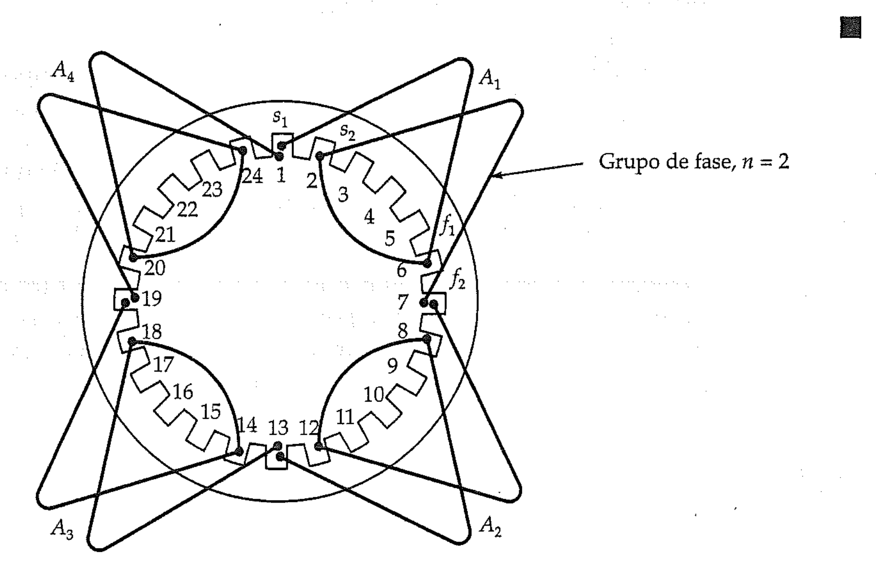


Figura 7.3. Bobinas de la fase A para el estator trifásico, tetrapolar, de 24 ranuras del ejemplo 7.1.

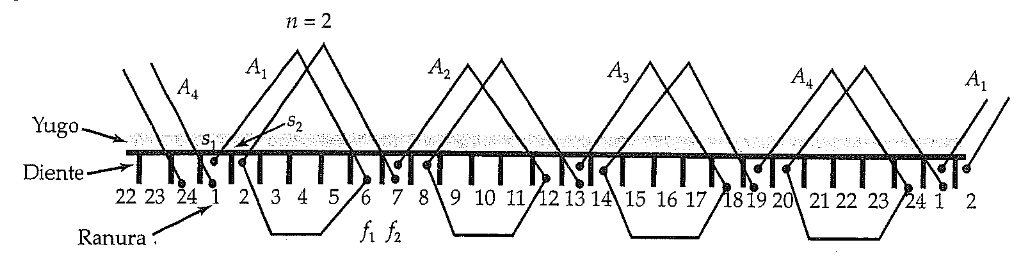


Figura 7.4. Diagrama desarrollado que indica la ubicación de las bobinas de la fase A para el estator trifásico, tetrapolar, de 24 ranuras del ejemplo 7.1.

Ejercicios

7.1. El estator de un generador síncrono de tres fases, octapolar de 60 Hz tiene 48 ranuras. Determine *a*) la velocidad del rotor, *b*) el número de bobinas en un grupo de fase, *c*) el paso de bobina y *d*) el paso de ranura. Trace un esquema del arreglo del devanado completo del estator.

7.2. El estator con 54 ranuras de un generador síncrono, trifásico, hexapolar está devanado para utilizarse a 50 Hz. Determine *a*) el número de bobinas en un grupo de fase, *b*) las ranuras por polo, *c*) el alcance de ranura, *d*) el alcance de bobina y *e*) la velocidad a la que debe girar el rotor.

7.4. Factor de paso

A causa de la distribución espacial de los devanados de campo en cada polo de un rotor cilíndrico, es posible aproximar la densidad del flujo que emana de la superficie de un polo de la manera siguiente:

$$B = B_m \cos\theta \tag{7.3}$$

donde B_m es la densidad de flujo máxima por polo, como se muestra en la figura 7.5. El flujo total que enlaza una bobina de paso completo es

$$\Phi_p = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

donde

$$ds = Lrd\theta_m = \frac{2Lrd\theta}{P}$$

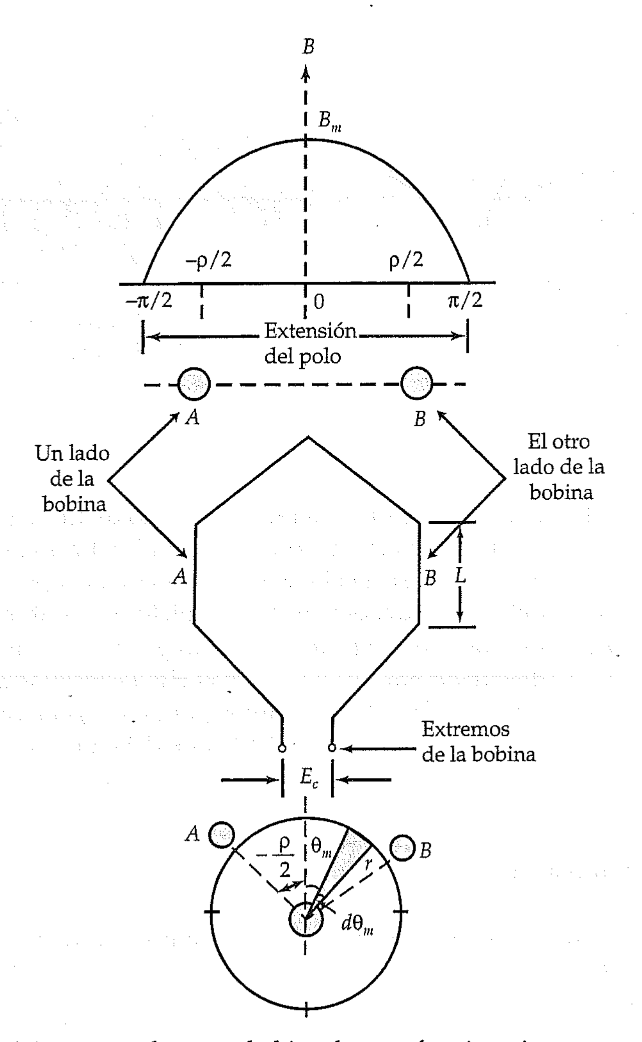


Figura 7.5. Flujo máximo que enlaza una bobina de paso fraccionario.

L es la longitud axial de la bobina (rotor), r es el radio del rotor y P el número de polos. Para una bobina de paso completo, θ varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Al evaluar la integral se obtiene

$$\Phi_P = \frac{4LrB_m}{P} \tag{7.4}$$

Supóngase que el alcance de bobina para una bobina de paso fraccionario es ρ. El flujo que enlaza la bobina es máximo cuando está colocada en forma simétrica con

el eje magnético del polo, como se ilustra en la figura 7.5. Luego, el flujo máximó que enlaza la bobina es

$$\begin{aligned}\Phi_{cm} &= \int_{-\rho/2}^{\rho/2} B_m \cos\theta \, 2Lr \frac{d\theta}{P} \\ &= \frac{4LrB_m}{P} \operatorname{sen}(\rho/2) \\ &= \Phi_p \operatorname{sen}(\rho/2) = \Phi_p k_p \end{aligned} \tag{7.5}$$

donde $k_p = \operatorname{sen}(\rho/2)$ es el factor de paso y $k_p \leq 1$. Si e_c es la fem inducida en una bobina de paso completo, entonces la fem inducida en una bobina de paso fraccionario será $k_p e_c$. Posteriormente se utilizará este hecho para calcular la fem inducida en cada grupo de fase de un generador síncrono.

Ejemplo 7.2

Calcule el factor de paso para un devanado de 48 ranuras, trifásico y tetrapolar.

- Solución

El número de ranuras por polo es 48/4 = 12. Por tanto, la extensión de la ranura es 180/12 = 15° eléctricos.

El número de bobinas en un grupo de fase es

$$n = \frac{48}{4 \times 3} = 4$$

Como hay 12 ranuras por polo y cuatro bobinas en un grupo de fase, un lado de la bobina 1 debe colocarse en la ranura 1 y el otro lado en la ranura 10. Luego, el alcance de bobina es de 9 ranuras o 9 × 15 = 135° eléctricos, como se ilustra en la figura 7.6. El factor de paso es

$$k_p = \operatorname{sen}(135°/2) = 0.924$$

Así, la fem inducida en cada bobina de paso fraccionario es 92.4% de la fem inducida en una bobina de paso completo.

■

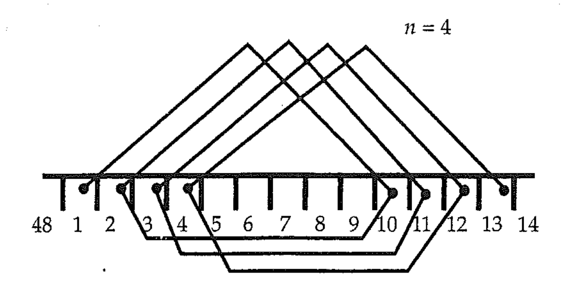


Figura 7.6. Diagrama desarrollado para el estator trifásico, tetrapolar, de 48 ranuras del ejemplo 7.2.

Ejercicios

7.3. Un estator con 72 ranuras tiene un devanado trifásico, tetrapolar. Determine su paso de bobina y su factor de paso. ¿Cuántas bobinas tiene cada grupo de fase?

7.4. Calcule los factores de paso para los devanados trifásicos siguientes: *a*) 36 ranuras y tetrapolar, *b*) 36 ranuras hexapolar y *c*) 72 ranuras hexapolar. Ilustre con esquemas la colocación de las bobinas.

7.5. Factor de distribución

Para hacer que la fem inducida se asemeje a una función senoidal siempre existe más de una bobina en un grupo de fase. Estas bobinas se conectan en serie, como lo indican los diagramas del devanado. Puesto que las bobinas están desplazadas espacialmente una de otra, las fem inducidas en ellas no están en fase. Si E_c es la fem inducida en una bobina y n es el número de bobinas en un grupo de fase, la fem inducida en el grupo de fase E_{pg} es

$$E_{pg} = k_d n E_c \tag{7.6}$$

donde k_d se denomina factor de distribución y $k_d \leq 1$. El factor de distribución es igual a la unidad solamente cuando todas las bobinas están ubicadas en las mismas ranuras. Como eso contraviene el propósito de obtener una forma de onda senoidal, el factor de distribución siempre es menor que la unidad.

A fin de comprobar la ecuación 7.6, supongamos que existen n bobinas conectadas en serie para formar un grupo de fase y el valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida en cada bobina es E_c. Como las bobinas están distribuidas, la fem inducida en cada una de ellas está fuera de fase con la siguiente por un paso de ranura igual a γ, como se aprecia en la figura 7.7. Como el ángulo subtendido por cada fasor del

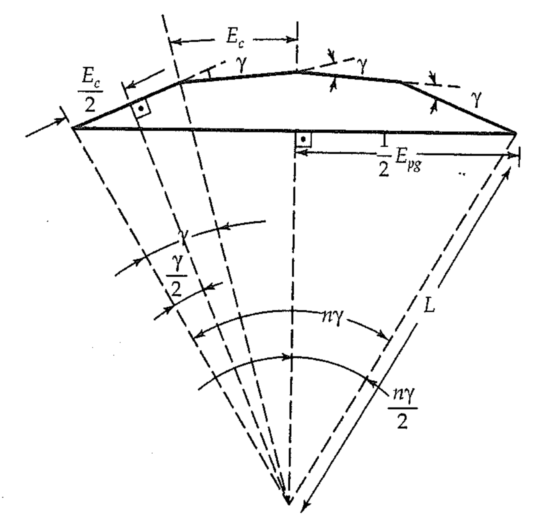


Figura 7.7. Diagrama fasorial para la fem inducida en un grupo de fase.

voltaje de fase es γ, el ángulo total para el grupo de fase es $n\gamma$. Por tanto, puede escribirse

$$\frac{1}{2}E_{pg} = L \operatorname{sen}\left(\frac{n\gamma}{2}\right)$$

y

$$\frac{1}{2}E_c = L \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{E_{pg}}{E_c} = \frac{\operatorname{sen}(n\gamma/2)}{\operatorname{sen}(\gamma/2)} = \frac{n \operatorname{sen}(n\gamma/2)}{n \operatorname{sen}(\gamma/2)}$$

Luego, la fem inducida por grupo de fase es

$$E_{pg} = n\frac{\operatorname{sen}(n\gamma/2)}{n \operatorname{sen}(\gamma/2)}E_c = nk_dE_c \tag{7.7}$$

donde

$$k_d = \frac{\operatorname{sen}(n\gamma/2)}{n \operatorname{sen}(\gamma/2)} \tag{7.8}$$

es el factor de distribución.

Ejemplo 7.3

Calcule el factor de distribución para un devanado trifásico con 108 ranuras y 12 polos.

- **Solución**

El número de bobinas en un grupo de fase es

$$n = \frac{108}{12 \times 3} = 3$$

Como hay 108/12 = 9 ranuras por polo, el alcance de ranura en grados eléctricos es

$$\gamma = \frac{180}{9} = 20°$$

Con base en la ecuación 7.8, el factor de distribución es

$$k_d = \frac{\text{sen } (3 \times 20/2)}{3 \text{ sen } (20/2)} = 0.96$$

■

Ejercicios

7.5. Determine el factor de distribución para un devanado trifásico, tetrapolar con 72 ranuras.

7.6. Calcule el factor de distribución para un devanado trifásico, octapolar con 120 ranuras.

7.6. Conexiones de los devanados

A fin de explicar las conexiones de los devanados, analicemos de manera pormenorizada los devanados de fase de un estator (armadura) trifásico hexapolar de un generador síncrono con un rotor de polos salientes, según se ilustra en la figura 7.8. Cada grupo de fase está indicado por una sola bobina. Para una rotación en el sentido de las manecillas del reloj y la secuencia de fase positiva, las fases *B* y *C* están desplazadas 120° y 240° eléctricos respecto a la fase *A* para cada uno de los seis polos. La polaridad de la fem inducida en cada grupo de fase en un instante del tiempo está marcada con un punto (•). Los seis grupos de fase para cada una de las tres fases pueden conectarse de tres modos. Consideremos sólo una de las tres fases; las otras dos están conectadas exactamente de la misma forma.

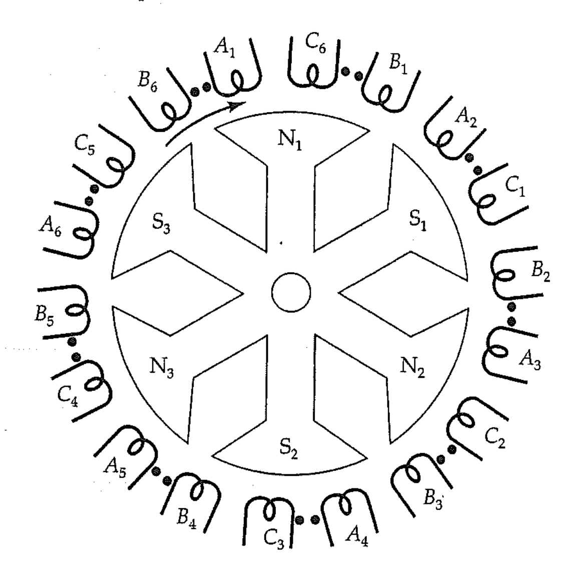


Figura 7.8. Devanados de fase de una armadura trifásica hexapolar.

La magnitud de la fem inducida en cualquier momento en cada grupo de fase de la fase A es la misma. Es posible establecer una *conexión serie* simplemente conectando en serie los seis grupos de fase, como se muestra en la figura 7.9*a*. El voltaje generado por fase (voltaje de fase) es seis veces la fem inducida en cada grupo de fase, pero sólo hay una trayectoria para la corriente. En general, si E_{pg} es la fem inducida en un grupo de fase y P es el número de polos, el voltaje de fase es PE_{pg}. Ésta es la mejor conexión para unir un generador síncrono a una línea de transmisión de alto voltaje.

Los tres grupos de fase bajo los polos norte pueden conectarse en serie. De igual forma, los tres grupos de fase bajo los polos sur pueden conectarse en serie. A continuación, los dos grupos pueden conectarse en paralelo, como se aprecia en la figura 7.9*b*. El voltaje de fase es la mitad de la conexión serie, pero la capacidad de conducción de corriente se duplica.

También es posible establecer una *conexión paralelo* conectando todos los grupos de fase en paralelo, como se indica en la figura 7.9*c*. El voltaje de fase es igual a la fem inducida en un grupo de fase, pero hay seis trayectorias paralelas.

En general, para un generador síncrono con P polos y a trayectorias paralelas, el voltaje de fase, E_a, es

$$E_a = \frac{P}{a} E_{pg} \tag{7.9}$$

Las dos terminales, los extremos inicial y final de cada fase se llevan fuera para formar una conexión en Y o en Δ. Si el generador va a conectarse a una línea de transmisión de alto voltaje, la mejor conexión es en Y.

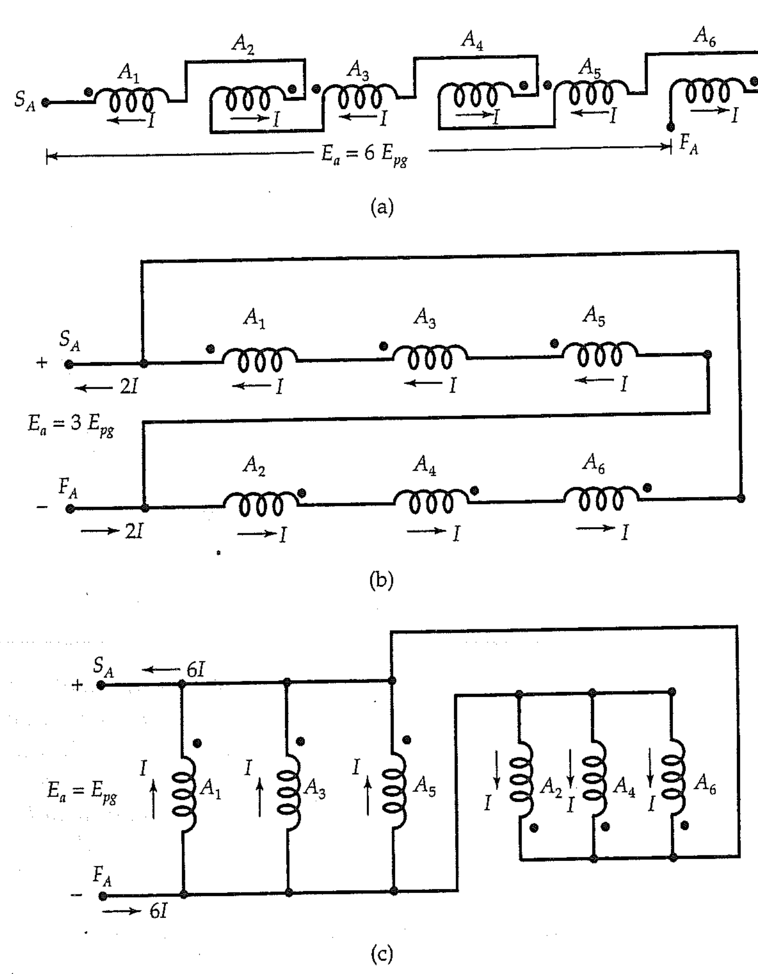


Figura 7.9. Conexiones del devanado para la fase A: **(a)** conexión en serie, **(b)** conexión en paralelo y **(c)** conexión en paralelo.

Ejemplo 7.4

Muestre la colocación de cada devanado de fase y las conexiones del devanado para un generador síncrono con 24 ranuras, trifásico, tetrapolar *a)* conectado en Y y *b)* conectado en Δ.

• Solución

Hay seis ranuras por polo y el alcance de ranura es de 30° eléctricos. Hay dos bobinas en un grupo de fase, y la bobina abarca cinco ranuras. Luego, el paso de bobina es de 150° eléctricos.

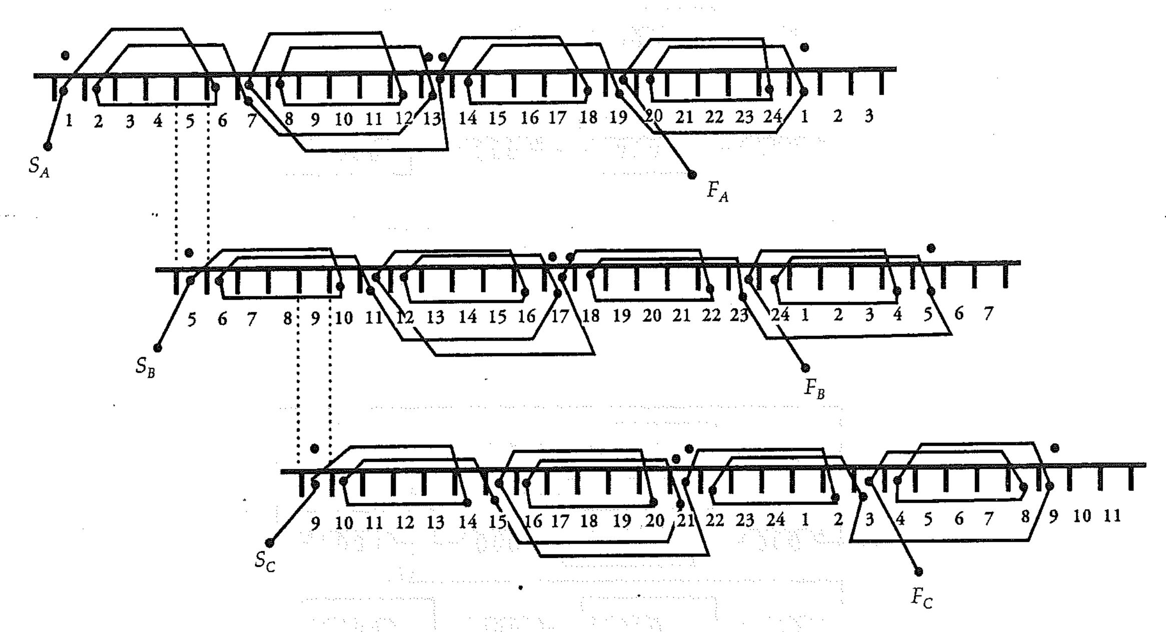


Figura 7.10. Colocación de los devanados de fase *A*, *B* y *C* para un generador síncrono, trifásico, tetrapolar, de 24 ranuras.

Los extremos iniciales de las dos bobinas para el grupo de fase A_1 están colocados en las ranuras 1 y 2, mientras que los extremos finales están insertados en las ranuras 6 y 7, como se aprecia en la figura 7.10*a*. El extremo final f_1 está conectado internamente al extremo inicial s_2 para formar un grupo de fase. Si el grupo de fase A_1 está bajo el polo norte, el grupo de fase A_3 también está bajo el polo norte. Al mismo tiempo, los grupos de fase A_2 y A_4 están bajo los polos sur. Por tanto, si la fem inducida en el grupo de fase A_1 (es decir, el voltaje entre s_1 y f_2) es positivo, esto mismo es cierto para el grupo de fase A_3. Sin embargo, la fem inducida en los grupos de fase A_2 y A_4 tiene polaridad opuesta. Habiendo comprendido lo anterior, es posible conectar los cuatro grupos de fase en serie para formar una conexión serie, como se muestra en la figura 7.10*a*.

Con objeto de desplazar 120° eléctricos al grupo de fase B_1 respecto del grupo de fase A_1, el extremo inicial de su primera bobina debe insertarse en la ranura 5, como se indica en la figura 7.10*b*. En otras palabras, cada grupo de fase está desplazado cuatro ranuras a la derecha. Los grupos de fase para la fase *B* pueden conectarse del mismo modo que se hizo para la fase *A*.

El extremo inicial de la primera bobina para la fase *C* debe colocarse en la ranura 9 a fin de lograr una diferencia de fase de 240° eléctricos respecto a la fase *A*. En la figura 7.10*c* se muestra el resto de las conexiones.

En la figura 7.11 se ilustra cómo pueden conectarse los devanados de fase a una conexión en Y o en Δ.

■

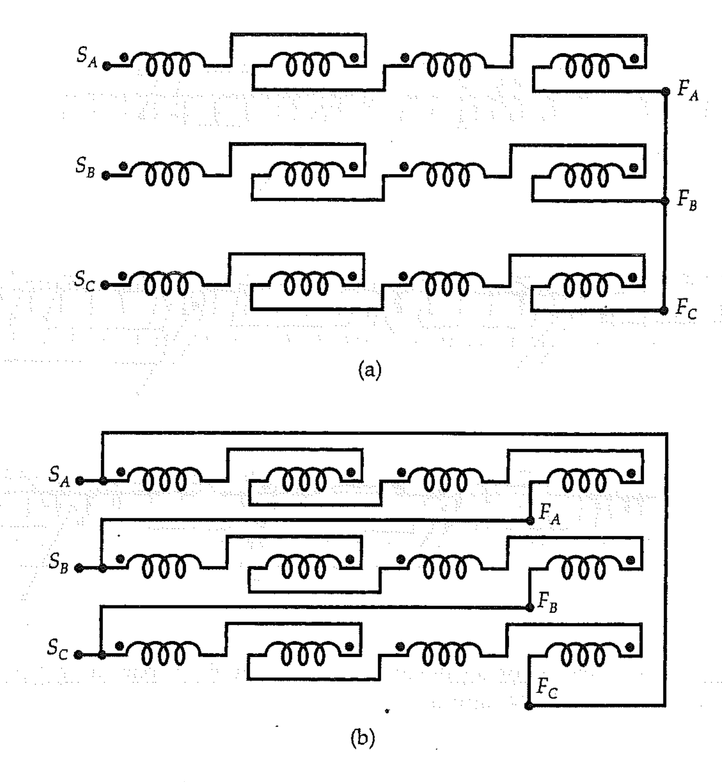


Figura 7.11. Armadura conectada en **(a)** Y y **(b)** en Δ de un generador síncrono trifásico.

Ejercicios

7.7. Muestre la colocación de cada devanado de fase y las conexiones del devanado para un generador síncrono, trifásico, hexapolar con 36 ranuras conectado en *a*) Y y *b*) Δ. Suponga una conexión serie.

7.8. Muestre la colocación de cada devanado de fase y las conexiones del devanado para un generador síncrono, trifásico, bipolar, con 12 ranuras, conectado en *a*) Y y *b*) Δ. Suponga una conexión serie.

7.7. Ecuación de la fem inducida

Supongamos que el flujo total que emana por polo de un rotor cilíndrico que gira a una velocidad angular de ω_s es Φ_P. El flujo máximo que enlaza la bobina de paso fraccionario es $\Phi_P\, k_p$, donde $k_p = \text{sen}\,(\rho/2)$ es el factor de paso y ρ es el alcance de bo-

bina en grados eléctricos. A medida que el flujo gira, el flujo que enlaza a la bobina en cualquier momento t puede expresarse como

$$\Phi_c = \Phi_P k_p \cos \omega t \tag{7.10}$$

donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular en rad/s.

Para una bobina con N_c vueltas, con base en la ley de Faraday la fem inducida en la bobina es

$$e_c = N_c k_p \omega \Phi_P \operatorname{sen} \omega t \tag{7.11}$$

El valor máximo de la fem inducida es

$$E_m = N_c k_p \omega \Phi_P \tag{7.12}$$

y su valor medio cuadrático (rms) es

$$E_c = \frac{1}{\sqrt{2}} E_m$$

$$= 4.44 f N_c k_p \Phi_P \tag{7.13}$$

donde el factor $\sqrt{2}\,\pi$ se ha aproximado a 4.44.

Puesto que en general un grupo de fase tiene más de una bobina conectada en serie y cada una de ellas está desplazada por un paso de ranura, la fem inducida en el grupo de fase, según la ecuación 7.7, es

$$E_{pg} = n k_d E_c = 4.44\, n N_c k_p k_d f \Phi_P \tag{7.14}$$

donde n es el número de bobinas en un grupo de fase y k_d es el factor de distribución tal como lo expresa la ecuación 7.8. Para un generador específico, el producto $k_p k_d$ es constante y se denomina *factor del devanado*. Así, el factor del devanado, k_w, es

$$k_w = k_p k_d \tag{7.15}$$

El valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida en cada grupo de fase puede expresarse en términos del factor del devanado como

$$E_{pg} = 4.44\, n N_c k_w f \Phi_P \tag{7.16}$$

Para un generador con P polos y a trayectorias paralelas, la fem inducida por fase (*voltaje de fase*) es

$$E_a = \frac{P}{a} 4.44\, n N_c k_w f \Phi_P \tag{7.17}$$

En la ecuación anterior, el factor PnN_c/a representa el número real de vueltas por fase conectadas en serie cuando existen a trayectorias paralelas. Si se tiene en cuenta el factor del devanado, k_w, es posible definir las *vueltas efectivas por fase* como

$$N_e = \frac{PnN_ck_w}{a} \tag{7.18}$$

Finalmente, se obtiene una expresión para el voltaje por fase (sin carga) como sigue:

$$E_a = 4.44 fN_e\Phi_P \tag{7.19}$$

Observe que la ecuación 7.19 es muy semejante a la obtenida para un transformador. En el caso de un transformador, el número efectivo de vueltas es el mismo que el número real porque cada uno de sus devanados consta de una bobina que abarca el flujo total en el núcleo magnético. El factor del devanado para un generador síncrono también podría haber sido igual a la unidad si *a*) se hubiera utilizado una bobina de paso completo y *b*) todas las bobinas en un grupo de fase se colocaran en las mismas ranuras.

Ejemplo 7.5

Cada bobina de un generador síncrono con devanado de doble capa, trifásico, de 16 polos y 144 ranuras, conectado en Y tiene 10 vueltas. El rotor se impulsa a una velocidad de 375 rpm. El flujo por polo es de 25 mWb. Cada devanado de fase está conectado en dos trayectorias paralelas. Determine *a*) la frecuencia de la fem inducida, *b*) el voltaje de fase y *c*) el voltaje de línea.

- Solución

Como hay tantas bobinas como ranuras en la armadura para un devanado de doble capa, el número de bobinas en un grupo de fase es

$$n = \frac{144}{16 \times 3} = 3$$

El número de ranuras por polo es: $S_p = 144/16 = 9$
Por tanto, el alcance de ranura es: $\gamma = 180/9 = 20°$ eléctricos. Como hay nueve ranuras por polo y tres bobinas en un grupo de fase, cada bobina debe extenderse siete

ranuras. Así, el paso de bobina es 20 × 7 = 140° eléctricos. A continuación puede calcularse el factor de paso y los factores de distribución y del devanado, como sigue:

$$k_p = \text{sen}\,(140/2) = 0.94$$

$$k_d = \frac{\text{sen}\,(3 \times 20/2)}{3 \times \text{sen}\,(20/2)} = 0.96$$

$$k_w = 0.94 \times 0.96 = 0.902$$

El número de vueltas efectivas por fase es

$$N_e = \frac{16 \times 3 \times 10 \times 0.902}{2} = 216.48$$

a) La frecuencia del voltaje generado es

$$f = \frac{375 \times 16}{120} = 50\text{ Hz}$$

b) El valor medio cuadrático (rms) del voltaje generado por fase es

$$E_a = 4.44 \times 50 \times 216.48 \times 0.025 = 1201.46\text{ V}$$

c) El valor medio cuadrático (rms) del voltaje de línea es

$$E_L = \sqrt{3} \times 1201.46 \approx 2\,081\text{ V}$$

■

Ejercicios

7.9. Un generador síncrono con 36 ranuras, trifásico, tetrapolar, conectado en Y tiene 10 vueltas por bobina. El flujo por polo es de 50 mWb. Para una conexión serie, calcule *a*) la velocidad síncrona, *b*) el voltaje por fase y *c*) el voltaje de línea.

7.10. El voltaje sin carga (línea) de un generador síncrono con 72 ranuras, 1 200 rpm, trifásico, hexapolar, conectado en Y es de 1 732 V. Hay 10 conductores por ranura. Para una conexión serie, calcule *a*) la frecuencia de la fem inducida y *b*) el flujo por polo.

7.8. El circuito equivalente

Durante la exposición sobre los generadores de cc se concluyó que el voltaje en las terminales de un generador de cc es menor que el voltaje generado debido a *a*) la caída de voltaje a través del devanado de su armadura y *b*) la disminución del flujo en la armadura ocasionado por la reacción de ésta. Sin embargo, el voltaje en las terminales de un generador de ca depende de la carga y puede ser mayor o menor que el voltaje generado. En efecto, deseamos demostrar que el voltaje en las terminales *puede, en realidad, ser más alto* que el voltaje generado cuando el factor de potencia (fp) es en adelanto. Para factores de potencia iguales a la unidad y en atraso, el voltaje en las terminales es menor que el voltaje generado.

Caída de voltaje en la resistencia de la armadura

Sea $\tilde{E}_a$ el voltaje generado por fase de un generador síncrono e $\tilde{I}_a$ la corriente por fase suministrada por éste a la carga. Si R_a es la resistencia por fase del devanado de la armadura, entonces $\tilde{I}_a R_a$ es la caída de voltaje a través de ella. La caída de voltaje $\tilde{I}_a R_a$ está en fase con la corriente de la carga $\tilde{I}_a$. Como R_a también ocasiona una pérdida de potencia en el generador, se mantiene tan pequeña como sea posible, en especial para máquinas grandes.

Caída de voltaje por reactancia de dispersión en la armadura

La corriente $\tilde{I}_a$ en el devanado de la armadura produce un flujo. Una parte de éste, llamada *flujo de dispersión*, sólo enlaza al devanado de la armadura y origina una reactancia de dispersión X_a. La reactancia de dispersión ocasiona una caída de voltaje, $j\tilde{I}_a X_a$, la cual está en adelanto de $\tilde{I}_a$ en 90°. En la figura 7.12 se muestran diagramas fasoriales que ilustran las relaciones entre el voltaje generado por fase $\tilde{E}_a$, el voltaje en las terminales por fase $\tilde{V}_a$ y las caídas de voltaje $\tilde{I}_a R_a$ y $j\tilde{I}_a X_a$ para tres tipos de cargas.

Reacción de la armadura

El flujo producido por el devanado de la armadura reacciona con el flujo establecido por los polos sobre el rotor, lo que ocasiona que el flujo total cambie. Tal interacción entre los dos flujos se conoce como *reacción de la armadura*. Para comprender el efecto de la reacción de la armadura sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono, estudiaremos la sucesión de hechos que ocurren cuando el generador alimenta una carga con un factor de potencia igual a la unidad.

a) Si Φ_P es el flujo por polo en el generador sin carga, entonces el voltaje generado E_a debe estar en atraso respecto de Φ_P en 90°, como se muestra en la figura 7.13.

b) Como el factor de potencia es igual a la unidad, la corriente de fase $\tilde{I}_a$ está en fase con el voltaje de fase en las terminales $\tilde{V}_a$.

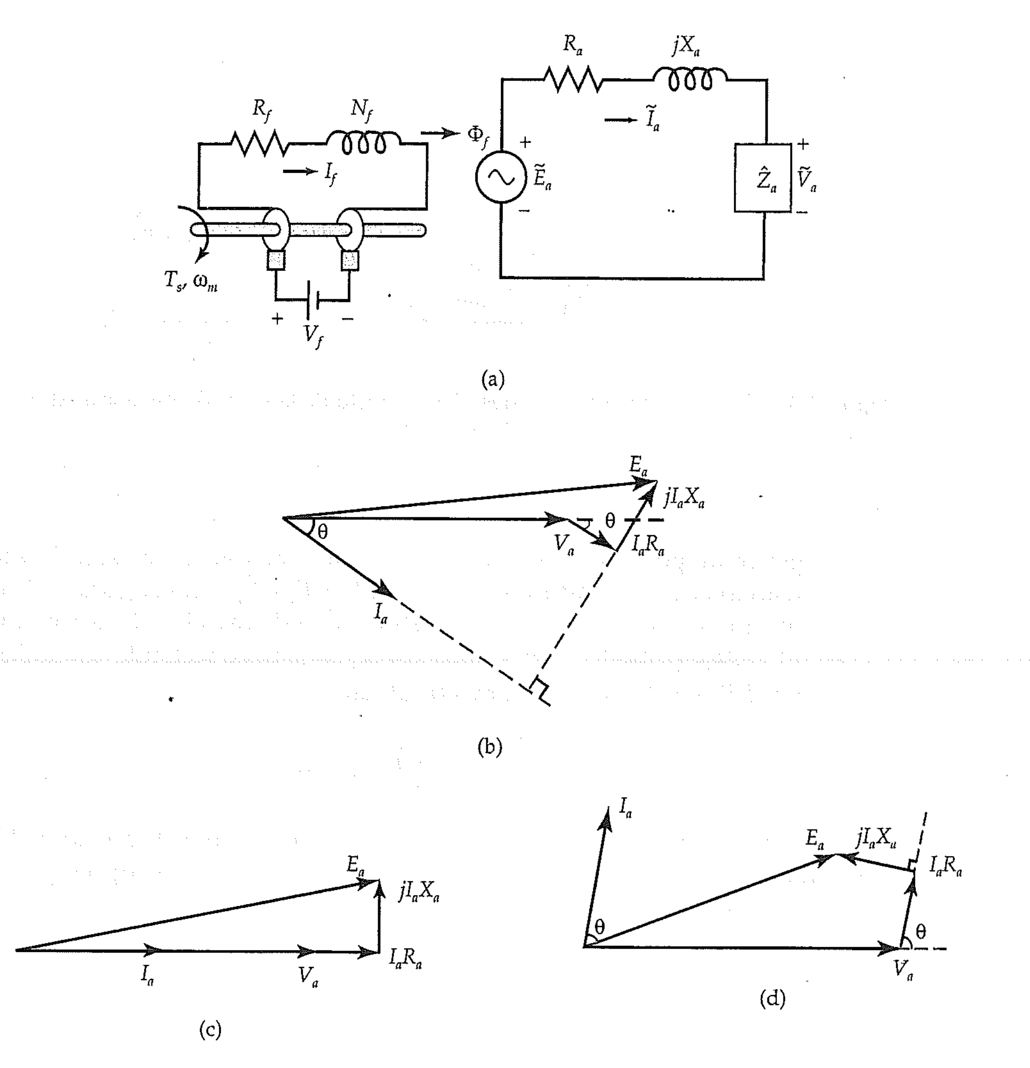


Figura 7.12. **(a)** Circuito equivalente por fase de un generador síncrono sin reacción de la armadura; también se ilustra el campo revolvente producido por el rotor. Los diagramas fasoriales para un factor de potencia **(b)** en atraso, **(c)** unitario y **(d)** en adelanto.

c) A medida que la corriente de fase $\tilde{I}_a$ pasa a través del devanado de la armadura, su fuerza magnetomotriz (fmm) produce un flujo Φ_{ar} que está en fase con $\tilde{I}_a$. El flujo efectivo Φ_e por polo en el generador es la suma algebraica de los dos flujos; es decir, $\Phi_e = \Phi_P + \Phi_{ar}$, como se muestra en la figura 7.13.

d) A su vez, el flujo Φ_{ar} induce una fem $\tilde{E}_{ar}$ en el devanado de la armadura. $\tilde{E}_{ar}$ se conoce como *fem de reacción de la armadura*. La fem de reacción en la armadura $\tilde{E}_{ar}$ está en atraso respecto del flujo Φ_{ar} en 90°. Luego, el voltaje efectivo

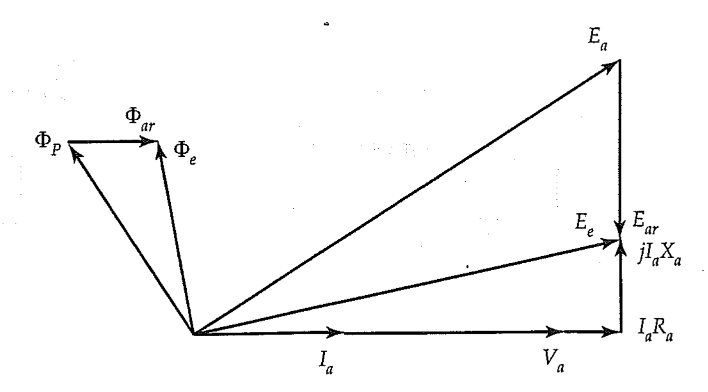


Figura 7.13. Diagrama fasorial que describe el efecto de la reacción de la armadura cuando el factor de potencia es igual a la unidad.

generado por fase $\tilde{E}_e$ es la suma algebraica del voltaje sin carga $\tilde{E}_a$ y la fem de reacción de la armadura $\tilde{E}_{ar}$. Es decir, $\tilde{E}_e = \tilde{E}_a + \tilde{E}_{ar}$. En la figura 7.14 se aprecia un circuito equivalente que muestra la fem de reacción de la armadura.

e) El voltaje en las terminales por fase $\tilde{V}_a$ se obtiene restando las caídas de voltaje $\tilde{I}_aR_a$ y $j\tilde{I}_aX_a$ de $\tilde{E}_e$. En otras palabras,

$$\tilde{E}_e = \tilde{V}_a + \tilde{I}_a(R_a + jX_a) \tag{7.20}$$

Del diagrama fasorial debe resultar evidente que la reacción de la armadura ha reducido el flujo efectivo por polo cuando el factor de potencia de la carga es igual a la unidad. Asimismo, el voltaje en las terminales es menor que el voltaje generado.

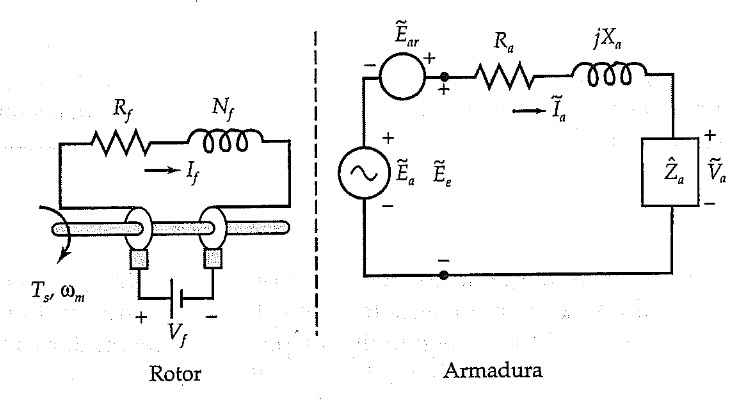


Figura 7.14. Circuito equivalente por fase que muestra la fem inducida en el devanado de la armadura debida a la reacción de ésta.

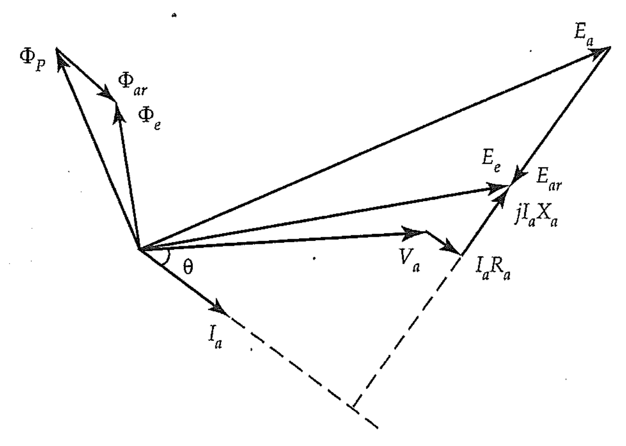


Figura 7.15. Diagrama fasorial que muestra el efecto de la reacción de la armadura cuando el factor de potencia está en atraso.

Al seguir la anterior cadena de hechos es posible obtener diagramas fasoriales para los factores de potencia en atraso (fig. 7.15) y en adelanto (fig. 7.16). De estas figuras es evidente que el flujo resultante es menor/mayor con la reacción de la armadura para el factor de potencia en atraso/adelanto que sin ella. Además, el voltaje en las terminales $\tilde{V}_a$ es más alto/más bajo que el voltaje generado $\tilde{E}_a$ cuando el factor de potencia está en adelanto/en atraso. Puesto que el flujo por polo Φ_P es diferente para cada una de las tres condiciones de carga, la corriente de campo I_f debe ajustarse cada vez que se modifica la carga.

Como la fem de reacción de la armadura $\tilde{E}_{ar}$ está en atraso respecto de la corriente $\tilde{I}_a$ en 90°, también puede expresarse como sigue:

$$\tilde{E}_{ar} = -j\tilde{I}_a X_m \tag{7.21}$$

donde X_m es una constante de proporcionalidad conocida como *reactancia de magnetización*.

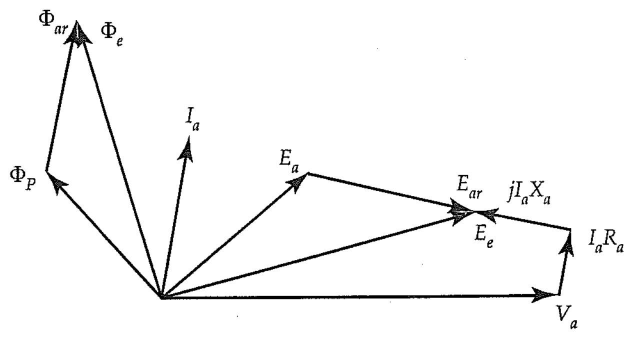


Figura 7.16. Diagrama fasorial que muestra el efecto de la reacción de la armadura cuando el factor de potencia de la carga está en adelanto.

Tanto la reactancia de magnetización como la de dispersión están presentes al mismo tiempo. Resulta difícil separar una de la otra, por lo que se combinan y la suma

$$X_s = X_m + X_a \tag{7.22}$$

se conoce como *reactancia síncrona*. La reactancia síncrona suele ser muy grande en comparación con la resistencia del devanado de la armadura. En seguida puede definirse la *impedancia síncrona* por fase, como sigue:

$$\hat{Z}_s = R_a + jX_s \tag{7.23}$$

El circuito equivalente y los diagramas fasoriales

En la figura 7.17 se muestra el circuito equivalente exacto de un generador síncrono por fase que incorpora la reactancia síncrona. El voltaje en las terminales por fase es

$$\tilde{V}_a = \tilde{E}_a - \tilde{I}_a(R_a + jX_s) = \tilde{E}_a - \tilde{I}_a\hat{Z}_s \tag{7.24}$$

Los diagramas fasoriales correspondientes para los tres tipos de cargas se presentan en la figura 7.17.

Regulación del voltaje

La regulación del voltaje de un generador síncrono se define como la razón de cambio en el voltaje en las terminales desde el voltaje sin carga hasta plena carga. Como E_a es el voltaje sin carga y V_a es el voltaje en las terminales a plena carga, la regulación porcentual del voltaje es

$$RV\% = \frac{E_a - V_a}{V_a} \times 100 \tag{7.25}$$

Ejemplo 7.6

Un generador síncrono de 9 kVA, 208 V, trifásico y conectado en Y tiene un devanado con resistencia de 0.1 Ω/fase y una reactancia síncrona de 5.6 Ω/fase. Determine su regulación del voltaje cuando el factor de potencia de la carga es *a*) 80% en atraso, *b*) la unidad y *c*) 80% en adelanto.

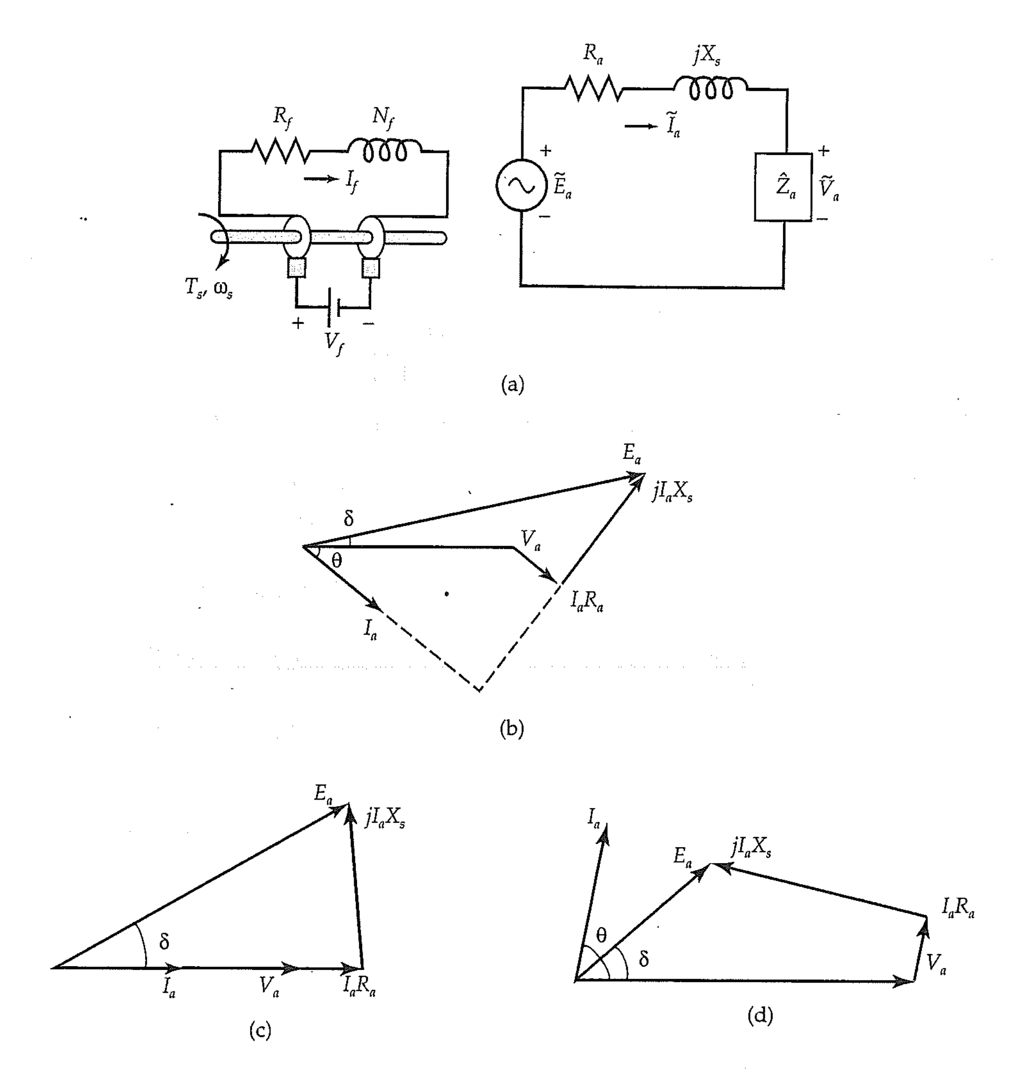


Figura 7.17. **(a)** Circuito equivalente por fase de un generador síncrono con reacción de la armadura y los diagramas fasoriales correspondientes para factor de potencia de cargas **(b)** en atraso, **(c)** igual a la unidad y **(d)** en adelanto.

• Solución

Como la regulación del voltaje está definida solamente a plena carga, supondremos que el generador entrega plena carga a su voltaje nominal (o especificada). Por tanto,

$$V_a = \frac{208}{\sqrt{3}} \approx 120 \text{ V}$$

El valor medio cuadrático (rms) de la corriente por fase a plena carga es

$$I_a = \frac{9000}{120 \times 3} = 25 \text{ A}$$

a) Para un factor de potencia en atraso de 0.8, $\theta = -36.87°$.

$$\tilde{E}_a = 120 + (0.1 + j5.6) \times 25\underline{/-36.87°}$$
$$= 233.77\underline{/28.21°} \text{ V}$$
$$RV\% = \frac{233.77 - 120}{120} \times 100 = 94.8\%$$

b) Para un factor de potencia igual a la unidad, $\theta = 0°$.

$$\tilde{E}_a = 120 + (0.1 + j5.6) \times 25\underline{/0°}$$
$$= 186.03\underline{/48.81°} \text{ V}$$
$$RV\% = \frac{186.03 - 120}{120} \times 100 = 55.03\%$$

c) Para un factor de potencia en adelanto de 0.8, $\theta = 36.87°$.

$$\tilde{E}_a = 120 + (0.1 + j5.6) \times 25\underline{/36.87°}$$
$$= 119.69\underline{/71.49°} \text{ V}$$
$$RV\% = \frac{119.69 - 120}{120} \times 100 = -0.26\%$$

■

Ejercicios

7.11. La impedancia síncrona de un generador síncrono, trifásico de 13.2 kVA, 440 V, conectado en Δ es de $1 + j10$ Ω/fase. Calcule la regulación del voltaje cuando el generador suministra plena carga con un factor de potencia de *a*) 0.866 en atraso, *b*) la unidad y *c*) 0.866 en adelanto.

7.12. Un generador síncrono, trifásico, conectado en Y alimenta una carga nominal de 12 MW con un factor de potencia de 0.8 en atraso. La impedancia síncrona es de $0.2 + j2$ Ω/fase. Si el voltaje en las terminales (línea) es de 11 kV, calcule el voltaje sin carga de línea. ¿Cuál es la regulación del voltaje?

7.13. Un generador síncrono, trifásico, de 60 kVA y 50 Hz, conectado en Y está diseñado para suministrar plena carga a 480 V. El factor de potencia de la carga es de 0.9 en atraso. La impedancia síncrona es de $0.15 + j1.3$ Ω/fase. Determine la regulación del voltaje del generador.

7.9. Relaciones de potencia

El rotor de un generador síncrono está conectado a una máquina impulsora que puede ser un motor de cc, una turbina de vapor, una turbina de gas, un motor diesel o un equipo similar. Si el impulsor primario ejerce un par de T_s en el eje con una velocidad angular de ω_s, la potencia mecánica suministrada al rotor es $T_s\omega_s$. En consecuencia, la potencia mecánica alimentada al generador es

$$P_{inm} = T_s\omega_s \tag{7.26a}$$

La potencia de entrada de cc a un rotor devanado es $V_f I_f$, donde V_f es el voltaje de cc a través del devanado del campo e I_f es la corriente continua a través de éste. Por tanto, la potencia total alimentada es

$$P_{in} = T_s\omega_s + V_f I_f \tag{7.26b}$$

Las pérdidas en un generador síncrono consisten en la pérdida por rotación (pérdidas mecánica y magnética), la pérdida en el cobre en el devanado de la armadura, la pérdida por excitación del campo en el devanado del campo y la pérdida por carga parásita, si la hay. La pérdida por rotación, la pérdida en el devanado del campo y la pérdida por carga parásita se restan de la entrada de potencia para obtener la potencia desarrollada por la armadura. Al restar las pérdidas en el cobre en la armadura de la potencia desarrollada se obtiene la potencia de salida de un generador síncrono, como se ilustra en el diagrama de flujo de potencia de la figura 7.18.

Si V_a es el voltaje de la carga por fase, I_a es la corriente de la carga por fase y θ es el ángulo de fase entre V_a e I_a, la potencia de salida de un generador síncrono es

$$P_o = 3V_a I_a \cos\theta \tag{7.27}$$

La pérdida en el cobre en el devanado de la armadura es

$$P_{co} = 3I_a^2 R_a \tag{7.28}$$

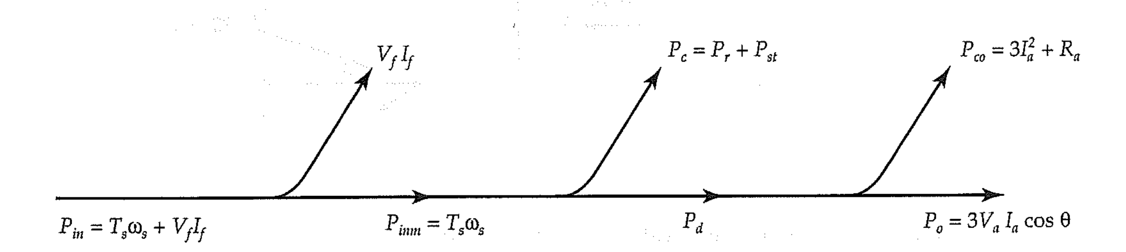


Figura 7.18. Diagrama de flujo de potencia de un generador síncrono.

Si P_r es la pérdida por rotación de un generador síncrono y P_{st} es la pérdida por carga parásita, entonces la potencia de entrada es

$$P_{in} = 3V_aI_a \cos\theta + 3I_a^2R_a + P_r + P_{st} + V_fI_f \tag{7.29}$$

Como el rotor gira a velocidad constante, la pérdida por rotación es constante. La pérdida por el devanado del campo es constante. Suponiendo que la pérdida por carga parásita fuera constante, es posible agrupar esas pérdidas y tratarlas como una pérdida constante. Luego, la pérdida constante es

$$P_c = P_r + P_{st} + V_fI_f \tag{7.30}$$

Puesto que la pérdida en el cobre en la armadura depende de la corriente de la carga, se considera una pérdida variable.

La eficiencia del generador es

$$\eta = \frac{3V_aI_a\cos\theta}{3V_aI_a\cos\theta + P_c + 3I_a^2R_a} \tag{7.31}$$

De la ecuación anterior se obtiene una condición para la eficiencia máxima como sigue:

$$3I_a^2R_a = P_c \tag{7.32}$$

Relación de potencia aproximada

Como se indicó previamente, la resistencia por fase del devanado de la armadura de un generador síncrono suele ser muy pequeña, y puede despreciarse en comparación con su reactancia síncrona. En la figura 7.19 se muestra el circuito equivalente aproximado y el diagrama fasorial correspondiente para una carga en atraso. Observe que

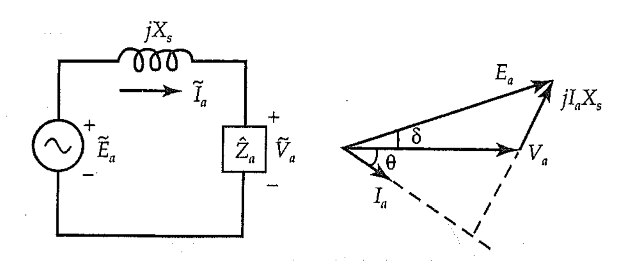


Figura 7.19. Circuito equivalente aproximado de un generador síncrono y su diagrama fasorial para una carga con factor de potencia en atraso.

el voltaje por fase en las terminales $\tilde{V}_a$ se ha tomado como referencia, y el voltaje por fase generado $\tilde{E}_a$ está en adelanto respecto de $\tilde{V}_a$ en un ángulo δ. La corriente de fase $\tilde{I}_a$ está en atraso respecto de $\tilde{V}_a$ en un ángulo θ. Por tanto,

$$\tilde{E}_a = E_a \cos \delta + jE_a \operatorname{sen} \delta \tag{7.33}$$

e

$$\tilde{I}_a = I_a \cos \theta - jI_a \operatorname{sen} \theta \tag{7.34}$$

donde E_a e I_a son los valores medios cuadráticos (rms) de $\tilde{E}_a$ e $\tilde{I}_a$.

El voltaje por fase en las terminales es

$$\tilde{V}_a = \tilde{E}_a - j\tilde{I}_a X_s$$

o

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{E}_a - \tilde{V}_a}{jX_s}$$

$$= \frac{E_a \operatorname{sen} \delta}{X_s} - j\frac{E_a \cos \delta - V_a}{X_s}$$

Luego,

$$I_a \cos \theta = \frac{E_a \operatorname{sen} \delta}{X_s}$$

Por consiguiente, la potencia de salida aproximada del generador es

$$P_o = 3V_a I_a \cos \theta$$

$$= \frac{3V_a E_a \operatorname{sen} \delta}{X_s} \tag{7.35}$$

Cuando un generador síncrono opera a velocidad constante con una corriente del campo constante, X_s y E_a son también constantes. V_a es el voltaje en las terminales, el cual generalmente se mantiene constante. Por tanto, la potencia de salida del generador varía como el sen δ, donde δ es el ángulo entre $\tilde{V}_a$ y $\tilde{E}_a$ y se denomina *ángulo de potencia*. La ecuación 7.35 se conoce como *relación del ángulo de potencia*. Esta relación también se muestra en la curva del ángulo de potencia de la figura 7.20. En el desarrollo de la ecuación 7.35 tácitamente se supuso un rotor cilíndrico. Para un rotor de polos salientes, la curva resulta un tanto modificada y queda indicada por la línea punteada. Más adelante desarrollaremos la relación entre el ángulo de potencia y la salida de potencia para rotores de polos salientes.

Para una cantidad de corriente de campo específica y cierto voltaje en las terminales, la potencia máxima de salida P_{om} (o potencia desarrollada P_{dm}) de un generador síncrono es

$$P_{dm} = P_{om} = \frac{3V_a E_a}{X_s} \tag{7.36}$$

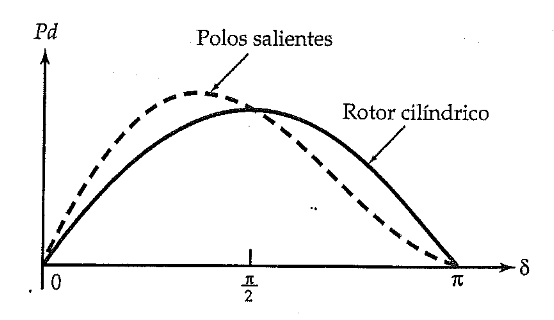


Figura 7.20. La potencia desarrollada como función del ángulo de potencia para un rotor cilíndrico (sólido) y un rotor de polos salientes (línea punteada).

Con base en la ecuación 7.35, el par desarrollado es

$$T_d = \frac{3V_aE_a \text{ sen } \delta}{X_s\omega_s} \tag{7.37}$$

Como el par desarrollado también es proporcional a sen δ, el ángulo δ también se conoce como *ángulo de par*. El par desarrollado por un generador síncrono se opone al par aplicado por el impulsor primario.

Según la ecuación 7.36, el par máximo desarrollado por el generador síncrono es

$$T_{dm} = \frac{3V_aE_a}{X_s\omega_s} \tag{7.38}$$

Ejemplo 7.7

Un generador síncrono, trifásico de 9 kVA, 208 V, 1 200 rpm, 60 Hz y conectado en Y tiene una resistencia en el devanado del campo de 4.5 Ω. La impedancia del devanado de la armadura es de 0.3 + *j*5 Ω/fase. Cuando el generador opera a plena carga con un factor de potencia de 0.8 en atraso, la corriente en el devanado del campo es de 5 A. La pérdida por rotación es de 500 W. Determine *a*) la regulación del voltaje, *b*) la eficiencia del generador y *c*) el par aplicado por el impulsor primario.

- Solución

El voltaje por fase en las terminales es: $V_a = 208/\sqrt{3} \approx 120$ V.
La potencia aparente por fase del generador es 9/3 = 3 kVA. Por tanto, la corriente

especificada por fase es de 3 000/120 = 25 A. Para un factor de potencia de 0.8 en atraso,

$$\tilde{I}_a = 25\underline{/-36.87^\circ}\ \text{A}$$

Luego, el voltaje por fase generado es

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a &= 120 + (0.3 + j5) \times 25\underline{/-36.87^\circ} \\ &= 222.534\underline{/25.414^\circ}\ \text{V}\end{aligned}$$

a) La regulación de voltaje es

$$RV\% = \frac{222.534 - 120}{120} \times 100 = 85.45\%$$

b) La potencia de salida es: $P_o = 3 \times 120 \times 25 \times 0.8 = 7\,200$ W
La pérdida en el cobre es: $P_{co} = 3 \times 25^2 \times 0.3 = 562.5$ W
La potencia desarrollada es: $P_d = 7\,200 + 562.5 = 7\,762.5$ W
La potencia desarrollada también puede calcularse como sigue:

$$P_d = 3 \times \text{Re}[222.534\underline{/25.414^\circ} \times 25\underline{/36.87^\circ}] = 7\,762.4\ \text{W}$$

La pérdida constante es: $P_c = 500 + 5^2 \times 4.5 = 612.5$ W
Luego, la potencia total de entrada es: $P_{in} = 7\,762.5 + 612.5 = 8\,375$ W
La eficiencia del generador es

$$\eta = \frac{7\,200}{8\,375} \approx 0.86 \quad \text{u} \quad 86\%$$

c) La velocidad angular del impulsor primario es

$$\omega_s = \frac{2\pi \times 1200}{60} = 40\pi\ \text{rad/s}$$

La potencia mecánica en términos de la potencia eléctrica de entrada es

$$P_{inm} = P_d + P_r = 7\,762.5 + 500 = 8\,262.5\ \text{W}$$

Luego, el par que aplica el impulsor primario es

$$T_s = \frac{8\,262.5}{40\pi} = 65.75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

■

Ejercicios

7.14. Resuelva el ejemplo 7.7 cuando el generador síncrono alimenta la carga especificada (nominal) con un factor de potencia igual a la unidad. El valor correspondiente de la corriente del campo es de 3 A.

7.15. Resuelva el ejemplo 7.7 cuando el generador síncrono alimenta la carga nominal con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. El valor correspondiente de la corriente del campo es de 6 A.

7.16. Un alternador trifásico, tetrapolar de 40 kVA, 240 V, 50 Hz, conectado en Y tiene una reactancia síncrona de 0.08 Ω/fase. La resistencia del devanado de la armadura es tan pequeña que resulta despreciable, y el campo giratorio lo establecen imanes permanentes. La pérdida por rotación es de 5% de la potencia desarrollada. Si el generador alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.866 en adelanto, determine *a*) el ángulo de potencia, *b*) la eficiencia, *c*) la regulación del voltaje y *d*) el par que suministra el impulsor primario.

7.10. Pruebas de generadores síncronos

Para obtener los parámetros de un generador síncrono se llevan a cabo tres pruebas sencillas, descritas a continuación.

La prueba de resistencia

Esta prueba se realiza para medir la resistencia del devanado de la armadura de un generador síncrono cuando se halla en reposo y el devanado de campo está abierto. La resistencia se mide entre dos líneas al mismo tiempo y se toma el promedio de tres lecturas de resistencia como el valor medido de la resistencia R_L, de línea a línea. Si el generador está conectado en Y, la resistencia por fase es

$$R_a = 0.5R_L \tag{7.39a}$$

Sin embargo, para un generador conectado en Δ, la resistencia por fase es

$$R_a = 1.5R_L \tag{7.39b}$$

Prueba a circuito abierto

La prueba a circuito abierto, o *prueba sin carga,* se efectúa impulsando el generador a su velocidad nominal al tiempo que se deja abierto el devanado de la armadura. La corriente del campo se varía en pasos apropiados y se registran los valores correspondientes del voltaje a circuito abierto entre dos pares cualesquiera de terminales de los devanados de la armadura, como se describe en la figura 7.21 para un generador conectado en Y. La corriente del campo puede aumentarse hasta que el voltaje a circuito abierto sea el doble del valor especificado. De los datos registrados para el voltaje a circuito abierto es posible calcular el voltaje por fase (circuito abierto). Cuando se grafica el voltaje por fase (circuito abierto) como función de la corriente de campo, se obtiene una gráfica llamada *característica (curva) de saturación a circuito abierto (CCA).*

La CCA sigue una relación en línea recta en tanto el circuito magnético del generador síncrono no se sature. Debido a que en la región lineal el entrehierro consume la mayor parte de la fmm, la recta recibe el nombre de *línea del entrehierro.* A medida que la saturación se establece, la CCA comienza a desviarse de la línea del entrehierro, como se ilustra en la figura 7.22. La CCA se considera la *curva de magnetización* del generador en condiciones sin carga.

Prueba en cortocircuito

La prueba en cortocircuito brinda información acerca de las potencialidades de corriente de un generador síncrono. Se lleva a cabo impulsando el generador a su velocidad nominal, con las terminales del devanado de la armadura en cortocircuito, como se aprecia en la figura 7.23 para un generador conectado en Y. Se coloca un amperímetro en serie con una de las tres líneas en cortocircuito. Se incrementa gradualmente la

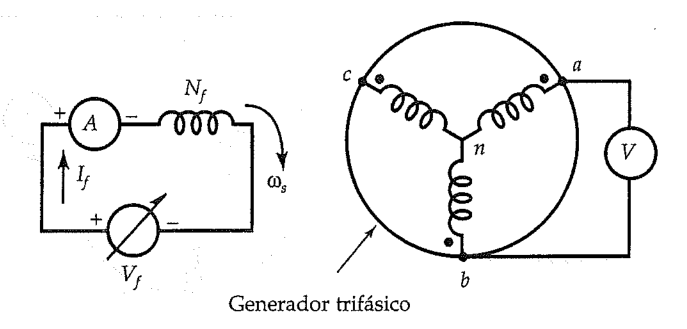


Figura 7.21. Diagrama del circuito para realizar una prueba de circuito abierto.

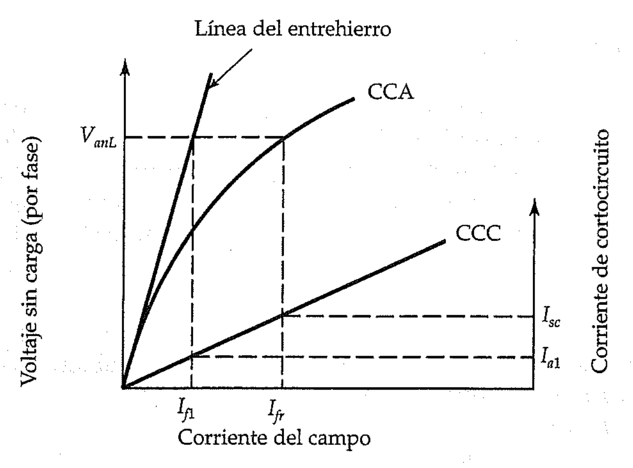


Figura 7.22. Características de circuito abierto y de cortocircuito de un generador síncrono.

corriente del campo y se registra el valor correspondiente de la corriente. La corriente máxima de la armadura en cortocircuito no debe exceder el doble de la corriente especificada del generador. Con base en los datos registrados se calcula la corriente por fase en cortocircuito. Cuando esta última se grafica como función de la corriente del campo, la gráfica se llama *característica en cortocircuito* (CCC) de un generador. Por razones prácticas, la CCA y la CCC se trazan en la misma gráfica, como se muestra en la figura 7.22.

Puesto que el voltaje en las terminales en condiciones de cortocircuito es igual a cero, el voltaje por fase generado debe ser igual a la caída del voltaje a través de la impedancia síncrona. Para calcular la impedancia por fase síncrona a partir de la CCA y de la CCC de un generador síncrono a su voltaje nominal se lleva a cabo el procedimiento siguiente:

1. Se encuentra el valor de la corriente del campo (I_{fr}) que corresponde al voltaje especificado por fase (V_{anL}) a partir de la CCA del generador.

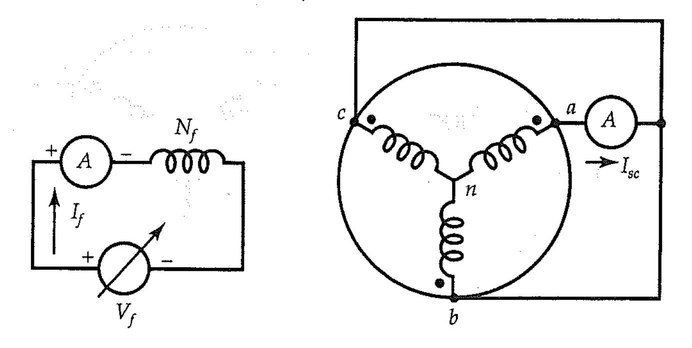


Figura 7.23. Diagrama del circuito para ejecutar una prueba de cortocircuito.

2. Se encuentra el valor de la corriente en cortocircuito (I_{sc}) a partir de la CCC para el mismo valor de corriente del campo, I_{fr}.
3. La magnitud de la impedancia síncrona es igual al voltaje a circuito abierto dividido entre la corriente en cortocircuito. Es decir,

$$Z_s = \frac{V_{anL}}{I_{sc}} \tag{7.40}$$

Como la resistencia de cada devanado de fase de la armadura ya se conoce gracias a la prueba de resistencia, la reactancia síncrona del generador es

$$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_a^2} \tag{7.41}$$

En realidad, a partir de la CCA y la CCC es posible graficar la impedancia síncrona como función de la corriente del campo. En la figura 7.24 se aprecia una gráfica típica. En tanto la densidad de flujo se encuentra abajo del punto de inflexión de la curva de saturación (el flujo es proporcional a la fmm aplicada), la impedancia síncrona es casi constante y se conoce como *impedancia síncrona no saturada*. Cuando el generador opera arriba del punto de inflexión de su curva de saturación, el voltaje generado es más pequeño de lo que hubiera sido sin saturación. En consecuencia, la *impedancia síncrona saturada* es menor que su valor no saturado. Tanto la impedancia síncrona no saturada como la saturada pueden determinarse a partir de la figura 7.22 al voltaje nominal del generador. La línea del entrehierro proporciona la corriente de campo necesaria I_{f1} al voltaje nominal V_{anL} para la impedancia síncrona no saturada y la corriente en cortocircuito correspondiente I_{a1}. Por tanto, la magnitud de la impedancia síncrona no saturada es

$$Z_{su} = \frac{V_{anL}}{I_{a1}} \tag{7.42}$$

y la magnitud de la impedancia síncrona (saturada) ya fue determinada por la ecuación 7.40.

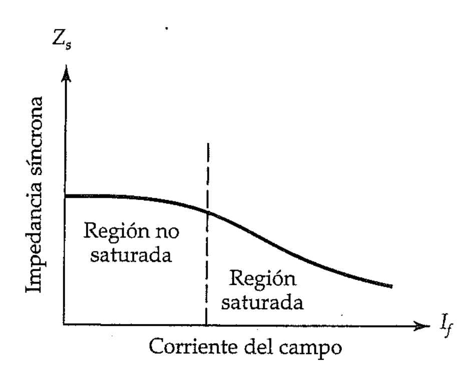


Figura 7.24. Impedancia síncrona como función de la corriente del campo.

En consecuencia, debe resultar evidente que la impedancia síncrona de un generador síncrono puede variar en forma considerable desde carga ligera hasta plena carga. Para nuestros cálculos, supondremos que Z_s es constante y que su valor corresponde al voltaje de especificación (o nominal) sin carga.

Ejemplo 7.8

Un generador síncrono trifásico de 500 kVA, 2 300 V, conectado en Y trabaja a su velocidad especificada para obtener su voltaje nominal sin carga. Cuando se establece un cortocircuito, la corriente de fase es de 150 A. La resistencia promedio de cada fase es de 0.5 Ω. Determine la reactancia síncrona por fase. Con el sistema por unidad, determine la regulación porcentual del voltaje cuando el generador alimenta la carga especificada a su voltaje nominal y con un factor de potencia de 0.8 en atraso.

- **Solución**

El voltaje de fase a circuito abierto es: $V_{anL} = 2\,300/\sqrt{3} = 1327.91 \text{ V}$

La corriente de fase a cortocircuito es: $I_{sc} = 150 \text{ A}$

Luego,

$$Z_s = \frac{1327.91}{150} = 8.85 \ \Omega$$

y

$$X_s = \sqrt{8.85^2 - 0.5^2} = 8.84 \ \Omega$$

La corriente especificada (a plena carga) es

$$I_a = \frac{500\,000}{3 \times 1327.91} = 125.51 \text{ A}$$

Utilicemos el voltaje por fase y la corriente especificada como valores base. Es decir,

$$V_b = 1327.91 \text{ V}$$

$$I_b = 125.51 \text{ A}$$

$$Z_b = \frac{1327.91}{125.51} = 10.58 \ \Omega$$

Cuando el generador opera a su carga especificada, las cantidades por unidad son

$$\tilde{I}_{apu} = 1\underline{/-36.87^\circ}$$

$$\tilde{V}_{apu} = 1\underline{/0^\circ}$$

$$\hat{Z}_{spu} = \frac{0.5 + j8.84}{10.58} = 0.047 + j0.836$$

Por tanto,

$$\tilde{E}_{apu} = 1 + (0.047 + j0.836) \times 1\underline{/-36.87^\circ}$$

$$= 1.667\underline{/22.6^\circ}$$

Luego, el voltaje generado por fase es

$$\tilde{E}_a = 1327.91 \times 1.667\underline{/22.6^\circ} = 2\,213.63\underline{/22.6^\circ} \text{ V}$$

En términos de los valores por unidad, la regulación porcentual del voltaje es

$$RV\% = (1.667 - 1) \times 100 = 66.7\%$$

■

Ejercicios

7.17. En un generador síncrono, trifásico, conectado en Y, de 750 kVA y 1 732 V, una corriente del campo de 20 A a la velocidad especificada produce una corriente de 300 A en cortocircuito y un voltaje de 1 732 V a circuito abierto. La resistencia entre dos terminales cualesquiera del generador es de 0.8 Ω. Determine la reactancia síncrona del generador. La pérdida por rotación es de 20 kW. Con el sistema por unidad, calcule la regulación del voltaje y la eficiencia del generador cuando alimenta la carga especificada a su voltaje nominal con un factor de potencia igual a la unidad.

7.18. A continuación se indican los datos de una prueba practicada en un generador síncrono, trifásico, conectado en Y, a la velocidad especificada:

Prueba en cortocircuito: corriente del campo = 1.2 A.
Corriente en cortocircuito = 25 A.
Prueba a circuito abierto: corriente del campo = 1.2 A.
Voltaje de circuito abierto = 440 V.

La resistencia del devanado de campo por fase es de 1.2 Ω. Determine la impedancia síncrona del generador.

7.19. Un generador síncrono, trifásico, conectado en Y, de 2 MVA, 4 400 V y 25 Hz se prueba a su velocidad nominal de 500 rpm. El voltaje a circuito abierto y la corriente en cortocircuito son de 4 800 V y 260 A, respectivamente, y la corriente del campo de 15 A. El generador está diseñado para tener una caída de voltaje

resistiva de 5% de su voltaje especificado por fase. Determine la impedancia síncrona. Aplicando el sistema por unidad, encuentre la regulación del voltaje cuando el generador alimenta la carga especificada al voltaje nominal con un factor de potencia igual a la unidad. ¿Cuántos polos hay en el generador?

7.11. La característica externa

La característica externa de un generador síncrono muestra la variación del voltaje en las terminales con la carga de un generador independiente. Un generador independiente es el (que puede ser movido por un motor de gasolina a velocidad constante) que es capaz de suministrar energía eléctrica en forma independiente. Su voltaje en las terminales varía con la carga. Si la corriente de excitación se mantiene constante, el voltaje generado por fase, $\tilde{E}_a$, será constante.

A partir del circuito equivalente aproximado (fig. 7.19) se concluye que el voltaje en las terminales es

$$\tilde{V}_a = \tilde{E}_a - j\tilde{I}_a X_s \tag{7.43}$$

Puesto que $\tilde{E}_a$ y X_s son constantes, el voltaje en las terminales $\tilde{V}_a$ depende de la magnitud de la corriente de la carga y de su factor de potencia. Aunque la magnitud del voltaje de fase $\tilde{E}_a$ es constante, su fase (el ángulo de potencia) tiene libertad para cambiar. Por tanto, debe resultar obvio que el lugar geométrico de $\tilde{E}_a$ debe ser un círculo. En seguida estudiaremos los cambios en $\tilde{V}_a$ como función de la carga con factores de potencia igual a la unidad, en atraso y en adelanto.

Factor de potencia igual a la unidad

Para una carga puramente resistiva, $\hat{Z}_L = R_L$, el voltaje en las terminales $\tilde{V}_a$ y la corriente de la carga $\tilde{I}_a$ están en fase. El incremento en la corriente de la carga ocasiona que *a*) se incremente la caída del voltaje a través de la reactancia síncrona, *b*) aumente el ángulo de potencia y *c*) disminuya el voltaje en las terminales, como aparece en la figura 7.25. Ha de recordarse que al trazar los diagramas fasoriales, la escala de la corriente en general es diferente que la escala del voltaje. La característica externa —es decir, el voltaje en las terminales como función de la carga para el factor de potencia unitario— se muestra en la figura 7.26.

Factor de potencia en atraso

Para una carga inductiva, $\hat{Z}_L = R_L + jX_L$, la corriente de la carga está en atraso respecto del voltaje en las terminales en un ángulo de θ. Para un ángulo dado θ del factor de potencia, el aumento en la corriente de la carga ocasiona la disminución del voltaje en las terminales, según se muestra en la figura 7.27. Sin embargo, para una magnitud constante de la corriente de la carga, ese voltaje disminuye aún más con el decrecimiento del factor de potencia, como se ilustra en la figura 7.28. En la 7.26 se muestran las características externas para los dos factores de potencia en atraso.

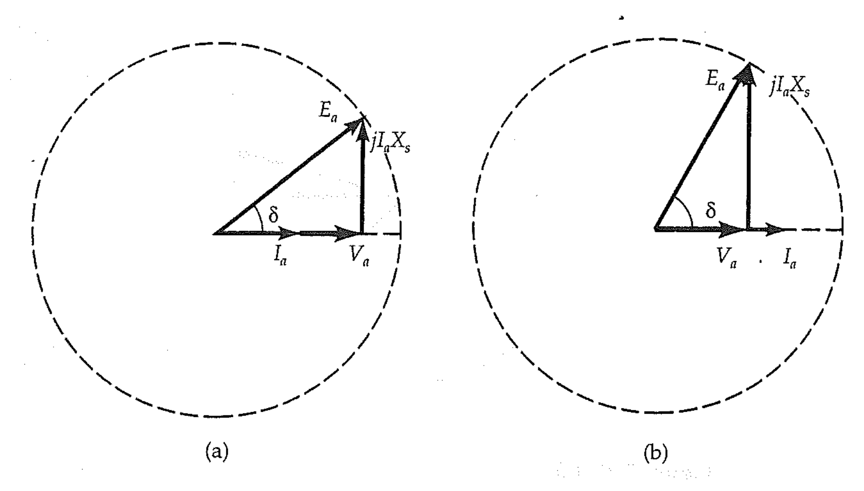


Figura 7.25. Efecto de la carga resistiva sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para corrientes en la armadura **(a)** pequeñas y **(b)** grandes.

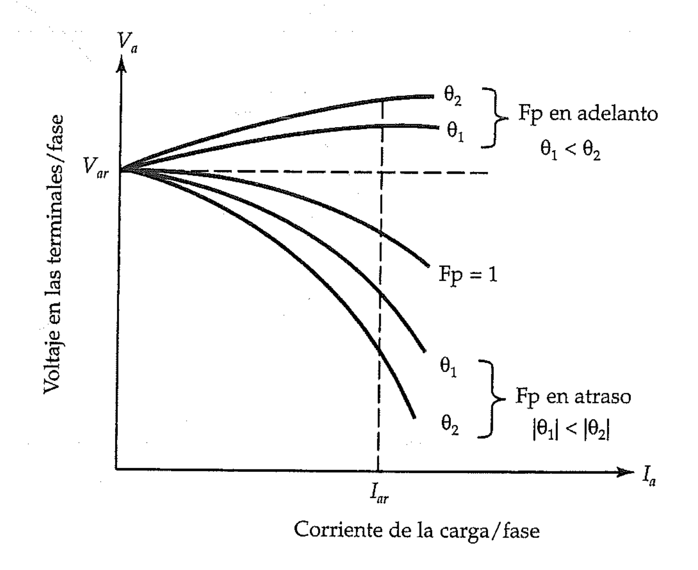


Figura 7.26. Características externas de un generador síncrono en distintas condiciones de carga.

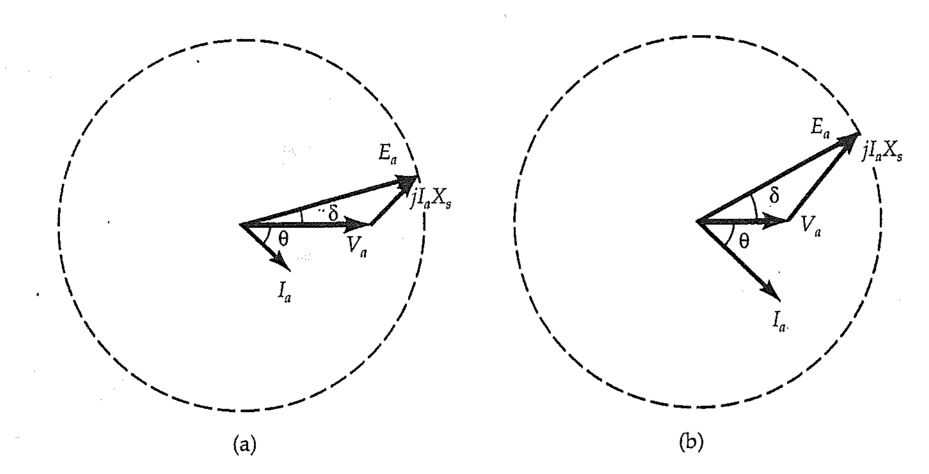


Figura 7.27. Efecto de la carga inductiva sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para corrientes de carga **(a)** pequeñas y **(b)** grandes.

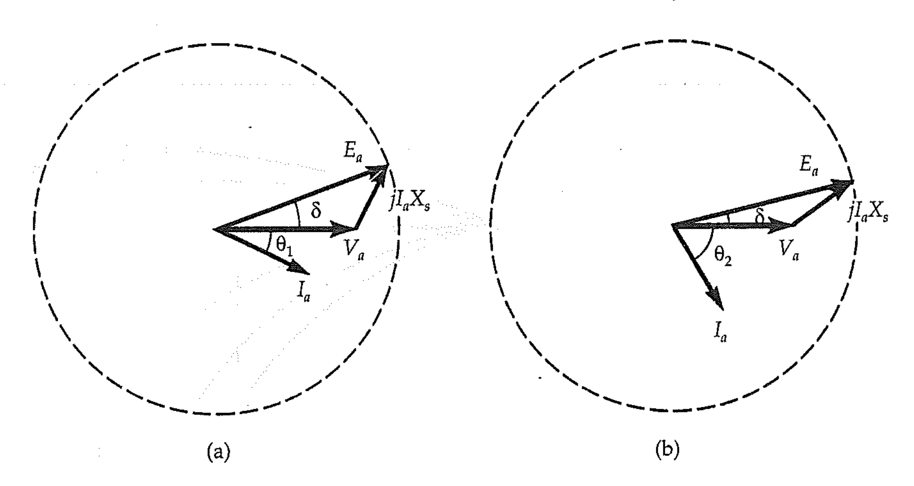


Figura 7.28. Efecto de un factor de potencia en atraso sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para ángulos de factor de potencia **(a)** pequeños y **(b)** grandes.

Factor de potencia en adelanto

Para una carga capacitiva, $\hat{Z}_L = R_L + jX_c$, la corriente de la carga se adelanta al voltaje en las terminales en un ángulo θ. En la figura 7.29 se muestran los diagramas fasoriales para corrientes en la armadura pequeñas y grandes para un ángulo θ del factor de potencia. En esa figura resulta evidente que el voltaje en las terminales se incrementa con el aumento en la corriente de la carga. En la figura 7.30 se muestran los diagramas fasoriales para ángulos pequeños y grandes del factor de potencia para la misma magnitud de la corriente de la carga. Es evidente que el voltaje en las terminales se incrementa aún más con el aumento en el ángulo del factor de potencia.

Para un generador que opere independientemente es posible ajustar la corriente del campo (excitación) para cada carga de modo que el generador alimente la carga especificada a su voltaje nominal. Si procedemos a variar la corriente

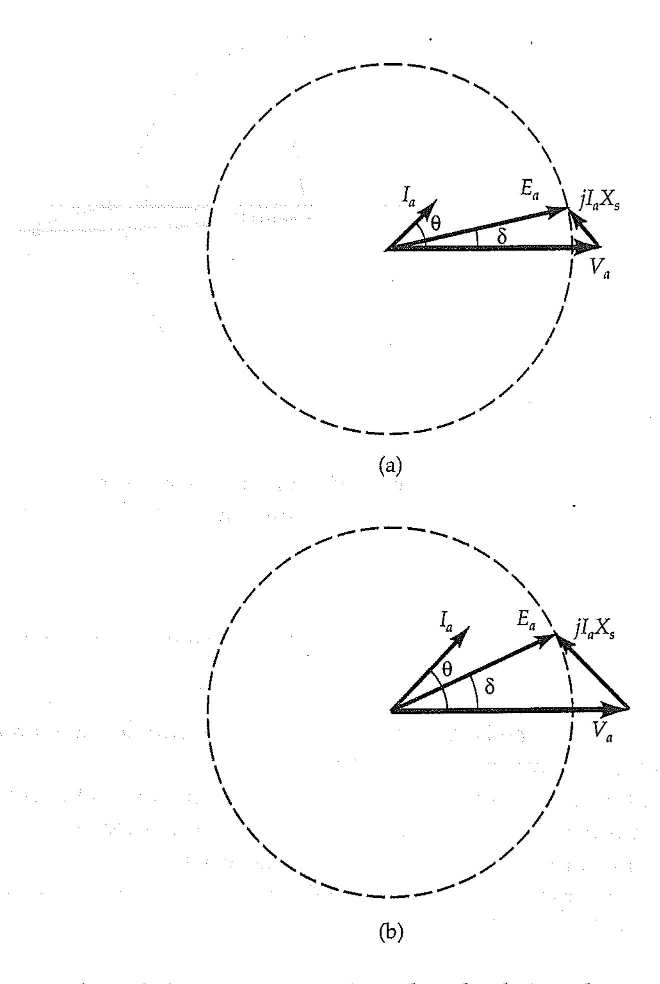


Figura 7.29. Efecto de la carga capacitativa sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para corrientes de carga **(a)** pequeñas y **(b)** grandes.

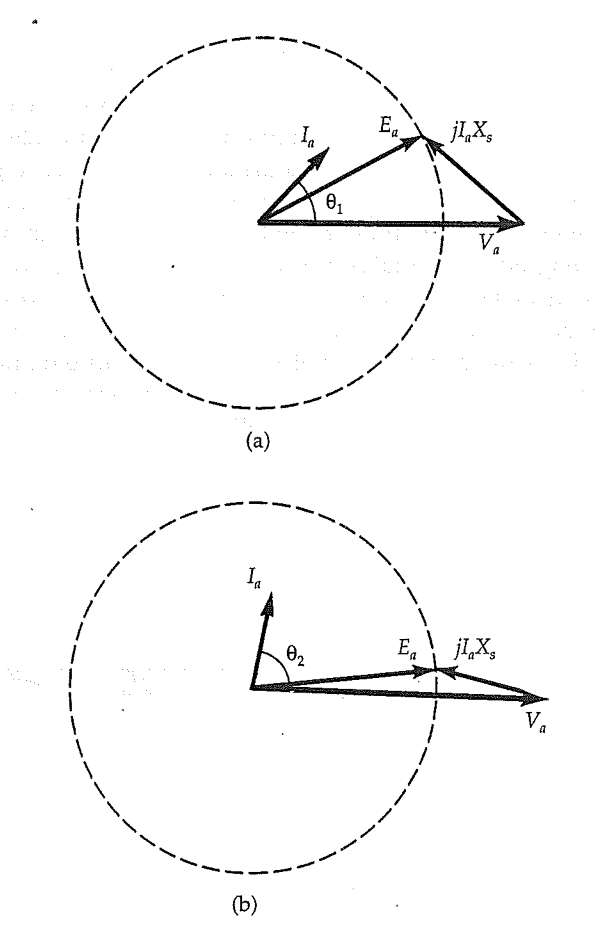


Figura 7.30. Efecto de un factor de potencia en adelanto sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para ángulos de factor de potencia **(a)** pequeños y **(b)** grandes.

de la carga sin efectuar otros ajustes en la corriente de excitación, se observa lo siguiente:

1. Para una carga resistiva, el voltaje en las terminales se incrementa con la disminución en la corriente de la carga.
2. Para una carga inductiva, el voltaje en las terminales también se incrementa con la disminución en la corriente de la carga. Sin embargo, el incremento es mayor para una carga inductiva que para una resistiva.
3. Para una carga capacitiva, el voltaje en las terminales decrece con la disminución en la corriente de línea.

En la figura 7.31 se ilustran las características externas de un generador independiente ajustado para operar a su voltaje y carga especificados.

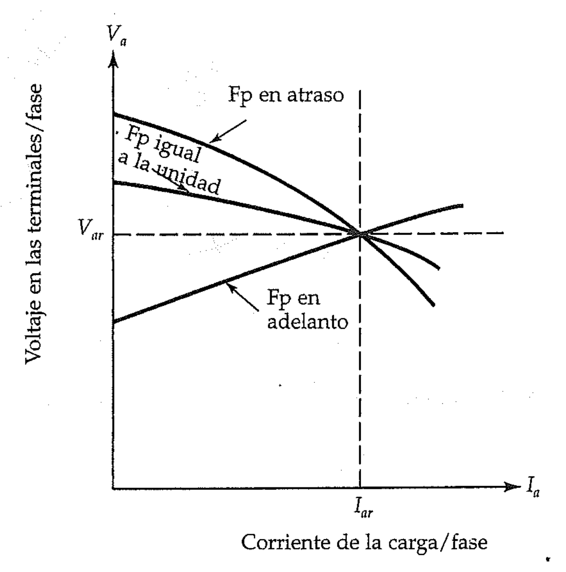


Figura 7.31. Características externas de un generador síncrono independiente ajustado para operar con carga nominal sujeta a distintas condiciones de carga.

7.12. Generador síncrono de polos salientes

La explicación precedente de un generador síncrono sólo es satisfactoria cuando el rotor tiene construcción cilíndrica. Un rotor cilíndrico presenta un entrehierro casi uniforme, y la variación en la reluctancia del entrehierro alrededor de su periferia, debida a las ranuras, es despreciable. Por otro lado, un rotor de polos salientes tiene un entrehierro más grande en la región entre los polos que en la región apenas por arriba de ellos, como resulta evidente en la figura 7.32. Por tanto, cabe esperar que las reluctancias de las dos regiones en un generador de polos salientes difieran en forma significativa. Para explicar tal diferencia, la reactancia síncrona se divide en dos reactancias. La componente de la reactancia síncrona a lo largo del eje polar (eje *d*) comúnmente se llama *reactancia síncrona del eje directo*, X_d, y la otra componente a lo largo del eje entre los polos (eje *q*) se denomina *reactancia síncrona del eje de cuadratura*, X_q. La corriente de la armadura $\tilde{I}_a$ también se reduce a dos componentes, la *componente directa* $\tilde{I}_d$ y la *componente de cuadratura* $\tilde{I}_q$. La componente directa $\tilde{I}_d$ produce el campo a lo largo del eje *d* y está en atraso respecto de $\tilde{E}_a$ en 90°. La componente de cuadratura $\tilde{I}_q$ produce el campo a lo largo del eje *q* y está en fase con $\tilde{E}_a$.

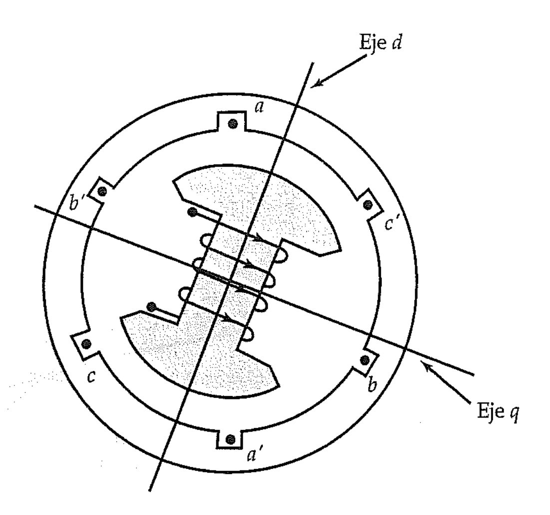


Figura 7.32. Generador síncrono bipolar de polos salientes.

Si $\tilde{E}_a$ es el voltaje generado por fase en condiciones sin carga y $\tilde{E}_d$ y $\tilde{E}_q$ son las fem inducidas en el devanado de la armadura por las componentes de la corriente $\tilde{I}_d$ e $\tilde{I}_q$, respectivamente, entonces el voltaje por fase en las terminales del generador es

$$\tilde{V}_a = \tilde{E}_a + \tilde{E}_d + \tilde{E}_q - \tilde{I}_a R_a \tag{7.44}$$

Sin embargo, las fem inducidas $\tilde{E}_d$ y $\tilde{E}_q$ pueden expresarse en términos de X_d y X_q como sigue:

$$\tilde{E}_d = -j\tilde{I}_d X_d \tag{7.45}$$

y

$$\tilde{E}_q = -j\tilde{I}_q X_q \tag{7.46}$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación 7.44 se obtiene

$$\tilde{E}_a = \tilde{V}_a + \tilde{I}_a R_a + j\tilde{I}_d X_d + j\tilde{I}_q X_q \tag{7.47}$$

Si se expresa $j\tilde{I}_d X_d$ como sigue:

$$j\tilde{I}_d X_d = j\tilde{I}_d X_q + j\tilde{I}_d (X_d - X_q)$$

se tiene que

$$\tilde{E}_a = \tilde{V}_a + \tilde{I}_a R_a + j\tilde{I}_d X_q + j\tilde{I}_q X_q + j\tilde{I}_d (X_d - X_q)$$
$$= \tilde{V}_a + \tilde{I}_a R_a + j\tilde{I}_a X_q + j\tilde{I}_d (X_d - X_q)$$
$$= \tilde{E}'_a + j\tilde{I}_d (X_d - X_q) \quad (7.48a)$$

donde
$$\tilde{E}'_a = \tilde{V}_a + \tilde{I}_a R_a + j\tilde{I}_a X_q \quad (7.48b)$$

e
$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_d + \tilde{I}_q \quad (7.48c)$$

Con base en estas ecuaciones puede representarse el generador síncrono de polos salientes con un circuito equivalente, como el que se muestra en la figura 7.33. Si se considera $\tilde{E}'_a$ como la fem efectiva generada (voltaje de excitación), entonces el circuito equivalente de un generador de polos salientes es semejante al de un generador con rotor cilíndrico.

En la figura 7.34*a* se aprecia el diagrama fasorial para una carga con factor de potencia en atraso, con base en la ecuación 7.48*a*. Puesto que $\tilde{E}'_a$ está en fase con $\tilde{E}_a$, el

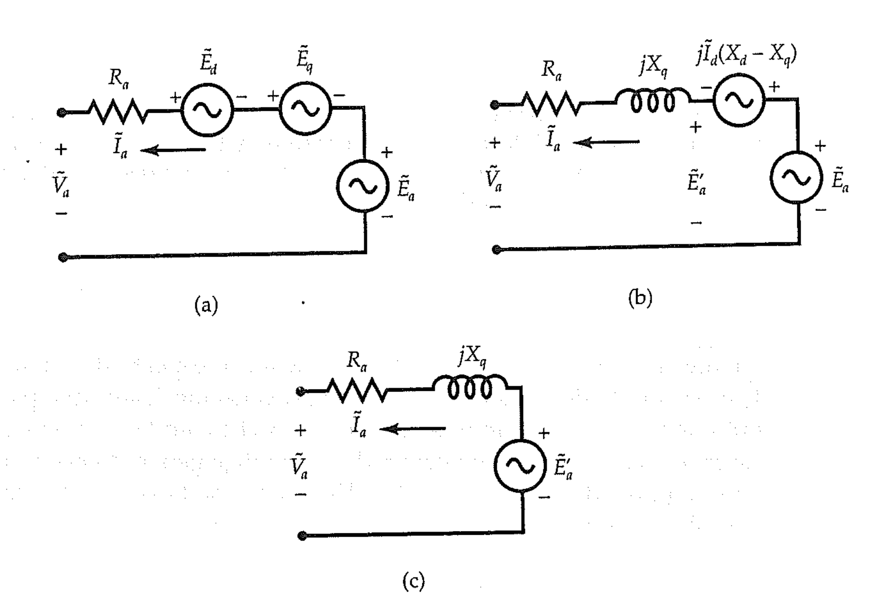
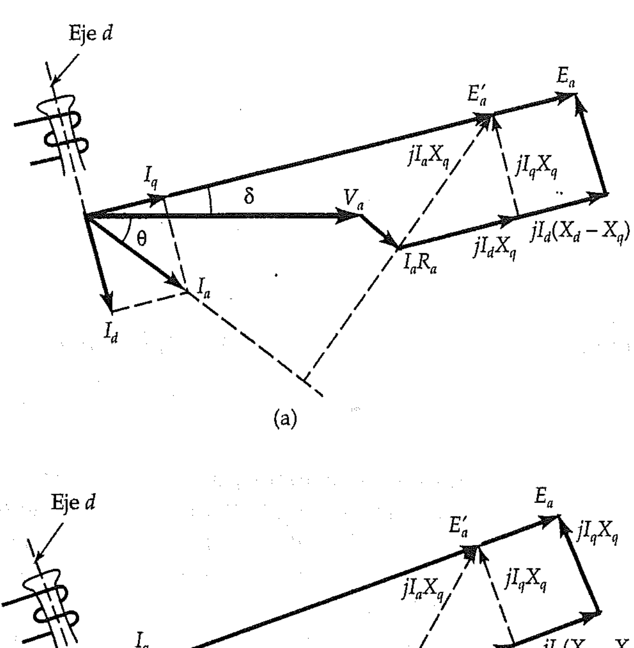


Figura 7.33. Representaciones de circuito equivalente de un generador síncrono de polos salientes.



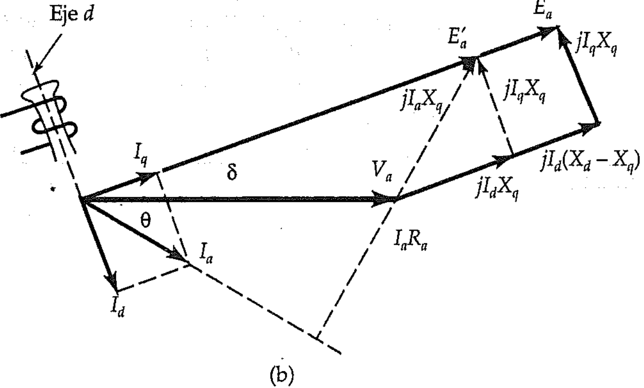


Figura 7.34. **(a)** Diagrama fasorial de un generador síncrono de polos salientes que tiene resistencia finita en el devanado de la armadura y factor de potencia en atraso. **(b)** Diagrama fasorial de un generador síncrono de polos salientes con resistencia despreciable en el devanado de la armadura y factor de potencia en atraso.

ángulo de fase con el que $\tilde{E}'_a$ está en adelanto respecto del voltaje en las terminales $\tilde{V}_a$ es el ángulo de potencia δ. Por tanto, la ecuación 7.48*b* sirve para determinar el ángulo de potencia δ cuando se conocen el voltaje en las terminales, la corriente de la carga y los parámetros del generador. El voltaje generado por fase $\tilde{E}_a$ puede determinarse a partir de la ecuación 7.48*c*. Del diagrama fasorial también se obtiene la ecuación siguiente para determinar el ángulo de potencia δ.

$$\tan \delta = \frac{I_a X_q \cos \theta - I_a R_a \operatorname{sen} \theta}{V_a + I_a (R_a \cos \theta + X_q \operatorname{sen} \theta)} \tag{7.49}$$

A continuación es posible obtener expresiones para $\tilde{I}_d$ e $\tilde{I}_q$ en términos de $\tilde{I}_a$, como sigue:

$$\tilde{I}_d = I_a \operatorname{sen}(\delta + \theta)\underline{/\delta - 90^\circ} \tag{7.50a}$$

$$\tilde{I}_q = I_a \cos(\delta + \theta)\underline{/\delta} \tag{7.50b}$$

donde I_a es el valor medio cuadrático (rms) de la corriente de la armadura.

La potencia de salida puede calcularse ahora como sigue:

$$\begin{aligned} P_o &= 3\,\mathrm{Re}[\tilde{V}_a \tilde{I}_a^*] = 3\,\mathrm{Re}[\tilde{V}_a(\tilde{I}_d^* + \tilde{I}_q^*)] \\ &= 3\,V_a[I_d \operatorname{sen}\delta + I_q \cos\delta] \end{aligned} \tag{7.51}$$

Cuando la resistencia en la armadura es tan pequeña que puede despreciarse, la potencia de salida es igual que la potencia desarrollada. En la figura 7.34 se muestra el diagrama fasorial para una carga con factor de potencia en atraso. A partir de ese diagrama se obtiene

$$I_q = \frac{V_a \operatorname{sen}\delta}{X_q} \tag{7.52a}$$

e

$$I_d = \frac{E_a - V_a \cos\delta}{X_d} \tag{7.52b}$$

Luego,

$$\tan\delta = \frac{I_a X_q \cos\theta}{V_a + I_a X_q \operatorname{sen}\theta} \tag{7.53}$$

Sustituyendo I_d e I_q en la ecuación 7.51, se obtiene una expresión para la potencia desarrollada (salida) como sigue:

$$P_d = \frac{3V_a E_a \operatorname{sen}\delta}{X_d} + \frac{3(X_d - X_q)}{2X_d X_q} V_a^2 \operatorname{sen} 2\delta \tag{7.54}$$

El primer término de la ecuación anterior es el mismo obtenido para un generador de rotor cilíndrico. Representa la potencia debida a la excitación del campo (voltaje generado E_a). El segundo término resalta el efecto de los polos salientes. Indica la potencia de reluctancia y es independiente de la excitación del campo. Por tanto, un generador de polos salientes puede entregar una potencia mayor que otro de rotor cilíndrico, con ángulos de potencia menores de 90° para los mismos voltajes en las terminales y de excitación.

El par desarrollado por un generador de polos salientes es

$$T_d = \frac{3V_aE_a \operatorname{sen} \delta}{X_d\omega_s} + \frac{3(X_d - X_q)}{2X_dX_q\omega_s} V_a^2 \operatorname{sen} 2\delta \tag{7.55}$$

En la figura 7.35 se muestra el par desarrollado por un generador de polos salientes como función del ángulo de par δ. También se indican las variaciones en el par de excitación (primer término) y el par de reluctancia (segundo término).

Ejemplo 7.9

Un generador síncrono, trifásico, de 70 MVA, 13.8 kV, 60 Hz, conectado, en Y y de polos salientes tiene $X_d = 1.83\ \Omega$ y $X_q = 1.21\ \Omega$. Alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.8 en atraso. La resistencia de la armadura es despreciable. Determine *a*) la regulación del voltaje y *b*) la potencia desarrollada por el generador.

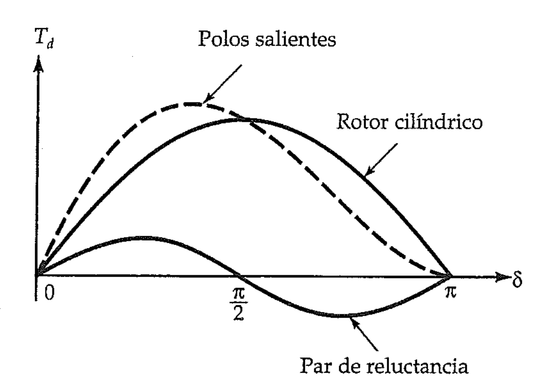


Figura 7.35. Par desarrollado por un generador síncrono de polos salientes como función del ángulo del par.

Solución

Sobre una base por fase, los valores medios cuadráticos (rms) de los voltajes en las terminales y la corriente de la carga son

$$V_a = \frac{13\,800}{\sqrt{3}} = 7\,967.43 \text{ V}$$

$$I_a = \frac{70 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 13\,800} = 2\,928.59 \text{ A}$$

El ángulo del factor de potencia es: $\theta = -\cos^{-1}(0.8) = -36.87°$

Con base en la ecuación 7.53 se tiene que

$$\tan\delta = \frac{2\,928.59 \times 1.21 \times 0.8}{7\,967.43 + 2\,928.59 \times 1.21 \times 0.6} = 0.28$$

o

$$\delta = 15.69°$$

Si suponemos $\tilde{V}_a$ como el fasor de referencia (fig. 7.34), se tiene que $\tilde{E}_a$ se adelanta a $\tilde{V}_a$ en 15.69° e $\tilde{I}_a$ se atrasa respecto de $\tilde{V}_a$ en 36.87°. Por tanto,

$$\tilde{V}_a = 7\,967.43\underline{/0°} \text{ V}$$

$$\tilde{I}_a = 2\,928.59\underline{/-36.87°} \text{ A}$$

Las corrientes en los ejes d y q son:

$$\tilde{I}_d = I_a \operatorname{sen}(52.56°)\underline{/-74.31°} = 2325.27\underline{/-74.31°} \text{ A}$$

$$\tilde{I}_q = I_a \cos(52.56°)\underline{/15.69°} = 1780.38\underline{/15.69°} \text{ A}$$

Según la ecuación 7.47, el voltaje generado por fase es

$$\tilde{E}_a = 7\,967.43\underline{/0°} + (2\,325.27\underline{/-74.31°})(j1.83) + (1780.38\underline{/15.69°})(j1.21) \approx 11\,925.8\underline{/15.69°} \text{ V}$$

Luego, la regulación porcentual del voltaje es

$$RV\% = \frac{11\,925.8 - 7\,967.43}{7\,967.43} \times 100 = 49.68\%$$

Puesto que la potencia desarrollada es la misma que la potencia de salida, entonces

$$P_d = P_o = 3 \times 7\,967.43 \times 2\,928.59 \times 0.8$$
$$= 56 \text{ MW}$$

También podría haberse utilizado la ecuación 7.54 para determinar la potencia desarrollada por un generador síncrono de polos salientes cuando la resistencia del devanado de su armadura es despreciable.

■

Ejercicios

7.20. Las reactancias de los ejes d y q (por unidad) de un generador síncrono de polos salientes son de 0.92 y 0.54, respectivamente. La resistencia de la armadura es despreciable. Cuando el generador alimenta su carga nominal con un factor de potencia de 0.8 en atraso y voltaje especificado en las terminales, determine *a*) la regulación del voltaje y *b*) la potencia desarrollada por unidad por el generador.

7.21. Las reactancias de los ejes d y q (por unidad) de un generador síncrono de polos salientes son de 0.8 y 0.6, respectivamente. La resistencia de la armadura es despreciable. Cuando el generador alimenta su carga especificada con un factor de potencia igual a la unidad y voltaje nominal en las terminales, determine *a*) la regulación del voltaje y *b*) la potencia desarrollada por unidad por el generador.

7.13. Operación en paralelo de generadores síncronos

La generación, transmisión y distribución de energía eléctrica deben efectuarse en forma *eficiente* y *confiable* a un costo razonable con el menor número de interrupciones. Por *eficiente* se entiende que un alternador debe operar no sólo a su eficiencia máxima, sino que la eficiencia debe ser máxima a plena carga o cerca de ella. Como la demanda de energía eléctrica puede fluctuar desde una carga ligera hasta una considerable y viceversa, varias veces al día, es casi imposible operar solamente un alternador a su eficiencia máxima todo el tiempo.

El término *confiable* supone que los consumidores nunca deben darse cuenta de una pérdida de energía eléctrica. Un solo alternador no puede garantizar una operación con ese grado de confiabilidad debido a la posibilidad de que falle o a interrupciones deliberadas para darle mantenimiento periódico. Por tanto, *un alternador único que suministra una carga variable no puede ser muy eficiente, rentable ni confiable.*

Para garantizar la confiabilidad y la continuidad del servicio eléctrico se hace necesario generar energía eléctrica en una ubicación central donde estén conectados varios alternadores en paralelo para satisfacer la demanda. Cuando ésta es reducida, algunos alternadores pueden *retirarse* de la línea en tanto que los restantes quedan operando a sus eficiencias máximas. A medida que la demanda se incrementa, puede incorporarse otro alternador a la línea sin interrupción del servicio. No sólo todos los alternadores de una localidad están conectados en paralelo a una línea común, conocida como *conductor (bus) infinito*, sino que puede haber varias estaciones generadoras de energía alimentando al mismo conductor infinito. Por tanto, es difícil que haya un cambio en el voltaje o en la frecuencia del conductor (bus) infinito. En consecuencia, deben satisfacerse los requerimientos siguientes antes de conectar un alternador al conductor infinito:

1. El voltaje de línea del alternador (entrante) debe ser igual al voltaje constante del conductor (bus) infinito.
2. La frecuencia del alternador entrante debe ser exactamente igual a la del conductor (bus) infinito.
3. La secuencia de fases del alternador entrante debe ser idéntica a la secuencia de fases del conductor (bus) infinito.

En la figura 7.36 se muestra un diagrama de conexión para la operación en paralelo de dos alternadores. El alternador A ya está conectado al conductor infinito y está alimentando la carga. A fin de satisfacer el aumento de la demanda de carga, se incorporará el alternador B a la línea.

Paso 1. El alternador B se impulsa a su velocidad especificada, o muy cerca de ella, y la corriente del campo se aumenta hasta un nivel en el que su voltaje sin carga es casi igual al de la red. El voltaje sin carga se revisa colocando un voltímetro entre dos líneas cualesquiera del alternador entrante, como se ilustra en la figura, cuando el interruptor del circuito está en la posición de abierto.
Paso 2. Para comprobar la secuencia de fase, se conectan asimétricamente tres lámparas, como se muestra. Cuando la secuencia de fase del alternador B es la misma que la del alternador A (o la de la red), la lámpara L_1 está apagada mientras las otras dos están iluminadas. Si la secuencia de fase no es la apropiada, las tres lámparas están iluminadas o apagadas simultáneamente.
Paso 3. Cuando la secuencia de fase es la apropiada y la frecuencia del generador entrante es exactamente igual que la de la red, la lámpara L_1 permanece apagada, mientras que las otras dos brillan. Cualquier desigualdad en la frecuencia obliga a las tres lámparas

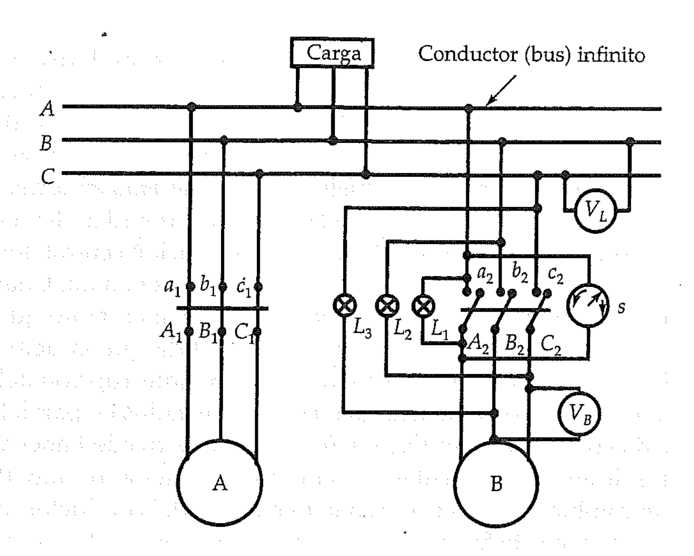


Figura 7.36. Diagrama de conexión para la operación en paralelo de dos alternadores.

a pasar de apagadas a iluminadas, en orden sucesivo. Además de las lámparas para revisar la condición de sincronía, también se conecta un aparato llamado *sincronoscopio* (fig. 7.37) a través de una de las fases. En la figura 7.36 se muestra el sincronoscopio conectado a través de la fase a. Este aparato mide el ángulo de fase entre las fases a del alternador entrante B y la red. Cuando las dos frecuencias son las mismas y la secuencia de fase es la apropiada, la diferencia de fase entre las dos fases a debe ser cero. Esto corresponde a la posición vertical del puntero del sincronoscopio. La rotación

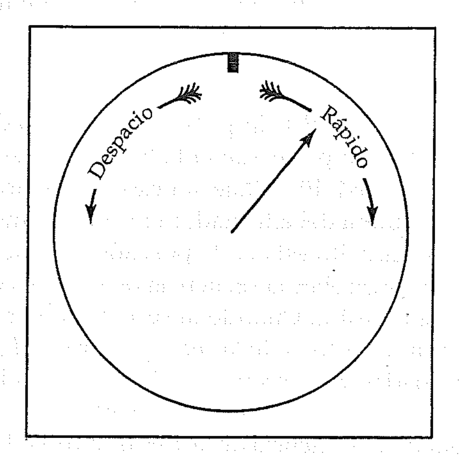
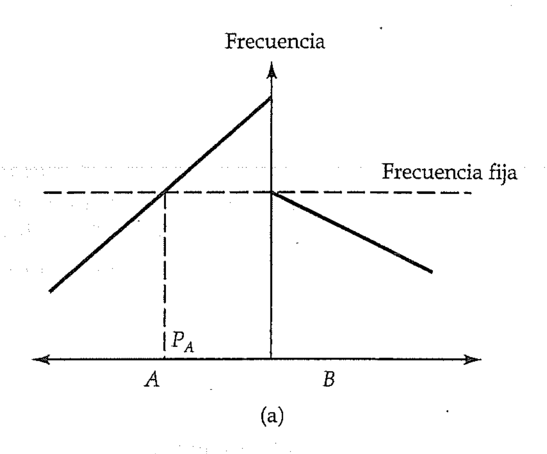


Figura 7.37. Sincronoscopio.

lenta en el sentido de las manecillas del reloj del puntero del aparato indica que la fase *a* del alternador *B* está moviéndose hacia adelante de la fase *a* de la red. En otras palabras, la frecuencia (y por tanto la velocidad) del alternador *B* es ligeramente mayor que la del conductor (bus) infinito, y viceversa para la rotación contraria al sentido de las manecillas del reloj. La velocidad se modifica controlando la alimentación de energía mecánica (impulsor primario) al alternador.

Paso 4. El alternador *B* está listo para entrar en servicio al cerrar el interruptor del circuito cuando *a*) el voltaje de línea del alternador *B* que va a entrar es igual al de la red infinita, *b*) la lámpara L_1 está apagada mientras las otras dos brillan y *c*) el puntero del sincronoscopio señala verticalmente (posición: cero diferencia de fase).

Una vez que se cierra el interruptor del circuito, el alternador *B* está en línea. En ese momento no está recibiendo ni alimentando energía. Esto se conoce como *estado flotante* del alternador (fig. 7.38*a*).



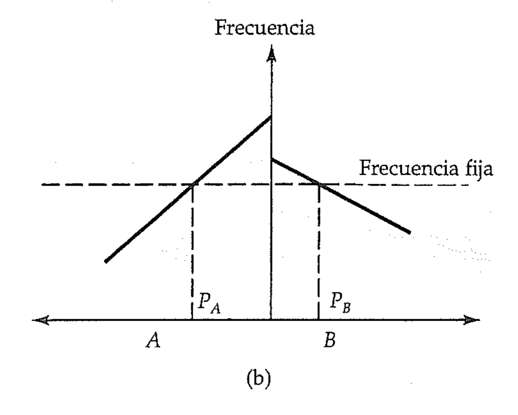


Figura 7.38. **(a)** El alternador *A* suministra la carga, mientras que el *B* se encuentra en estado flotante. **(b)** El alternador *B* comparte la carga con el *A*.

Carga del alternador

El incremento en la corriente del campo (excitación) del alternador B modifica su factor de potencia, como se explica más adelante. Por otro lado, el aumento en la alimentación de energía mecánica al alternador B tiende a incrementar su velocidad y, con ello, su frecuencia. Como la frecuencia del alternador está fija por el conductor (bus) infinito y no puede cambiarse, esa máquina comienza a alimentar la carga según se indica en la figura 7.38*b*. Por tanto, algo de la carga que alimenta el alternador A puede transferirse al B con el simple incremento de la energía mecánica suministrada al alternador B y la disminución simultánea del suministro de energía mecánica al alternador A.

Cuando los dos alternadores están en línea y la demanda de carga disminuye, se vuelve factible retirar uno de ellos. Para hacerlo, la carga completa del alternador que va a retirarse de la línea debe transferirse al otro, invirtiendo el proceso mencionado anteriormente. El interruptor del circuito se abre cuando el alternador se sitúa en el estado flotante.

Las curvas V

Supongamos que un generador síncrono con rotor cilíndrico se conecta a un conductor (bus) infinito y entrega energía con un factor de potencia en atraso. El diagrama fasorial correspondiente se muestra en la figura 7.39, despreciando la resistencia del devanado de su armadura. La potencia desarrollada por el generador síncrono es

$$P_d = \frac{3E_a V_a \operatorname{sen} \delta}{X_s}$$

En ausencia de la resistencia del devanado, la potencia de salida es exactamente igual a la desarrollada. Supongamos que I_f es la corriente del campo necesaria para generar el voltaje por fase E_a.

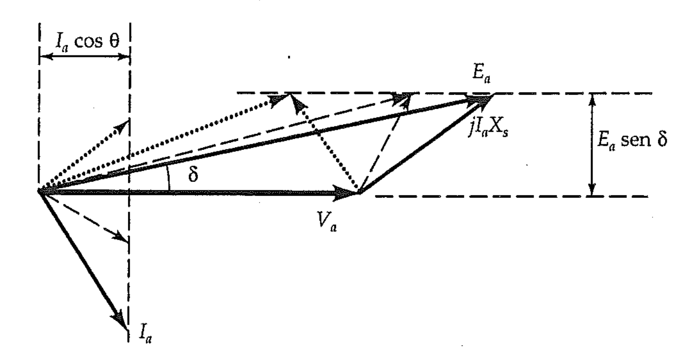


Figura 7.39. Lugar geométrico de I_a y E_a cuando el generador síncrono alimenta potencia constante.

A continuación se reduce la corriente del campo, pero se mantiene la potencia de salida del generador sin cambio. Como V_a se mantiene constante por el conductor (bus) infinito y X_s es constante, la potencia de salida sin cambio implica que el producto E_a sen δ debe permanecer igual. No obstante, una reducción en la corriente del campo debe reducir el voltaje generado E_a. Una reducción en E_a para la misma potencia de salida indica que el ángulo de potencia δ debe aumentar. Esto significa que el extremo del fasor del voltaje generado debe moverse a lo largo de la línea horizontal, como se aprecia en la figura 7.39. Al observar la figura, resulta evidente la reducción en E_a y el incremento en δ.

La potencia de salida también se expresa como sigue:

$$P_o = 3V_aI_a \cos\theta$$

Para que la potencia de salida sea la misma cuando V_a sea constante, $I_a \cos\theta$ también debe ser constante. En otras palabras, la proyección del fasor de la corriente sobre $\tilde{V}_a$ debe ser la misma aun cuando I_f se haya reducido. En consecuencia, el extremo del fasor de corriente debe moverse a lo largo de la línea vertical en la figura 7.39, en la cual el diagrama fasorial para una corriente del campo reducida se indica con línea punteada. Observe la disminución del ángulo del factor de potencia o la mejoría en el factor de potencia.

Si la corriente del campo I_f continúa reduciéndose y, por tanto, E_a, ocurrirá la cadena de hechos siguiente:

a) δ se mantendrá en aumento hasta alcanzar los 90°.
b) El ángulo del factor de potencia continuará cambiando del atraso a la unidad y, finalmente, al adelanto.

Según la figura 7.39, es obvio que en tanto el factor de potencia cambie del atraso a la unidad, la corriente de la armadura estará disminuyendo. Tal corriente es mínima cuando el factor de potencia es igual a la unidad. A medida que cambia el factor de potencia de la unidad al adelanto, la corriente de la armadura comienza otra vez a aumentar. En la figura 7.40 se muestra el cambio de la corriente de la armadura como función de la corriente del campo. Debido a su forma, la curva recibe el nombre

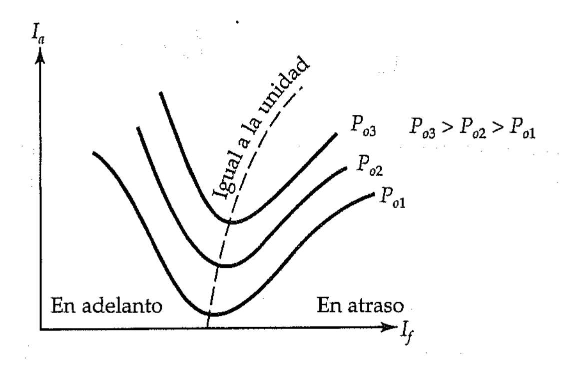


Figura 7.40. Curvas V para un generador síncrono.

de *curva* V. Es posible trazar curvas V similares para diferentes valores de potencia de salida. A medida que aumenta la potencia de salida del generador, la corriente del campo I_f correspondiente al factor de potencia unitario también se incrementa. ¿Puede decir por qué?

Operación en paralelo de dos generadores síncronos

En la figura 7.41 se muestran dos generadores síncronos con características de velocidad-par idénticas, conectados en paralelo. Si $\tilde{V}_a$ es el voltaje en las terminales, $\tilde{I}_L$ es la corriente de la carga, $\hat{Z}_L$ es la impedancia de la carga, $\tilde{I}_{a1}$ e $\tilde{I}_{a2}$ son las corrientes de la armadura, $\tilde{E}_{a1}$ y $\tilde{E}_{a2}$ son los voltajes generados, y $\hat{Z}_{s1}$ y $\hat{Z}_{s2}$ son las impedancias síncronas por fase, se tiene que

$$\tilde{V}_a = \tilde{E}_{a1} - \tilde{I}_{a1}\hat{Z}_{s1} = \tilde{E}_{a2} - \tilde{I}_{a2}\hat{Z}_{s2} = \tilde{I}_L\hat{Z}_L$$

También,

$$\tilde{I}_L = \tilde{I}_{a1} + \tilde{I}_{a2}$$

Luego,

$$\tilde{E}_{a1} = \tilde{I}_{a1}\hat{Z}_{s1} + \tilde{I}_L\hat{Z}_L \tag{7.56a}$$

$$= \tilde{I}_{a1}(\hat{Z}_{s1} + \hat{Z}_L) + \tilde{I}_{a2}\hat{Z}_L \tag{7.56b}$$

y

$$\tilde{E}_{a2} = \tilde{I}_{a2}\hat{Z}_{s2} + \tilde{I}_L\hat{Z}_L \tag{7.57a}$$

$$= \tilde{I}_{a2}(\hat{Z}_{s2} + \hat{Z}_L) + \tilde{I}_{a1}\hat{Z}_L \tag{7.57b}$$

Manipulando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\tilde{I}_{a1} = \frac{(\tilde{E}_{a1} - \tilde{E}_{a2})\hat{Z}_L + \tilde{E}_{a1}\hat{Z}_{s2}}{\hat{Z}_L(\hat{Z}_{s1} + \hat{Z}_{s2}) + \hat{Z}_{s1}\hat{Z}_{s2}} \tag{7.58}$$

$$\tilde{I}_{a2} = \frac{(\tilde{E}_{a2} - \tilde{E}_{a1})\hat{Z}_L + \tilde{E}_{a2}\hat{Z}_{s1}}{\hat{Z}_L(\hat{Z}_{s1} + \hat{Z}_{s2}) + \hat{Z}_{s1}\hat{Z}_{s2}} \tag{7.59}$$

$$\tilde{I}_L = \frac{\tilde{E}_{a1}\hat{Z}_{s2} + \tilde{E}_{a2}\hat{Z}_{s1}}{\hat{Z}_L(\hat{Z}_{s1} + \hat{Z}_{s2}) + \hat{Z}_{s1}\hat{Z}_{s2}} \tag{7.60}$$

$$\tilde{V}_a = \tilde{I}_L\hat{Z}_L = \frac{\tilde{E}_{a1}\hat{Z}_{s2} + \tilde{E}_{a2}\hat{Z}_{s1}}{\hat{Z}_L(\hat{Z}_{s1} + \hat{Z}_{s2}) + \hat{Z}_{s1}\hat{Z}_{s2}}\hat{Z}_L \tag{7.61}$$

Estas ecuaciones pueden aplicarse para determinar cómo comparten la carga los dos generadores síncronos, según se indica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7.10

Dos generadores síncronos, trifásicos, conectados en Y tienen voltajes generados por fase de $120\underline{/10^\circ}$ V y $120\underline{/20^\circ}$ V en condiciones sin carga, y reactancias de $j5$ Ω/fase y

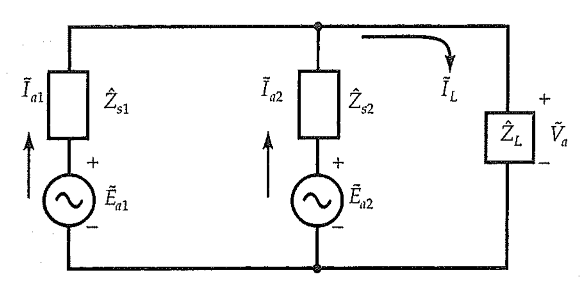


Figura 7.41. Dos generadores síncronos conectados en paralelo.

$j8$ Ω/fase, respectivamente. Están conectados en paralelo a una impedancia de carga de $4 + j3$ Ω/fase. Determine *a*) el voltaje por fase en las terminales, *b*) la corriente de la armadura de cada generador, *c*) la potencia suministrada por cada generador y *d*) la potencia total de salida.

● Solución

Sobre una base por fase: $\tilde{E}_{a1} = 120\underline{/10°}$ V $\quad \tilde{E}_{a2} = 120\underline{/20°}$ V

$$\hat{Z}_{s1} = j5\ \Omega \qquad \hat{Z}_{s2} = j8\ \Omega \qquad \hat{Z}_L = 4 + j3 = 5\underline{/36.87°}\ \Omega$$

a) Con base en la ecuación 7.61, el voltaje en las terminales por fase es

$$\tilde{V}_a = \frac{(120\underline{/10°})(j8) + (120\underline{/20°})(j5)}{(4 + j3)(j5 + j8) + (j5)(j8)} \times (4 + j3) = 82.17\underline{/-5.93°}\ \text{V}$$

b) La corriente de la armadura para cada generador es

$$\tilde{I}_{a1} = \frac{\tilde{E}_{a1} - \tilde{V}_a}{\hat{Z}_{s1}} = \frac{120\underline{/10°} - 82.17\underline{/-5.93°}}{j5} = 9.36\underline{/-51.17°}\ \text{A}$$

$$\tilde{I}_{a2} = \frac{\tilde{E}_{a2} - \tilde{V}_a}{\hat{Z}_{s2}} = \frac{120\underline{/20°} - 82.17\underline{/-5.93°}}{j8} = 7.31\underline{/-32.06°}\ \text{A}$$

La corriente de la carga es: $\tilde{I}_L = 9.36\underline{/-51.17°} + 7.31\underline{/-32.06°}$

$$= 16.44\underline{/-42.8°}\ \text{A}$$

c) La potencia de salida de cada generador es

$$P_{o1} = 3\ \text{Re}[(82.17\underline{/-5.93°})(9.36\underline{/51.17°})] = 1624.68\ \text{W}$$

$$P_{o2} = 3\ \text{Re}[(82.17\underline{/-5.93°})(7.31\underline{/32.06°})] = 1617.82\ \text{W}$$

d) La potencia total de salida es

$$P_o = 1\,624.68 + 1\,617.82 = 3\,242.5 \text{ W}$$

■

Ejercicios

7.22. Cuando los generadores conectados en paralelo del ejemplo 7.10 operan en condiciones sin carga, ¿cuál es la corriente circulante en los dos generadores? También calcule el voltaje sin carga en las terminales.

7.23. Dos generadores síncronos, trifásicos, conectados en Y alimentan una carga de 415.68 kW con un voltaje en las terminales de 3 000 V y un factor de potencia de 0.8 en atraso. La impedancia síncrona del generador A es de $0.5 + j5\ \Omega$/fase, y la del B es de $0.2 + j10\ \Omega$/fase. La excitación del campo y la entrada de potencia mecánica al generador A están ajustadas para que alimenten la mitad de la potencia con un factor de potencia igual a la unidad. Determine *a*) la corriente, *b*) el factor de potencia, *c*) el voltaje generado por fase y *d*) el ángulo de potencia de cada generador.

7.24. Si se elimina la carga sin efectuar otros ajustes en los generadores del ejercicio 7.23, ¿cuál es la corriente circulante en condiciones sin carga? También calcule el voltaje de línea sin carga.

Resumen

En este capítulo se explicó la construcción mecánica y la operación eléctrica de un generador de ca, al que se denominó *alternador* o *generador síncrono*. El rotor, que puede ser de tipo cilíndrico o de polos salientes, aloja el devanado del campo de cc y se impulsa a su velocidad síncrona por medio de un impulsor primario. La velocidad síncrona, en revoluciones por minuto (rpm), se define por

$$N_s = \frac{120f}{P}$$

Como el estator aloja los devanados trifásicos del alternador, también es conocido como *armadura*. Generalmente, el devanado es del tipo de doble capa. El número de bobinas en un grupo de fase se expresa como sigue:

$$n = \frac{S}{Pq}$$

Con objeto de reducir la pérdida en el cobre y la acumulación de vueltas finales por lo común se utiliza un devanado de paso fraccionario. La fracción por la que se ha

reducido el flujo que enlaza la bobina como resultado del devanado de paso fraccionario se llama *factor de paso*. Si ρ es el alcance de bobina, el factor de paso es

$$k_p = \text{sen}(\rho/2)$$

Puesto que las bobinas en un grupo de fase están conectadas en serie y desplazadas espacialmente una de otra, la fem inducida en cada una de ellas está fuera de fase con la de la siguiente bobina en un ángulo igual al alcance de ranura (γ). Para explicar la reducción de la fem inducida en un grupo de fase, el factor de distribución se define como sigue:

$$k_d = \frac{\text{sen}(n\gamma/2)}{n\,\text{sen}(\gamma/2)}$$

Si E_c es el valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida en cada bobina, la fem inducida en un grupo de fase es

$$E_{pq} = nk_dE_c$$

Sin embargo, con base en la ley de inducción de Faraday el valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida en cada bobina es

$$E_c = 4.44\,N_cfk_p\Phi_P$$

donde $k_p\Phi_P$ es el flujo máximo que enlaza la bobina con N_c número de vueltas.

Como existen P grupos de fase para cada una de las tres fases, estos grupos pueden conectarse en a trayectorias paralelas. Por tanto, el voltaje de fase es

$$E_a = 4.44fN_e\Phi_P$$

donde

$$N_e = \frac{PnN_ck_w}{a}$$

es el número efectivo de vueltas en cada fase y $k_w = k_pk_d$ es el factor del devanado.

La corriente en cada devanado de fase da origen a una reactancia de dispersión X_a y a la reactancia de magnetización debida X_m a la reacción de la armadura. La reactancia síncrona es la suma de las dos reactancias, es decir, $X_s = X_a + X_m$. La resistencia del devanado R_a de cada devanado de fase es la misma. Por tanto, si $\tilde{V}_a$ es el

voltaje por fase en las terminales e $\tilde{I}_a$ es la corriente de la armadura, para el alternador de rotor cilíndrico se tiene que

$$\tilde{E}_a = \tilde{V}_a + \tilde{I}_a (R_a + jX_s)$$

y

$$\tilde{E}_a = \tilde{V}_a + \tilde{I}_a R_a + j(\tilde{I}_d X_d + \tilde{I}_q X_q)$$

para el alternador de polos salientes cuando

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_d + \tilde{I}_q$$

donde $\tilde{I}_q$ se encuentra en la extensión de $\tilde{E}_a$ e $\tilde{I}_d$ se atrasa respecto de $\tilde{E}_a$ en 90°.

Para reducir al mínimo la pérdida de potencia en el devanado de la armadura, R_a es tan pequeña en el caso de alternadores grandes que puede despreciarse. En ese caso, la potencia de salida de un alternador es la misma que la potencia desarrollada. Es decir,

$$P_o = P_d = \frac{3V_a E_a \operatorname{sen} \delta}{X_s}$$

para un alternador de rotor cilíndrico y

$$P_o = P_d = \frac{3V_a E_a \operatorname{sen} \delta}{X_d} + \frac{3(X_d - X_q)}{2X_d X_q} V_a^2 \operatorname{sen} 2\delta$$

para un alternador de polos salientes.

La potencia desarrollada es máxima cuando el ángulo de potencia δ es de 90°. Sin embargo, a fin de tener una operación estable, el ángulo de potencia generalmente es pequeño.

La regulación porcentual del voltaje del alternador se definió como

$$RV\% = \frac{E_a - V_a}{V_a} \times 100$$

En el lugar donde se genera la energía se conectan muchos alternadores en paralelo a un conductor (bus) infinito. El voltaje en las terminales y la frecuencia del bus son fijos. La potencia suministrada por un alternador a una carga por medio de un bus infinito puede aumentar/disminuir con el aumento/disminución de la potencia mecánica que recibe. Modificando su excitación del campo es posible controlar el factor de potencia del alternador. Si I_f es la corriente del campo que corresponde al factor de potencia igual a la unidad para cierta carga en el alternador, el factor de potencia en adelanto/atraso puede obtenerse haciendo que la corriente del campo sea menor/mayor que I_f.

Preguntas de repaso

7.1. ¿Cuál es la diferencia entre un generador de cc y uno de ca?
7.2. Explique cómo puede convertirse un generador de cc en uno de ca.
7.3. ¿Puede operarse a cualquier velocidad un generador de ca?
7.4. ¿Cuáles son las ventajas de construir un generador de ca de adentro hacia fuera?
7.5. ¿Por qué generalmente se llama *generador síncrono* a un generador de ca?
7.6. ¿Cuál es la velocidad síncrona?
7.7. Calcule la velocidad síncrona de un generador de ca de 60 Hz cuando tiene *a*) dos polos, *b*) cuatro polos, *c*) seis polos, *d*) ocho polos y *e*) 12 polos.
7.8. La velocidad síncrona de un generador de 12 polos es de 500 rpm. ¿Cuál es la frecuencia de su operación?
7.9. Determine el número de polos de un generador de 60 Hz cuando la velocidad de su rotor es *a*) 600 rpm, *b*) 400 rpm y *c*) 150 rpm.
7.10. Explique la construcción de un generador de ca.
7.11. Mencione las diferencias entre un rotor cilíndrico y uno de polos salientes. Enumere las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.
7.12. ¿Qué es el devanado de paso completo? ¿Es factible devanar un generador de ca usando un devanado de paso completo? ¿Cuáles son sus ventajas y desventajas?
7.13. ¿Qué es un devanado de paso fraccionario? ¿Cuáles son sus ventajas y desventajas?
7.14. Explique los términos siguientes: factor de paso, grupo o cinturón de fase, factor de distribución, factor del devanado, voltaje de fase y voltaje de línea.
7.15. ¿Qué es un devanado de doble capa? Si el estator (armadura) de un generador de ca tiene 144 ranuras, ¿cuántas bobinas se requieren para el devanado de doble capa?
7.16. Un generador trifásico, octapolar de 48 ranuras se devana con doble capa. Determine los factores de paso, de distribución y del devanado, así como el voltaje de fase y el de línea.
7.17. Conteste la pregunta 7.16 pero para un generador de 72 ranuras.
7.18. ¿Qué se entiende por *número de trayectorias paralelas*? Los devanados de fase de las preguntas 7.16 y 7.17 están conectados en trayectorias paralelas. Calcule las vueltas efectivas en cada fase.
7.19. Un alternador trifásico de 25 Hz está diseñado para operar a 1 500 rpm. Hay cuatro bobinas por polo y por fase. Determine el número de ranuras en la armadura. ¿Cuántos polos debe tener el alternador?
7.20. Un alternador trifásico, hexapolar tiene 72 ranuras. Determine sus factores de paso, de distribución y del devanado.
7.21. Un alternador trifásico conectado en Δ alimenta una carga nominal de 13 A a 2 300 V. La potencia distribuida a una carga equilibrada es de 40 kW. Determine el voltaje de fase, la corriente de fase, la potencia por fase y el factor de potencia.
7.22. Defina regulación del voltaje. ¿Qué significa?

7.23. Dos alternadores están diseñados para alimentar la misma carga nominal al voltaje especificado. La regulación del voltaje de un alternador es de 20%, mientras que la del otro es de 25%. ¿Cuál alternador es más apropiado para una operación continua con la carga especificada?
7.24. ¿En qué condiciones de carga puede ser negativa la regulación del voltaje?
7.25. ¿Aumenta o disminuye el voltaje en las terminales cuando se elimina la carga para tener una regulación de voltaje positiva?
7.26. ¿Por qué se mantiene tan pequeña como sea posible la resistencia del devanado de la armadura de un generador síncrono?
7.27. Defina reactancia de dispersión, reactancia síncrona e impedancia síncrona.
7.28. Explique con claridad cómo se lleva a cabo una prueba a circuito abierto.
7.29. Describa claramente el procedimiento para efectuar la prueba en cortocircuito.
7.30. Enumere todas las condiciones que deben cumplirse antes de que un alternador pueda conectarse en paralelo con otro.
7.31. ¿Por qué deben conectarse en paralelo los alternadores?
7.32. ¿Qué es una red o conductor (bus) infinito?
7.33. ¿Por qué la reactancia en el eje *d* es mayor que la del eje *q* en un alternador de polos salientes?
7.34. Explique la naturaleza de las características externas de un generador síncrono para factores de potencia igual a la unidad, en adelanto y en atraso.
7.35. Puesto que la potencia desarrollada es máxima cuando el ángulo de potencia es de 90°, enuncie las razones por las que un alternador nunca se opera con ese ángulo.
7.36. Trace el diagrama fasorial para un alternador de polos salientes cuando el factor de potencia de la carga es *a*) igual a la unidad y *b*) en adelanto.
7.37. ¿Qué es una curva V?
7.38. ¿Por qué aumenta la corriente del campo con el incremento de la carga cuando el factor de potencia es igual a la unidad? Responda utilizando diagramas fasoriales.
7.39. ¿Qué es un sincronoscopio? ¿Cuál es su función? ¿Puede explicar su operación?
7.40. ¿Cuál es la importancia de la línea del entrehierro?

Problemas

7.1. Un generador síncrono, trifásico con 96 ranuras, 16 polos, de 60 Hz conectado en Y tiene seis vueltas por bobina. El flujo por polo es de 21 mWb. Determine *a*) la velocidad síncrona, *b*) el número de bobinas en un grupo de fase, *c*) el paso de bobina, *d*) el alcance de ranura, *e*) el voltaje generado por fase y *f*) el voltaje de línea. Trace un esquema del arreglo del devanado para un grupo de fase. Suponga una conexión serie.
7.2. Un generador síncrono, trifásico, tetrapolar de 60 Hz conectado en Y tiene cuatro ranuras por polo y por fase. Hay seis conductores por ranura. El flujo

por polo es de 51 mWb. Calcule los voltajes de fase y de línea. Muestre la colocación de las bobinas para un grupo de fase. Suponga una conexión serie.

7.3. Un generador síncrono, trifásico, conectado en Δ tiene 16 polos y 144 ranuras, con 10 conductores por ranura. El flujo por polo es de 83.3 mWb y la velocidad es de 375 rpm. Determine los voltajes de fase y de línea si cada devanado está conectado en dos trayectorias paralelas.

7.4. Un generador síncrono, trifásico, hexapolar de 25 Hz conectado en Y tiene 36 ranuras. Hay 17 vueltas por bobina y el flujo por polo es de 94.8 mWb. Encuentre el voltaje de línea si hay dos trayectorias paralelas. Trace un esquema de la colocación de todas las bobinas y muestre las conexiones del devanado.

7.5. Un generador síncrono, trifásico, octapolar de 60 Hz conectado en Y cuenta con 48 ranuras. Tiene seis vueltas por bobina. El radio del rotor es de 40 cm y la longitud del polo de 80 cm. La densidad máxima de flujo por polo es de 1.2 T. Calcule el voltaje de línea para una conexión serie.

7.6. Se requiere un generador síncrono, trifásico de 12 polos para generar un voltaje sin carga de 5.6 kV por fase a 50 Hz. El flujo por polo es de 194 mWb. El estator tiene 108 ranuras. Determine el número de vueltas por bobina para una conexión serie.

7.7. Un alternador trifásico de 20 polos y 400 Hz conectado en Y tiene tres bobinas por grupo de fase. Cada bobina tiene dos vueltas y el flujo por polo es de 23 mWb. Las bobinas están conectadas en dos grupos paralelos. Determine *a*) la velocidad del rotor, *b*) el número de ranuras en la armadura, *c*) el factor del devanado, *d*) el voltaje por fase y *e*) el voltaje de línea.

7.8. Un alternador trifásico conectado en Y alimenta una carga especificada de 50 A a 230 V con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. Cuando se elimina la carga, el voltaje en las terminales resulta de $280\,\underline{/30^\circ}$ V Calcule *a*) la impedancia síncrona por fase y *b*) la regulación del voltaje.

7.9. Un generador síncrono, trifásico, octapolar de 110 V, 48 ranuras, 600 rpm, devanado en doble capa y conectado en Y tiene 12 vueltas por bobina. Si un lado de la bobina está en la ranura 1, el otro lado está en la ranura 6. Hay cuatro trayectorias paralelas. Cuando el generador alimenta la carga nominal a un voltaje de línea de 110 V, la regulación del voltaje es de 5%. ¿Cuál es el flujo por polo?

7.10. Un generador síncrono, trifásico, bipolar de 10 kVA, 380 V, 60 Hz conectado en Y alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.8 en atraso. La impedancia síncrona es de $1.2 + j4\ \Omega$/fase. Determine *a*) la velocidad síncrona, *b*) el voltaje generado por fase y *c*) la eficiencia si la pérdida fija es de 1 kW.

7.11. Un generador síncrono, trifásico de 120 kVA, 1 kV, conectado en Δ tiene una resistencia del devanado de 1.5 Ω por fase y una reactancia síncrona de 15 Ω por fase. Si la pérdida fija es de 1 500 W, determine *a*) la regulación del voltaje y *b*) la eficiencia cuando el generador alimenta la carga nominal con un factor de potencia de 0.707 en atraso.

7.12. Un generador síncrono, trifásico de 1 732 V, 120 kVA, conectado en Y tiene una reactancia síncrona de 1.2 Ω/fase. Alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.9 en adelanto. La pérdida fija es de 5% de la potencia de-

sarrollada. Determine *a*) el voltaje generado, *b*) el ángulo de potencia, *c*) la regulación del voltaje y *d)* la eficiencia. Trace los diagramas fasoriales y de flujo de potencia.

7.13. Modifique las expresiones para el factor de paso y el de distribución para que incluyan el efecto de las armónicas.

7.14. Un generador trifásico, octapolar con 72 ranuras de 60 Hz, 360 rpm y conectado en Y tiene cinco vueltas por bobina. El flujo por polo tiene una componente fundamental de 120 mWb, una tercera componente armónica de 40 mWb y una quinta componente armónica de 10 mWb. Calcule el valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida por fase.

7.15. El voltaje sin carga de un generador síncrono conectado en Y es de 3 464 V. Cuando el generador alimenta la carga nominal de 432 kW con un factor de potencia de 0.8 en atraso, el voltaje en las terminales es de 3 117.69 V. Si la resistencia del devanado de la armadura es despreciable, determine la reactancia síncrona del generador. Determine el voltaje en las terminales (línea) cuando la carga cambia a 80 + j60 Ω/fase.

7.16. Un generador síncrono, trifásico de 72 kVA, 208 V conectado en Y alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.866 en atraso. La resistencia del devanado de la armadura es de 20 mΩ/fase. La pérdida en el núcleo es de 800 W. La pérdida por fricción y por viento es de 350 W. El devanado del campo se conecta a una fuente de cc de 120 V y la corriente del campo es de 5.5 A. Calcule la eficiencia del generador.

7.17. Un generador síncrono, trifásico de 25 kVA, 480 V y 60 Hz tiene una reactancia síncrona de 8 Ω/fase. La pérdida fija es de 1.5 kW. Determine su eficiencia cuando el generador alimenta plena carga con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. ¿Cuál es la potencia máxima desarrollada por la máquina? Desprecie la resistencia del devanado.

7.18. Una carga equilibrada y conectada en Δ está conectada a un generador síncrono, trifásico de 3.6 kVA, 208 V y conectado en Y por medio de una línea de transmisión de tres conductores (líneas). La impedancia por línea es de 0.5 + j5 Ω. La impedancia síncrona del generador es de 0.25 + j4 Ω/fase. Las pérdidas fijas son de 175 W. Cuando el generador alimenta la carga nominal al voltaje especificado con un factor de potencia de 0.8 en atraso, determine *a*) su eficiencia, *b*) la regulación del voltaje y *c*) la impedancia de la carga por fase.

7.19. Una carga equilibrada y conectada en Y está conectada a un generador síncrono, trifásico de 7.2 kVA, 208 V, conectado en Δ por medio de una línea de transmisión de tres conductores (líneas). La impedancia por línea es de 0.4 + j2.4 Ω. La impedancia síncrona por fase es de 0.3 + j6 Ω. La pérdida fija es de 140 W. Cuando el generador alimenta plena carga a su voltaje nominal con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, determine *a*) la regulación del voltaje, *b*) la eficiencia y *c*) la impedancia de la carga por fase.

7.20. Un generador síncrono de 1 732 V, 300 kVA, conectado en Y tiene una impedancia síncrona de 0.5 + j4 Ω/fase. Determine el factor de potencia de la carga que corresponde a una regulación del voltaje igual a cero.

7.21. Un generador síncrono, trifásico de 230 kVA, 1 100 V, conectado en Δ tiene una resistencia promedio de 0.3 Ω entre dos de sus terminales. Con una cierta excitación del campo y a su velocidad especificada, el voltaje sin carga fue de 1 100 V y la corriente de cortocircuito en cada línea fue de 121.24 A. Determine la impedancia síncrona del generador. Si la pérdida por rotación es de 12 kW y el generador alimenta la carga nominal con un factor de potencia de 0.866 en atraso, determine su regulación del voltaje y su eficiencia utilizando el sistema por unidad.

7.22. Un turbogenerador bipolar de 6 MVA, 6.6 kV, 50 Hz, conectado en Y tiene una resistencia promedio de 0.45 Ω entre dos líneas cualesquiera. Con una cierta corriente del campo y a su velocidad especificada, el voltaje a circuito abierto fue de 8 kV y la corriente de cortocircuito fue de 800 A. Encuentre la regulación del voltaje del generador a plena carga con factor de potencia igual a la unidad.

7.23. Un generador síncrono, trifásico de 4.8 kV, conectado en Y está especificado a 50 A. La resistencia del devanado es de 0.8 Ω/fase. Cuando se lleva a su velocidad nominal con cierta corriente del campo, el voltaje a circuito abierto es de 480 V y la corriente en cortocircuito de 50 A. ¿Cuál es su regulación del voltaje con un factor de potencia de 0.8 en adelanto?

7.24. Un alternador trifásico de 1 000 kVA, 2 400 V, 60 Hz, conectado en Y tiene una resistencia de la armadura de 0.5 Ω entre dos de sus líneas. Una corriente del campo de 25 A a su velocidad nominal produce una corriente en cortocircuito de 240 A y un voltaje a circuito abierto de 1 800 V. Calcule la regulación porcentual del voltaje a plena carga con un factor de potencia de 0.707 en atraso.

7.25. Un generador síncrono, trifásico de 10.8 kVA, 208 V, conectado en Y alimenta la carga nominal con un factor de potencia de 0.8 en atraso. La impedancia síncrona es de $0.5 + j5$ Ω/fase. La resistencia del devanado del campo es de 20 Ω. Su CCA por fase a la velocidad nominal está dada por

$$E_a = \frac{2\,400 I_f}{7.5 + 6.5 I_f}$$

Si la pérdida por rotación es de 1.2 kW, determine la regulación del voltaje y la eficiencia del generador. Si el voltaje del campo es de 120 V (cc), ¿cuál debe ser la resistencia externa en el circuito del devanado del campo?

7.26. Resuelva otra vez el problema 7.25 con un factor de potencia de la carga de 0.8 en adelanto.

7.27. Un alternador trifásico, de 9 kVA, 208 V, 60 Hz, conectado en Y tiene una impedancia síncrona de $0.1 + j3$ Ω/fase. La resistencia del devanado del campo es de 25 Ω y el voltaje del campo es de 120 V (cc). La curva CCA por fase a la velocidad especificada está dada como sigue

I_f (A):	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
E_a (V):	0	90	140	185	209	223	230	236	238	248	250

Si la pérdida por rotación es de 800 W, determine la regulación del voltaje y la eficiencia del generador cuando alimenta la carga nominal con un factor de

potencia de 0.9 en atraso. ¿Cuál debe ser la resistencia externa en el circuito del devanado del campo?

7.28. Resuelva otra vez el problema 7.27 con un factor de potencia de 0.9 en adelanto.

7.29. Un alternador trifásico de 500 V, 150 kVA, conectado en Δ tiene una resistencia efectiva de 0.2 Ω entre sus dos líneas. Una corriente del campo de 12 A produce una corriente en cortocircuito de 173.2 A y un voltaje a circuito abierto de 450 V. Calcule la regulación del voltaje a plena carga cuando el factor de potencia es igual a la unidad.

7.30. Modifique la ecuación 7.35 para incluir el efecto de la resistencia de la armadura.

7.31. Un generador síncrono, trifásico de 300 kVA, 500 V, conectado en Δ toma una corriente del campo de 2 A para mantener la corriente especificada en condiciones de cortocircuito. Para la misma corriente del campo, el voltaje a circuito abierto es de 572 V. Determine la reactancia síncrona del generador si la resistencia de su devanado del campo es despreciable. ¿Cuál es su regulación del voltaje cuando el generador alimenta la carga nominal con un factor de potencia de 0.707 en atraso y voltaje especificado en las terminales?

7.32. Un generador trifásico de 5 MVA, 6.6 kV, 60 Hz, conectado en Y tiene una CCA con los datos siguientes:

I_f (A):	10	15	20	25	30
E_a (kV):	4.5	6.6	7.5	8.25	8.95

Se necesita una corriente del campo de 20 A para que circule una corriente de plena carga en cortocircuito. La resistencia del devanado de la armadura es de 1.2 Ω/fase, la resistencia del devanado del campo es de 500 Ω y la pérdida por rotación es de 250 kW. Determine el ángulo de potencia, la regulación del voltaje y la eficiencia cuando el generador alimenta la carga nominal con un factor de potencia igual a la unidad y voltaje especificado en las terminales.

7.33. Un generador trifásico de polos salientes, de 4 160 V, 3.5 MVA, 60 Hz, conectado en Y tiene una reactancia en el eje d de 2.75 Ω/fase y una reactancia en el eje q de 1.8 Ω/fase. La resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Si el generador alimenta la carga especificada con un factor de potencia de 0.8 en atraso, determine la regulación del voltaje y la potencia que desarrolla.

7.34. Las reactancias por unidad en los ejes d y q de un generador de polos salientes son de 0.75 y 0.5, respectivamente. La resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Determine la regulación del voltaje si el generador alimenta la carga nominal con un factor de potencia de 0.866 en atraso.

7.35. Resuelva otra vez el problema 7.34 con una resistencia por unidad del devanado de la armadura de 0.02 Ω/fase.

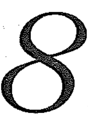
7.36. Un generador trifásico de polos salientes de 3.3 kV, conectado en Y entrega 900 kW con un factor de potencia igual a la unidad. Las reactancias síncronas en los ejes d y q son de 1.2 Ω/fase y 0.8 Ω/fase, respectivamente. La resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Determine la regulación porcentual del voltaje.

7.37. Resuelva otra vez el problema 7.36 con una resistencia del devanado de la armadura de 0.2 Ω/fase.

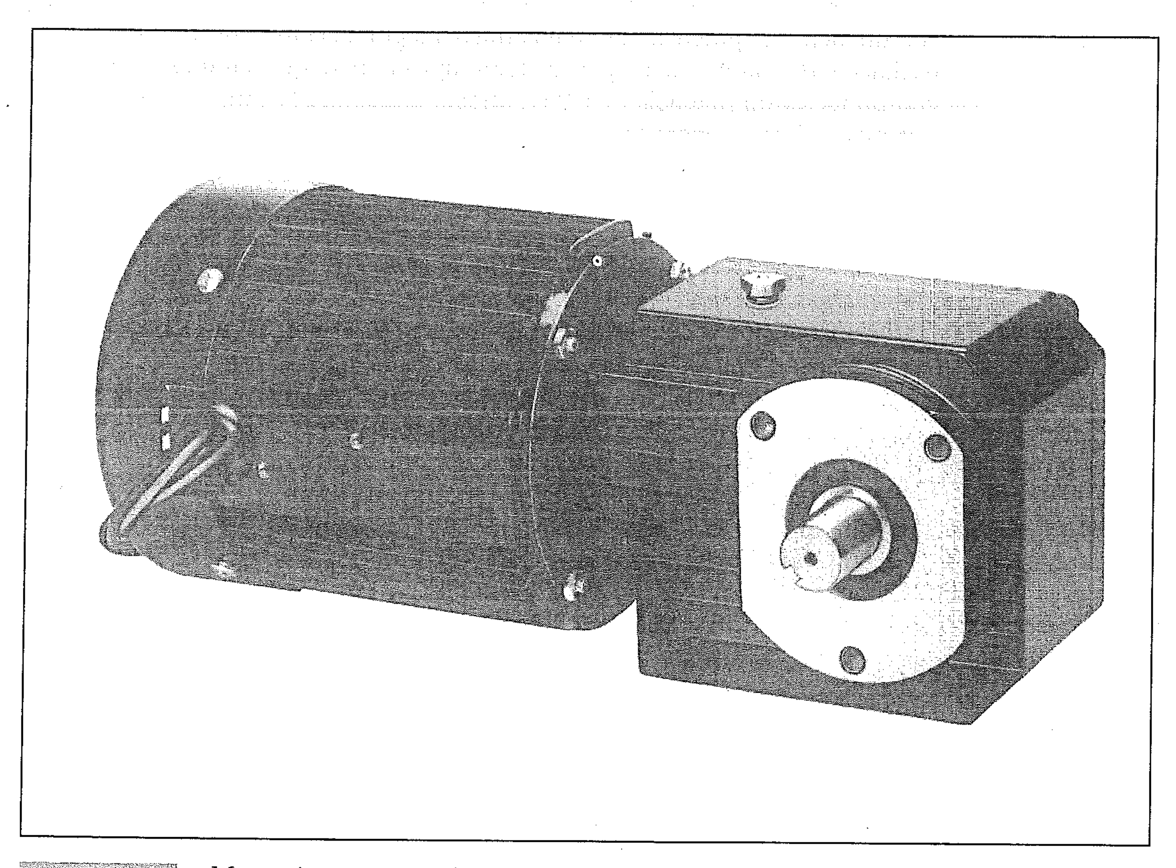
7.38. Dos generadores síncronos, trifásicos, idénticos, conectados en Y están conectados (valga la expresión) en paralelo para compartir por igual una carga de 900 kW a 11 kV con un factor de potencia de 0.8 en atraso. La impedancia síncrona de cada generador es de $0.5 + j10\ \Omega$/fase. La corriente del campo de un generador se ajusta de modo que su corriente de la armadura sea de 25 A con un factor de potencia en atraso. Determine *a*) la corriente de la armadura del otro generador, *b*) el factor de potencia de cada generador, *c*) el voltaje generado por fase y *d*) el ángulo de potencia de cada generador. ¿Cuál es la corriente circulante en condiciones sin carga?

7.39. Dos generadores síncronos, trifásicos, conectados en Y tienen voltajes inducidos de 480 $j0°$ V y 480 $j15°$ V. La impedancia síncrona de cada generador es de $0.2 + j8\ \Omega$/fase. Si los generadores se conectan en paralelo a una impedancia de carga de 24 Ω/fase, determine *a*) el voltaje en las terminales, *b*) las corrientes de la armadura y *c*) la potencia entregada por cada uno de ellos. Calcule la corriente circulante en condiciones sin carga.

7.40. Dos generadores síncronos, trifásicos, conectados en Y operan en paralelo para alimentar una carga de alumbrado de 480 kW y una carga de motor de 240 kW con un factor de potencia de 0.8 en atraso. La potencia mecánica recibida y la excitación del campo de un generador se ajustan para que suministre 240 kW con un factor de potencia de 0.9 en atraso. Encuentre la carga y el factor de potencia del otro generador.



Motores síncronos



Motor síncrono con reductor de velocidad. (*Cortesía de Bodine Electric Company.*)

8.1. Introducción

Como su nombre lo indica, un motor síncrono funciona en condiciones de estado estable a una velocidad fija llamada *velocidad síncrona*. Como se explicó en el capítulo anterior, la velocidad síncrona sólo depende de *a*) la frecuencia del voltaje aplicado y *b*) el número de polos en la máquina. En otras palabras, la velocidad de un motor síncrono es independiente de la carga hasta donde ésta se mantenga dentro de la capacidad del motor. Si el par de carga excede el par máximo que puede desarrollar el motor, éste sencillamente se detiene y el par promedio desarrollado es igual a cero. Por ello, un motor síncrono no tiene la característica inherente de autoarranque, por lo que debe ser impulsado casi a su velocidad síncrona con algún medio auxiliar antes de que pueda sincronizarse a la red de suministro.

Debido a su característica de par constante, un motor síncrono pequeño se utiliza como dispositivo controlador de tiempo. El motor síncrono grande puede emplearse para manejar cierta carga, así como para mejorar el factor de potencia conjunto de una planta industrial, ya que es posible operarlo con un factor de potencia en adelanto. Sin embargo, cuando se opera un motor síncrono sin carga tan sólo para mejorar el factor de potencia recibe el nombre de *condensador síncrono*.

Un motor síncrono puede ser monofásico o polifásico. En este capítulo estudiaremos únicamente los motores síncronos trifásicos, pero la explicación puede extenderse a cualquier motor síncrono polifásico.

8.2. Construcción y operación de un motor síncrono

La armadura de un motor síncrono es exactamente igual que la de un generador síncrono. Tiene un gran número de ranuras diseñadas para alojar los tres devanados de fase de doble capa, que son idénticos. Los devanados de fase están desplazados espacialmente 120° eléctricos uno de otro y los excita una fuente trifásica equilibrada. Como se describió en la sección 3.5, los devanados de fase sujetos a excitación producen un campo magnético uniforme que gira a lo largo de la periferia del entrehierro a velocidad síncrona. Si Φ_m es el valor máximo del flujo producido por la corriente máxima I_m en cada fase, la intensidad del campo magnético uniforme rotatorio es [véase el capítulo 3, ecuación 3.37]:

$$\Phi_r = 1.5\Phi_m \tag{8.1}$$

La velocidad síncrona en revoluciones por minuto (rpm) a la que gira el flujo alrededor de la periferia del entrehierro es [véase el capítulo 3, ecuación 3.39]:

$$N_s = \frac{120f}{P} \tag{8.2}$$

donde f es la frecuencia de la fuente de potencia trifásica y P el número de polos en el motor.

El rotor del motor síncrono tiene un devanado del campo que produce el flujo constante en el motor exactamente de la misma forma que lo hace en un generador síncrono. Una vez que el devanado del campo se excita con una fuente de corriente continua (cc), produce polos alternos sobre la superficie del rotor. Por lo expuesto hasta ahora debe resultar evidente que no hay diferencia entre un motor síncrono y un generador síncrono.

Supongamos que el rotor se encuentra inmóvil (condición de reposo) y el devanado del campo se excita para producir polos alternos en su periferia. El campo rotatorio que crea la armadura puede visualizarse como si dos imanes, un polo norte y uno sur, girasen a velocidad constante (síncrona) justo por encima de los polos del rotor. Cuando el polo sur del campo rotatorio está precisamente arriba del polo norte del rotor, la fuerza de atracción entre ellos tiende a mover el rotor en dirección del campo rotatorio. Debido a la considerable masa del rotor, transcurre cierto tiempo antes de que comience a moverse, pero para entonces el campo rotatorio ha invertido su polaridad. En ese momento la fuerza de repulsión entre los dos polos de igual polaridad tiende a mover el rotor en dirección opuesta. A medida que el rotor trata de girar en la dirección opuesta, el campo rotatorio ha invertido su polaridad una vez más. Por tanto, cada polo en el rotor recibe la acción de una fuerza que se invierte rápidamente, con igual magnitud en ambas direcciones. El par promedio que desarrolla el rotor en tales condiciones es igual a cero. Por tanto, un *motor síncrono no puede arrancar por sí mismo*. En consecuencia, para que un motor síncrono arranque es necesario dotarlo de ciertos medios de modo que desarrolle un par de arranque por sí mismo, o impulsar el rotor casi a su velocidad síncrona mediante otro impulsor primario y en seguida sincronizarlo excitando el devanado del campo.

Con objeto de que un motor síncrono arranque por sí solo, se le coloca un devanado adicional en las caras polares, el cual se conoce como *devanado amortiguador* o *devanado de inducción*. El devanado amortiguador, también conocido como *de jaula de ardilla*, es un devanado en cortocircuito. Para máquinas pequeñas, un devanado de jaula de ardilla requiere la colocación de laminaciones del rotor en un molde para luego forzar el material conductor fundido (a menudo aluminio) dentro de las ranuras. El molde tiene cavidades en ambos lados del rotor, las cuales se rellenan con el material conductor al mismo tiempo. El material conductor que llena la ranura de extremo a extremo forma una *barra conductora*. Las barras conductoras están en cortocircuito por los *anillos terminales*, como se muestra en la figura 8.1. La construcción en su conjunto es semejante a una jaula de ardilla, de ahí su nombre. Para máquinas grandes, el devanado de jaula de ardilla puede estar formado por barras de metal que se introducen en las ranuras una a la vez y luego se ponen en cortocircuito por medio de bandas conductoras anulares en ambos extremos.

El devanado amortiguador de un motor síncrono también puede ser del tipo de rotor devanado. El rotor devanado se utiliza cuando se desea *a*) controlar la velocidad del motor y *b*) desarrollar un par de arranque elevado. En las ranuras del rotor se coloca un devanado trifásico con la misma cantidad de polos que tenga la armadura. Un extremo de los devanados trifásicos está conectado internamente para formar un nodo común, en tanto que los otros extremos están conectados a los anillos rozan-

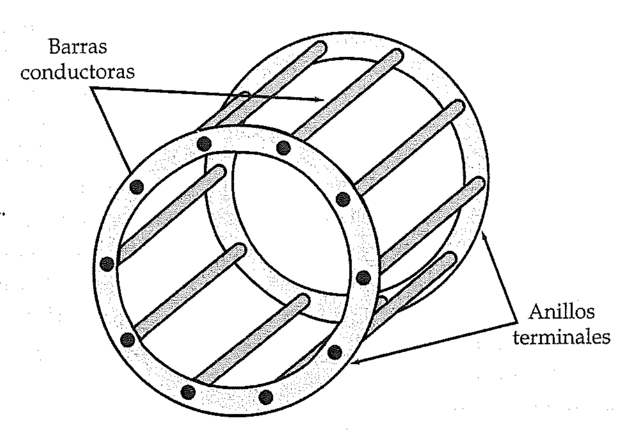


Figura 8.1. Devanado amortiguador de jaula de ardilla.

tes. Además, puede incluirse una resistencia externa en serie con cada devanado de fase, como se muestra en la figura 8.2, con objeto de aumentar el par de arranque (para mayores detalles, véase el capítulo 9).

En cualquier caso, el devanado amortiguador forma un lazo cerrado. El campo uniforme giratorio induce una fuerza electromotriz (fem) en ese devanado, el cual, a su vez, origina una corriente inducida en él. Como se explicó en el capítulo 3, la corriente inducida ejerce un par sobre los conductores del devanado amortiguador y los obliga a girar en la dirección del campo rotatorio. Funcionando sin carga, la velocidad del rotor es casi igual (aun cuando no exactamente la misma) a la velocidad síncrona del motor. Éste es, en realidad, el principio de operación de un motor de inducción, como se explicó en el capítulo 3. Por consiguiente, un motor síncrono se impulsa a su velocidad de operación sin carga igual que un motor de inducción.

Durante el periodo de aceleración del rotor, el devanado del campo debe *cortocircuitarse* por medio de un banco de resistencias apropiado. El devanado del campo

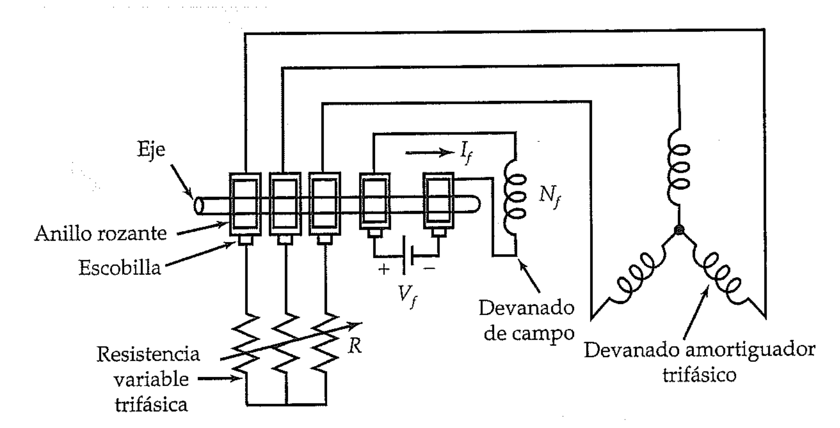


Figura 8.2. Devanado amortiguador trifásico en el rotor de un motor síncrono.

nunca debe dejarse abierto porque puede desarrollar alto voltaje, exactamente como el devanado secundario de un transformador elevador. Una vez que el rotor alcanza una velocidad estable, se elimina el cortocircuito y el devanado del campo se energiza conectándolo a una fuente de corriente continua (cc). Los polos del campo que se forman de ese modo sobre la periferia del rotor lo jalan en fase con el campo rotatorio. En otras palabras, los poderosos polos del campo se aseguran en fase con los polos rotatorios de polaridad opuesta creados por el devanado de la armadura (polos de la armadura). Por ende, se dice que el motor está *sincronizado*. El devanado amortiguador se torna ineficaz cuando el rotor gira a velocidad síncrona.

Sin carga, los ejes magnéticos de los polos de la armadura y los del rotor están prácticamente alineados, como se muestra en la figura 8.3*a*. Las líneas magnéticas de fuerza son perpendiculares a la superficie del rotor, por lo que no ejercen par alguno sobre éste. Los polos del rotor comienzan a deslizarse tras los de la armadura a medida que se incrementa la carga sobre el motor, como se ilustra en la figura 8.3*b*. Luego, las líneas magnéticas de fuerza tienen una componente paralela a la superficie de la armadura y ejercen una fuerza sobre el rotor. El ángulo o, mejor dicho, el ángulo de potencia entre los dos ejes magnéticos se mantiene en aumento con el incremento de la carga en el motor. El motor alcanza una región inestable aproximadamente a 60° eléctricos de desplazamiento angular entre los ejes magnéticos. Cualquier incremento adicional en la carga puede sacar al motor de sincronía.

El devanado amortiguador no sólo permite a un motor síncrono desarrollar el par de arranque, sino también tiene otro propósito útil: tiende a reducir al mínimo la *oscilación* del motor. La oscilación comprende los aumentos y disminuciones sucesivos en la velocidad del motor debidos a cambios bruscos en la carga. Cuando ésta se modifica repentinamente en un motor síncrono, se requiere tiempo para que el motor ajus-

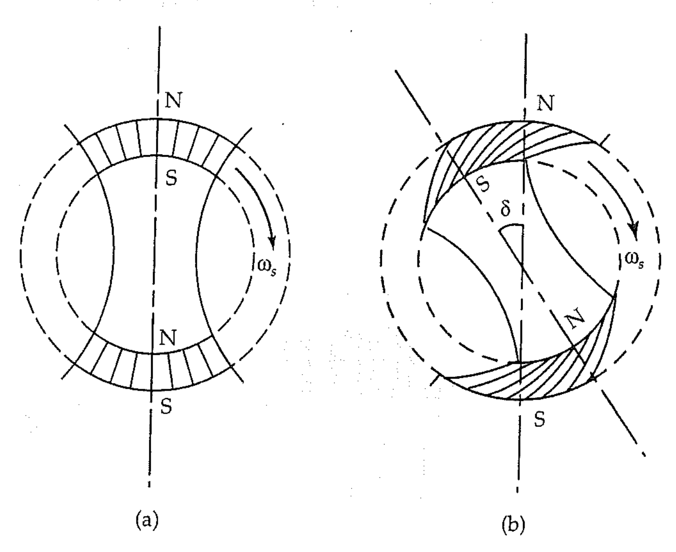


Figura 8.3. Líneas magnéticas de fuerza **(a)** sin carga y **(b)** con cierta carga, entre el campo rotatorio y el rotor de un motor síncrono.

te su ángulo de potencia debido a la inercia propia. Durante estos ajustes en el ángulo de potencia, la velocidad del motor fluctúa por arriba y por abajo de su velocidad síncrona. Estos cambios en la velocidad inducen corriente en el devanado amortiguador, desarrollando, en consecuencia, un par que se opone al cambio. Por ejemplo, cuando la carga en el motor se incrementa súbitamente, el rotor tiende a reducir su velocidad debido a un incremento en el par aplicado. En cuanto se reduce la velocidad, la corriente inducida en los conductores del devanado amortiguador ejerce una fuerza de aceleración en el rotor en la dirección de su rotación. Por otro lado, si la carga se reduce repentinamente, la inercia del motor tiende a incrementar la velocidad del rotor. De nuevo, se induce una corriente en los conductores del devanado amortiguador. Sin embargo, la corriente inducida ahora va en la dirección opuesta. Por tanto, se crea un par en la dirección contraria y obliga al rotor a disminuir su velocidad. Si el motor no está equipado con un devanado amortiguador, es posible que la oscilación adquiera una severidad intolerable.

8.3. Circuito equivalente de un motor síncrono

Cuando el rotor gira a velocidad síncrona, también lo hace el flujo constante producido por la corriente continua en el devanado del campo. El flujo del rotor induce una fem en el devanado de la armadura, exactamente igual que la acción del generador estudiada en el capítulo 7. Por otro lado, la corriente en cada devanado de fase da origen a *a*) un flujo de dispersión que sólo enlaza al devanado de fase y *b*) la reacción de la armadura. De acuerdo con el procedimiento estudiado en el capítulo anterior, los efectos del flujo de dispersión y de la reacción de la armadura pueden considerarse en el circuito equivalente como reactancias de dispersión y de magnetización. Debido a que ambos efectos ocurren al mismo tiempo, las dos reactancias pueden sustituirse ya sea por una reactancia síncrona única X_s para un motor síncrono con rotor cilíndrico, o por las reactancias síncronas X_d y X_q de los ejes *d* y *q* para el motor de polos salientes.

Motor síncrono de rotor cilíndrico

Es posible trazar ahora el circuito equivalente de un motor síncrono de rotor cilíndrico por fase, como se muestra en la figura 8.4, donde R_a y X_s son la resistencia del de-

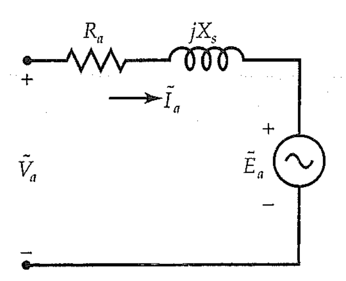


Figura 8.4. Circuito equivalente por fase de un motor síncrono de rotor cilíndrico.

vanado por fase y la reactancia síncrona, respectivamente. Con base en el circuito equivalente es posible expresar

$$\tilde{V}_a = \tilde{E}_a + \tilde{I}_a R_a + j\tilde{I}_a X_s \tag{8.3}$$

o

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_a - \tilde{E}_a}{R_a + jX_s} \tag{8.4}$$

Uno de los aspectos más importantes de un motor síncrono es que puede funcionar con factor de potencia en atraso, igual a la unidad o en adelanto, simplemente controlando su corriente del campo. En una sección ulterior daremos pormenores de esto. Por ahora, nuestro objetivo es trazar su diagrama fasorial cuando opera con cualquier factor de potencia. Estos diagramas fasoriales se ilustran en la figura 8.5, donde se ha tomado como referencia el voltaje aplicado por fase. En esos diagramas se pone de manifiesto que el voltaje de excitación por fase se encuentra en atraso respecto del voltaje aplicado. En otras palabras, el ángulo de potencia δ es una cantidad negativa.

Igual que el alternador, el motor síncrono también es una máquina doblemente alimentada. Sin embargo, ambas alimentaciones de potencia son de naturaleza eléctrica. Luego, la alimentación de potencia promedio a la máquina es

$$P_{in} = 3V_a I_a \cos\theta + V_f I_f \tag{8.5}$$

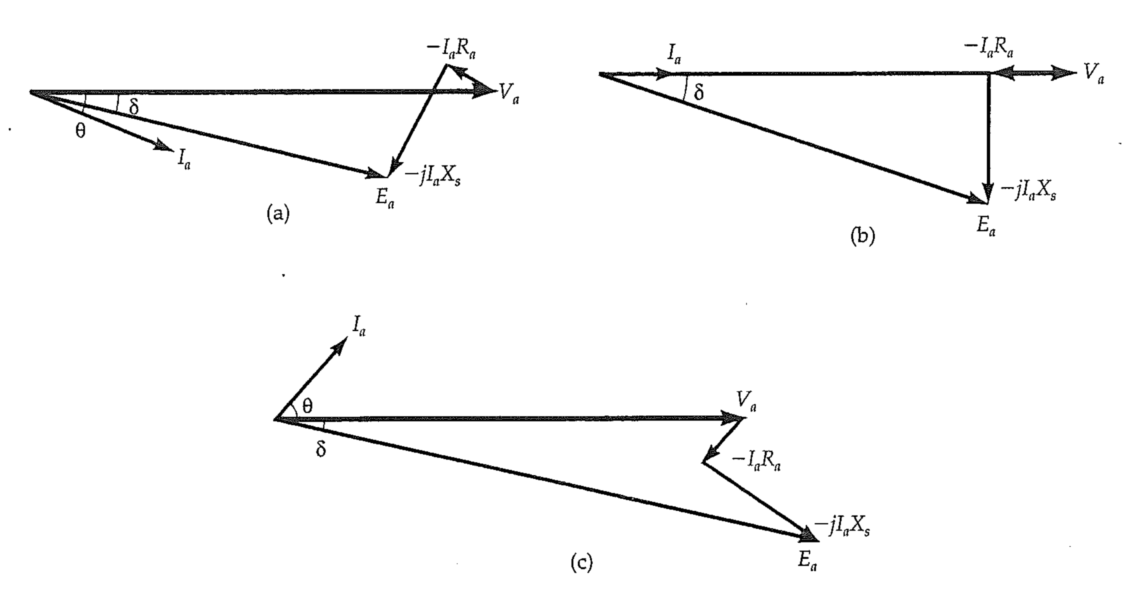


Figura 8.5. Diagramas fasoriales de un motor síncrono de rotor cilíndrico, para un factor de potencia **(a)** en atraso, **(b)** igual a la unidad y **(c)** en adelanto.

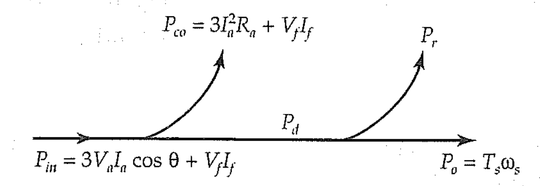


Figura 8.6. Diagrama de flujo de potencia de un motor síncrono.

donde θ es el ángulo del factor de potencia que existe entre el voltaje aplicado y la corriente en el devanado de la armadura, y V_fI_f representa la potencia de cc suministrada al devanado del campo, el cual se manifiesta simplemente como una pérdida de potencia. Esta pérdida puede evitarse instalando imanes permanentes en la superficie del rotor.

La pérdida (eléctrica) en el cobre en un motor síncrono tiene lugar en el devanado de la armadura. Si se conoce la pérdida de potencia en el devanado del campo también puede incluirse como parte de la pérdida en el cobre. Por tanto, en un motor síncrono la pérdida total en el cobre es

$$P_{co} = 3I_a^2R_a + V_fI_f \tag{8.6}$$

Al restar la pérdida en el cobre de la potencia alimentada se obtiene la potencia desarrollada por el rotor cilíndrico de un motor síncrono, que es

$$P_d = 3V_aI_a \cos\theta - 3I_a^2R_a \tag{8.7}$$

Si ω_s es la velocidad síncrona angular (rad/s) del motor, el par desarrollado por éste es

$$T_d = \frac{P_d}{\omega_s} \tag{8.8}$$

Para obtener la potencia de salida P_o se restan las pérdidas por rotación y las debidas a cargas parásitas (si las hubiera) de la potencia desarrollada. Como la potencia de salida es mecánica, es una práctica aceptada expresarla en términos de caballos de fuerza (hp, horse power). En la figura 8.6 se muestra un diagrama típico de flujo de potencia para un motor síncrono.

Ejemplo 8.1

Un motor síncrono, trifásico de 10 hp, 230 V, 60 Hz, conectado en Y suministra plena carga con un factor de potencia de 0.707 en adelanto. La reactancia síncrona del motor es de $j5\ \Omega$/fase. La pérdida por rotación es de 230 W y la pérdida del devanado

del campo es de 70 W. Calcule el voltaje generado y la eficiencia del motor. Desprecie la resistencia del devanado de la armadura.

• Solución

La potencia de salida es: $P_o = 10 \times 746 = 7\,460$ W
La potencia desarrollada es: $P_d = P_o + P_r = 7\,460 + 230 = 7\,690$ W
Puesto que no hay pérdida en el cobre en el devanado de la armadura, la potencia suministrada por la corriente alterna (ca) de 230 V es de 7 690 W. Luego, la corriente de la armadura es

$$I_a = \frac{7\,690}{\sqrt{3} \times 230 \times 0.707} \approx 27.3 \text{ A}$$

La potencia total alimentada es: $P_{in} = 7690 + 70 = 7760$ W

Por tanto, $$\eta = \frac{7\,460}{7\,760} = 0.961 \quad \text{o} \quad 96.1\%$$

Si se toma como referencia el voltaje aplicado por fase se tiene que

$$\tilde{V}_a = 132.79\underline{/0^\circ} \text{ V}$$

e

$$\tilde{I}_a = 27.3\underline{/45^\circ} \text{ A}$$

El voltaje generado por fase es

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a &= 132.79\underline{/0^\circ} - (27.3\underline{/45^\circ})(j5)\\ &= 248.8\underline{/-22.8^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

■

Motor síncrono de polos salientes

El circuito equivalente de un motor síncrono de rotor cilíndrico es exactamente igual que el de un generador síncrono de rotor cilíndrico, salvo por la dirección de la corriente de fase $\tilde{I}_a$. Por analogía, es posible obtener el circuito equivalente de un motor síncrono de polos salientes como se ilustra en la figura 8.7. Las polaridades de las fem inducidas en los ejes *d* y *q* se han invertido para explicar el cambio de dirección de la corriente de fase. Con base en la figura 8.7*a*, el voltaje de excitación por fase puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a &= \tilde{V}_a - \tilde{I}_a R_a - j\tilde{I}_d X_d - j\tilde{I}_q X_q\\ &= \tilde{V}_a - \tilde{I}_a R_a - j\tilde{I}_a X_q - j\tilde{I}_d (X_d - X_q)\end{aligned} \tag{8.9}$$

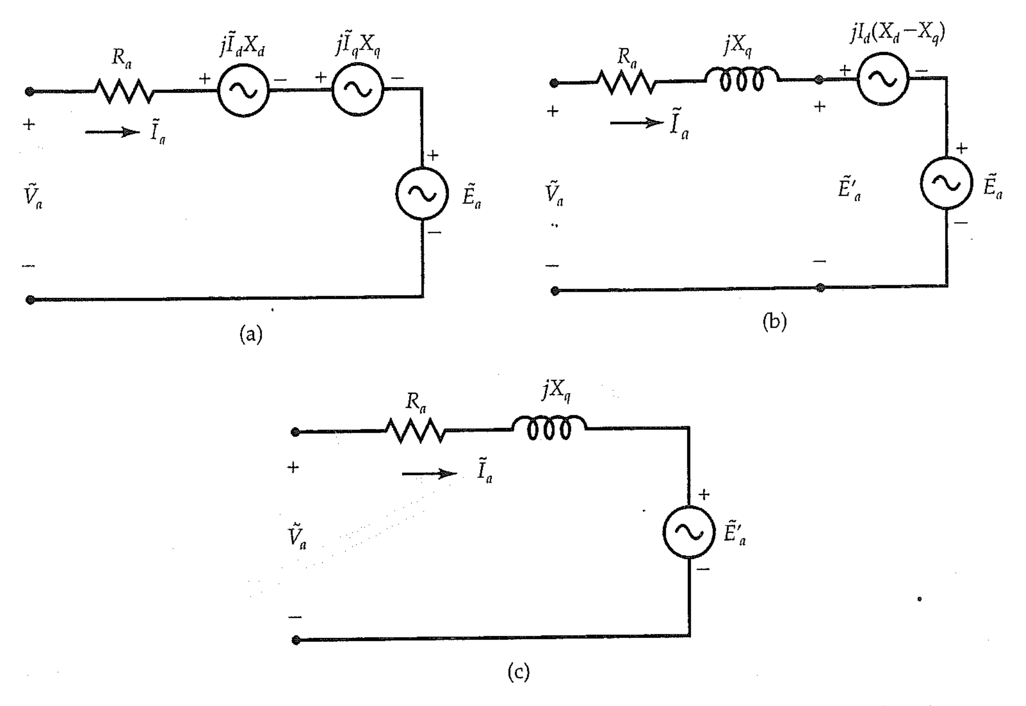


Figura 8.7. Representaciones de circuitos equivalentes por fase de un motor síncrono de polos salientes.

Si se define $\tilde{E}'_a$ como

$$\tilde{E}'_a = \tilde{V}_a - \tilde{I}_a R_a - j\tilde{I}_a X_q \tag{8.10}$$

la ecuación 8.9 puede expresarse como sigue:

$$\tilde{E}_a = \tilde{E}'_a - j\tilde{I}_d(X_d - X_q) \tag{8.11}$$

Los circuitos equivalentes de las figuras 8.7*b* y *c* se basan en las ecuaciones 8.11 y 8.10, respectivamente. Observe también que el ángulo de fase de $\tilde{E}'_a$ es el mismo que el de $\tilde{E}_a$, el cual es realmente el ángulo de potencia. Así, la ecuación 8.10 puede emplearse para calcular *a*) el ángulo de potencia δ, si no se conociera, y *b*) la potencia desarrollada por el motor. Es decir,

$$P_d = 3\text{Re}[\tilde{E}'_a \tilde{I}^*_a] \tag{8.12}$$

La potencia desarrollada también puede calcularse a partir de la ecuación 8.7.

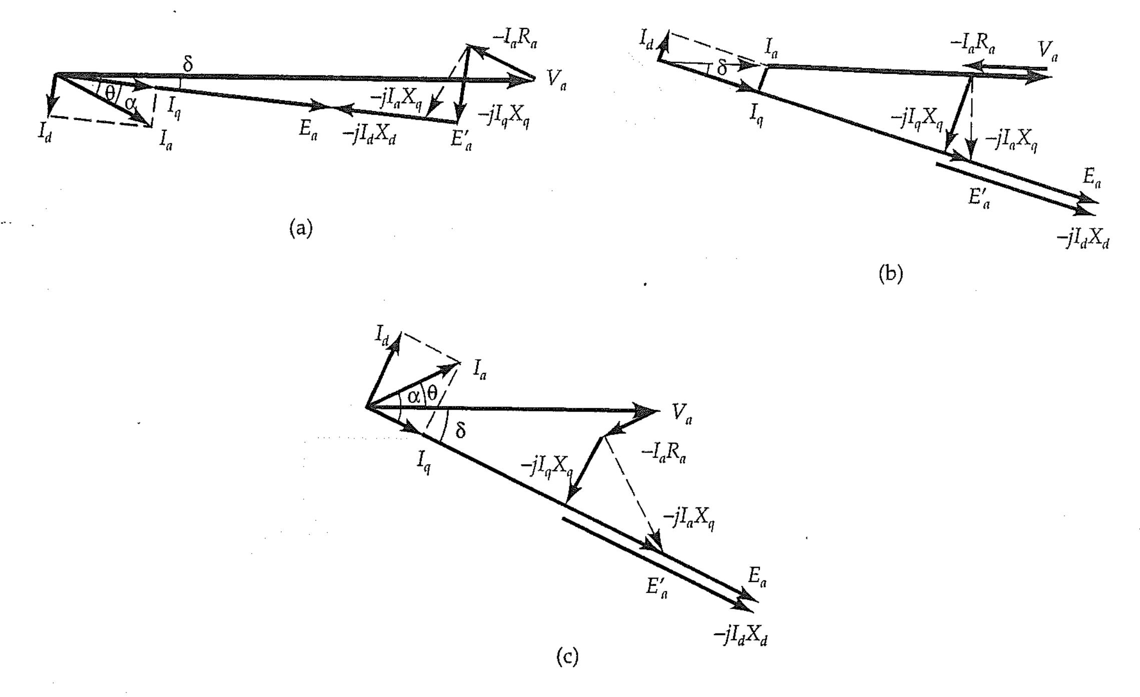


Figura 8.8. Diagramas fasoriales de un motor síncrono de polos salientes para un factor de potencia **(a)** en atraso, **(b)** igual a la unidad y **(c)** en adelanto.

Si la ecuación 8.11 se expresa del modo siguiente:

$$\tilde{E}'_a = \tilde{E}_a + j\tilde{I}_d(X_d - X_q) \tag{8.13}$$

podemos referirnos a $\tilde{E}'_a$ como *voltaje efectivo de excitación*. Representa la fem inducida en el devanado de la armadura de un motor síncrono cuando se tiene en consideración el efecto de polos salientes. Como cabe esperar, cuando $X_d = X_q$ (rotor cilíndrico), $\tilde{E}'_a = \tilde{E}_a$. En efecto, el voltaje de excitación $\tilde{E}_a$ no debe calcularse a menos que sea necesario identificar la fem inducida por fase en el devanado de la armadura debida al flujo del rotor por polo. Puede afirmarse lo mismo para $\tilde{I}_d$ e $\tilde{I}_q$. En cualquier caso, es posible trazar los diagramas fasoriales (fig. 8.8) para un motor síncrono de polos salientes que describan tanto $\tilde{E}'_a$ como $\tilde{E}_a$ cuando el factor de potencia se encuentre en atraso, sea igual a la unidad o se halle en adelanto.

Ejemplo 8.2

Un motor síncrono, trifásico, de polos salientes, de 480 V, conectado en Y, trabaja a plena carga y toma una corriente de 50 A con un factor de potencia igual a la unidad. Las reactancias en los ejes d y q son 3.5 Ω/fase y 2.5 Ω/fase, respectivamente. La re-

sistencia del devanado de la armadura es de 0.5 Ω/fase. Determine *a*) el voltaje de excitación del motor y *b*) la potencia desarrollada por él.

- Solución

Si se toma como referencia al voltaje aplicado por fase se tiene

$$V_a = \frac{480}{\sqrt{3}} = 277.128 \text{ V}$$
$$\tilde{I}_a = 50\underline{/0^\circ} \text{ A}$$

Por tanto, $\tilde{E}_a' = \tilde{V}_a - \tilde{I}_a R_a - j\tilde{I}_a X_q$

$$= 277.128 - 50 \times 0.5 - j50 \times 2.5 = 281.413\underline{/-26.37^\circ}$$

Luego, el ángulo de potencia es

$$\delta = -26.37^\circ$$

Con base en el diagrama fasorial (fig. 8.8), la corriente en el eje *d* es

$$\tilde{I}_d = 50 \times \text{sen}\,(26.37^\circ)\underline{/90^\circ - 26.37^\circ}$$
$$= 22.208\underline{/63.63^\circ} \text{ A}$$

Luego, el voltaje de excitación por fase es

$$\tilde{E}_a = \tilde{E}_a' - j\tilde{I}_d(X_d - X_q)$$
$$= 281.413\underline{/-26.37^\circ} - j(22.208\underline{/63.63^\circ})(3.5 - 2.5)$$
$$= 303.621\underline{/-26.37^\circ} \text{ V}$$

Finalmente, el valor medio cuadrático (rms) del voltaje de excitación de línea a línea es

$$E_L = \sqrt{3} \times 303.621 = 525.89 \text{ V}$$

La potencia desarrollada por el motor es

$$P_d = 3\text{Re}[\tilde{E}_a' \tilde{I}_a^*] = 3\text{Re}[(281.413\underline{/-26.37^\circ})(50)]$$
$$= 37.82 \text{ kW}$$

Comprobación:
$$\begin{aligned} P_d &= 3[\text{Re}(\tilde{V}_a\tilde{I}_a^*) - I_a^2R_a] \\ &= 3[\text{Re}(277.128 \times 50) - 50^2 \times 0.5] \\ &= 37.82 \text{ kW} \end{aligned}$$

■

Ejercicios

8.1. Un motor síncrono, trifásico, tetrapolar, de 2 hp, 120 V y conectado en Y, tiene una impedancia síncrona de $0.2 + j6$ Ω/fase. La pérdida por fricción y viento es de 20 W, la pérdida en el núcleo es de 35 W y la del devanado del campo es de 30 W. Calcule el ángulo de potencia y la eficiencia del motor cuando suministra la potencia especificada (o nominal) con un factor de potencia igual a la unidad.

8.2. Un motor síncrono, trifásico, hexapolar, de polos salientes, de 5 hp, 208 V, 60 Hz y conectado en Y, suministra la potencia nominal con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Si $X_d = 2.5$ Ω/fase, $X_q = 1.7$ Ω/fase, y $P_r = 260$ W, determine *a*) el voltaje de excitación, *b*) el ángulo de potencia, *c*) la potencia desarrollada, *d*) el par desarrollado y *e*) la eficiencia del motor.

8.4. Expresiones de la potencia

En esta sección el objetivo radica en obtener expresiones para la potencia desarrollada en términos de los voltajes aplicado y de excitación y el ángulo de potencia tanto por motores síncronos de rotor cilíndrico como de polos salientes.

Motor síncrono de rotor cilíndrico

A partir del circuito equivalente de un motor síncrono de rotor cilíndrico (fig. 8.4) se obtiene la expresión para la corriente de fase como sigue:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_a - \tilde{E}_a}{R_a + jX_s}$$

La potencia desarrollada es

$$\begin{aligned} P_d &= 3\text{Re}[\tilde{E}_a\tilde{I}_a^*] \\ &= 3\text{Re}\left[\frac{\tilde{E}_a\tilde{V}_a^* - E_a^2}{R_a - jX_s}\right] \\ &= 3\text{Re}\left[\frac{\tilde{E}_a\tilde{V}_a^*(R_a + jX_s)}{Z_s^2} - \frac{E_a^2R_a}{Z_s^2} - j\frac{E_a^2X_s}{Z_s^2}\right] \end{aligned} \tag{8.14}$$

donde
$$\hat{Z}_s = R_a + jX_s \tag{8.15}$$

es la impedancia síncrona. Observe que $Z_s^2 = \hat{Z}_s\hat{Z}_s^*$.

Si se toma el voltaje aplicado como fasor de referencia —es decir, $\tilde{V}_a = V_a\angle 0°$—, se tiene que

$$\tilde{E}_a = E_a\angle -\delta$$

donde δ *representa la magnitud del ángulo de potencia* por el que el voltaje de excitación $\tilde{E}_a$ está en atraso respecto del voltaje aplicado $\tilde{V}_a$.

Luego, la ecuación 8.14 puede expresarse como sigue:

$$P_d = \frac{3E_aV_a}{Z_s^2}[R_a \cos\delta + X_s \operatorname{sen}\delta] - \frac{3E_a^2R_a}{Z_s^2} \tag{8.16}$$

La ecuación 8.16 brinda una expresión exacta para la potencia desarrollada por un motor síncrono de rotor cilíndrico. Cuando la resistencia del devanado de la armadura es tan pequeña que puede despreciarse, la ecuación anterior puede aproximarse como

$$P_d = \frac{3E_aV_a \operatorname{sen}\delta}{X_s} \tag{8.17}$$

y el correspondiente par desarrollado por un motor síncrono de rotor cilíndrico es

$$T_d = \frac{3E_aV_a \operatorname{sen}\delta}{X_s\omega_s} \tag{8.18}$$

La potencia (o el par) desarrollada por un motor síncrono de rotor cilíndrico depende del ángulo de potencia y del voltaje de excitación cuando el voltaje aplicado se mantiene constante. Cuando la excitación del campo se reduce a cero, la potencia (o el par) desarrollada también es igual a cero. En otras palabras, si por accidente se abre el circuito del devanado del campo, el motor se detiene. Con base en las ecuaciones anteriores también es evidente que la potencia (o el par) desarrollada por un motor síncrono de rotor cilíndrico es máxima cuando $\tilde{E}_a$ se atrasa respecto de $\tilde{V}_a$ en 90°.

Ejemplo 8.3

Un motor síncrono, trifásico, de 440 V y conectado en Δ, tiene una reactancia síncrona de 36 Ω/fase. Su resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Cuando el motor gira a una velocidad de 188.5 rad/s consume 9 kW y el voltaje de excitación es de 560 V. Determine *a*) el factor de potencia, *b*) el ángulo de potencia, *c*) el voltaje de excitación de línea a línea para una secuencia de fase positiva y *d*) el par desarrollado por el motor.

- Solución

Si se toma como referencia el voltaje por fase del suministro se tiene que

$$\tilde{V}_a = \frac{440}{\sqrt{3}} \approx 254\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

Aplicando la transformación Δ-Y, la reactancia equivalente por fase de un motor síncrono conectado en Y es $X_s = 36/3 = 12\ \Omega$, y el voltaje de excitación por fase es $E_a = 560/\sqrt{3} = 323.32$ V. Por tanto,

$$\text{sen}\,|\delta| = \frac{P_d X_s}{3V_a E_a} = \frac{9\,000 \times 12}{3 \times 254 \times 323.32} = 0.438 \quad => \quad \delta = -26^\circ$$

Luego, $\tilde{E}_a = 323.32\underline{/-26^\circ}$ V.

La corriente de fase (o la corriente de línea) en un motor síncrono equivalente conectado en Y es

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_a - \tilde{E}_a}{jX_s} = \frac{254 - 323.32\underline{/-26^\circ}}{j12} = 12.2\underline{/14.48^\circ}\ \text{A}$$

a) El factor de potencia es: fp = cos(14.48°) = 0.97 (en adelanto)
b) El ángulo de potencia es: δ = −26° eléctricos
c) Para una secuencia de fase positiva, el voltaje de excitación de línea a línea es

$$\tilde{E}_L = \sqrt{3}\tilde{E}_a\underline{/30^\circ} = 560\underline{/4^\circ}\ \text{V}$$

y el voltaje aplicado de línea a línea es

$$\tilde{V}_L = 440\underline{/30^\circ}\ \text{V}$$

d) Como se conoce la potencia desarrollada, el par desarrollado es

$$T_d = \frac{P_d}{\omega_s} = \frac{9\,000}{188.5} = 47.75\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Motor síncrono de polos salientes

Al comparar el circuito equivalente de un motor síncrono de rotor cilíndrico (fig. 8.4) con un motor síncrono de polos salientes (fig. 8.7*c*), la expresión aproximada para la

potencia desarrollada por un motor síncrono de polos salientes puede obtenerse modificando la ecuación 8.17 como sigue:

$$P_d = \frac{3V_a E_a' \operatorname{sen} \delta}{X_q} \tag{8.19}$$

Con base en los diagramas fasoriales (fig. 8.8) puede escribirse la expresión

$$E_a' = E_a \pm I_d (X_d - X_q) \tag{8.20}$$

donde el signo más (+) es para el factor de potencia en atraso y el signo menos (–) para el factor de potencia igual a la unidad o en adelanto. Al eliminar $\tilde{E}_a'$ de la ecuación 8.19 se obtiene

$$\begin{aligned} P_d &= \frac{3V_a E_a \operatorname{sen} \delta}{X_q} \pm 3V_a I_d \operatorname{sen} \delta \left[\frac{X_d - X_q}{X_q} \right] \\ &= \frac{3V_a E_a \operatorname{sen} \delta}{X_d} + 3V_a \operatorname{sen} \delta \left[\frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \right] [E_a \pm I_d X_d] \end{aligned} \tag{8.21}$$

Sin embargo, de los diagramas fasoriales se tiene que

$$E_a \pm I_d X_d = V_a \cos \delta \tag{8.22}$$

Al sustituir la ecuación 8.22 en la 8.21 se obtiene una expresión aproximada para la potencia desarrollada por un motor síncrono de polos salientes, como sigue:

$$P_d = \frac{3V_a E_a \operatorname{sen} \delta}{X_d} + 3V_a^2 \operatorname{sen} 2\delta \left[\frac{X_d - X_q}{2X_d X_q} \right] \tag{8.23}$$

Con base en la ecuación anterior resulta evidente que un motor de polos salientes es capaz de desarrollar potencia (o par) aun cuando la excitación del campo se reduzca a cero. Por supuesto, la razón es la estructura de polos salientes del rotor. En otras palabras, incluso cuando se abra el circuito del devanado del campo el motor seguirá operando a su velocidad síncrona mientras la carga en el motor sea menor o igual a la potencia desarrollada debido a su estructura de polos salientes. Por otro lado, cuando $X_d = X_q = X_s$, la ecuación 8.23 se reduce a la 8.17 para un motor síncrono de rotor cilíndrico.

Si se expresa la ecuación 8.23 como sigue:

$$P_d = A \operatorname{sen} \delta + B \operatorname{sen} 2\delta \tag{8.24a}$$

donde

$$A = \frac{3V_aE_a}{X_d} \qquad \text{y} \qquad B = 3V_a^2\left[\frac{X_d - X_q}{2X_dX_q}\right]$$

se tiene que la potencia desarrollada debido a la excitación del campo es

$$P_{df} = A \text{ sen } \delta \tag{8.24b}$$

y la potencia desarrollada debido a la estructura de polos salientes del rotor es

$$P_{ds} = B \text{ sen } 2\delta \tag{8.24c}$$

Cuando el voltaje aplicado y la excitación del campo se mantienen constantes, la condición para que la potencia desarrollada sea máxima puede obtenerse igualando $dP_d/d\delta$ a cero. Una vez hecho esto, se encuentra que la potencia desarrollada es máxima si $\delta \rightarrow \delta_m$, donde

$$\delta_m = -\cos^{-1}\left[\frac{-A + \sqrt{A^2 + 32B^2}}{8B}\right] \tag{8.25}$$

Observe que en la ecuación anterior se ha incluido un signo menos para asegurar que la fem inducida en un motor síncrono siempre quede en atraso respecto del voltaje aplicado.

Ejemplo 8.4

Un motor síncrono, trifásico, de polos salientes, de 208 V, 60 Hz y conectado en Y funciona a plena carga y toma una corriente de 40 A con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Las reactancias en los ejes *d* y *q* son de 2.7 Ω/fase y 1.7 Ω/fase, respectivamente. La resistencia del devanado de la armadura puede despreciarse, y la pérdida por rotación es 5% de la potencia desarrollada por el motor. Determine *a*) el voltaje de excitación, *b*) la potencia desarrollada debido a la excitación del campo, *c*) la potencia desarrollada debido a la estructura de polos salientes del motor, *d*) la potencia total desarrollada, *e*) la eficiencia del motor y *f*) la potencia máxima desarrollada por el motor.

- **Solución**

$$\tilde{V}_a = 120\underline{/0^\circ} \text{ V} \qquad \text{e} \qquad \tilde{I}_a = 40\underline{/-36.87^\circ} \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a' &= \tilde{V}_a - j\tilde{I}_aX_q \\ &= 120 - j1.7 \times 40\underline{/-36.87^\circ} \\ &= 96.083\underline{/-34.48^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

Luego, el valor absoluto del ángulo de potencia δ es 34.48°

$$\alpha = |\theta - \delta| = 2.39°$$
$$\tilde{I}_d = |I_a| \text{ sen } \alpha \underline{/-34.48° - 90°}$$
$$= 40 \times \text{sen } (2.39°)\underline{/-124.48°}$$
$$= 1.668\underline{/-124.48°} \text{ A}$$

a) El voltaje de excitación por fase es

$$\tilde{E}_a = \tilde{E}_a' - j\tilde{I}_d(X_d - X_q)$$
$$= 96.083\underline{/-34.48°} - j1.668\underline{/-124.48°} \times (2.7 - 1.7)$$
$$= 94.415\underline{/-34.48°} \text{ V}$$

b) La potencia desarrollada debido a la excitación del campo, P_{df}, es

$$P_{df} = \frac{3 \times 120 \times 94.415 \times \text{ sen } (34.48°)}{2.7} = 7\,126.68 \text{ W}$$

c) La potencia desarrollada debido a la estructura de polos salientes del motor, P_{ds}, es

$$P_{ds} = \frac{(2.7 - 1.7) \text{ sen } (2 \times 34.48°)}{2 \times 2.7 \times 1.7} \times 3 \times 120^2 = 4\,392.14 \text{ W}$$

d) La potencia total desarrollada es

$$P_d = P_{df} + P_{ds} \approx 11\,519 \text{ W}$$

Comprobación:

$$P_d = 3\text{Re}[\tilde{E}_a' \tilde{I}_a^*]$$
$$= 3\text{Re}[96.083\underline{/-34.48°} \times 40 \underline{/36.87°}] \approx 11\,520 \text{ W}$$

e) La pérdida por rotación es: $P_r = 0.05 \times 11\,519 \approx 576$ W

La potencia alimentada es: $P_{in} = 3\text{Re}[\tilde{V}_a \tilde{I}_a^*]$

$$= 3\text{Re}[120 \times 40\underline{/36.87°}]$$
$$= 11\,520 \text{ W}$$

Como se esperaba, la potencia alimentada es igual a la potencia desarrollada cuando se desprecia la resistencia del devanado de la armadura.

La potencia de salida es: $P_o = 11\,520 - 576 = 10\,944$ W

Por tanto, la eficiencia del motor es

$$\eta = \frac{10\,944}{11\,520} = 0.95 \qquad \text{o} \qquad 95\%$$

f) Con base en la ecuación 8.24,

$$A = \frac{3 \times 120 \times 94.415}{2.7} = 12\,588.67$$

$$B = \frac{3(2.7 - 1.7)}{2 \times 2.7 \times 1.7} \times 120^2 = 4\,705.88$$

$$P_d = 12\,588.67 \text{ sen } \delta + 4\,705.88 \text{ sen } 2\delta$$

De la ecuación 8.25, $\delta_m = -63.4°$

Finalmente, la potencia máxima desarrollada es

$$P_{dm} = 12\,588.67 \text{ sen } (63.4°) + 4\,705.88 \text{ sen } (2 \times 63.4°)$$
$$\approx 15\,024 \text{ W}$$

■

Ejercicios

8.3. Compruebe la ecuación 8.25.

8.4. Un motor síncrono, trifásico, de polos salientes, de 20 hp, 480 V, 60 Hz, 12 polos y conectado en Y, entrega la carga nominal con un factor de potencia igual a la unidad. Las reactancias síncronas en los ejes *d* y *q* son 1.5 Ω/fase y 0.9 Ω/fase, respectivamente. La pérdida de potencia por rotación es de 800 W. La resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Determine *a*) el voltaje de excitación, *b*) el ángulo de potencia, *c*) la potencia desarrollada debido a la excitación del campo, *d*) la potencia desarrollada debido a la estructura de polos salientes del motor, *e*) la potencia total desarrollada, *f*) el par desarrollado, *g*) la potencia máxima desarrollada y *h*) la eficiencia del motor.

8.5. Si el motor del ejercicio 8.4 está conectado a una fuente trifásica de 480 V por medio de una línea de transmisión de tres conductores con una reactancia de 2.5 Ω/línea, determine el ángulo de potencia y la potencia que desarrolla el motor.

8.5. Condición exacta para potencia máxima

La potencia desarrollada por un motor síncrono de rotor cilíndrico depende del voltaje en las terminales, su impedancia síncrona, el voltaje de excitación y el ángulo de potencia. La impedancia síncrona es constante mientras el motor opere en la región lineal. El voltaje en las terminales es constante cuando el motor está conectado a un conductor (bus) infinito. Si la excitación del campo se mantiene constante, el voltaje de excitación también es constante. Con estas restricciones, el cambio en la potencia desarrollada debe ir acompañado de un cambio en el ángulo de potencia. En consecuencia, la potencia desarrollada es máxima cuando $\delta \rightarrow \delta_m$ y $dP_d/d\delta = 0$. Al derivar la ecuación 8.16 respecto a δ e igualar el resultado a cero se obtiene

$$-R_a \operatorname{sen} \delta_m + X_s \cos \delta_m = 0$$

o

$$\tan \delta_m = \frac{X_s}{R_a} \tag{8.26}$$

la cual indica con claridad que el ángulo de potencia $\delta_m \rightarrow -90°$ cuando $R_a \rightarrow 0$. Esto concuerda con la ecuación 8.18.

Al sustituir la ecuación 8.26 en la 8.16 y después de hacer algunas simplificaciones se obtiene una expresión para la *potencia máxima desarrollada por fase*, P_{dma}, como sigue:

$$P_{dma} = \frac{V_a E_a}{Z_s} - \frac{E_a^2 R_a}{Z_s^2} \tag{8.27a}$$

Cuando $R_a \rightarrow 0$, la expresión anterior se simplifica de la manera siguiente:

$$P_{dma} = \frac{V_a E_a}{X_s} \tag{8.27b}$$

Observe que la ecuación 8.27 produce la potencia máxima para un valor específico de E_a. Sin embargo, E_a puede variar al modificar la excitación del campo. Por ende, P_{dma} aumenta/disminuye conforme E_a aumenta/disminuye con un incremento/disminución en la excitación del campo. Al derivar la ecuación 8.27*a* con respecto a E_a (dP_{dma}/dE_a) e igualar el resultado a cero se obtiene una ecuación para E_a como sigue:

$$E_a = \frac{V_a Z_s}{2R_a} \tag{8.28}$$

Éste es el valor del voltaje de excitación que permite obtener la potencia máxima desarrollada por un motor síncrono de rotor cilíndrico. Ha de advertirse que *éste no es el valor máximo del voltaje de excitación.*

Al sustituir la ecuación 8.28 en la 8.27 se obtiene la potencia máxima desarrollada por fase como sigue:

$$(P_{dma})_{\text{máx}} = \frac{V_a^2}{4R_a} \tag{8.29}$$

La ecuación 8.27*a* también puede expresarse como sigue:

$$E_a^2 - \frac{Z_s}{R_a} V_a E_a + \frac{Z_s^2}{R_a} P_{dma} = 0$$

Al despejar E_a, se obtiene

$$E_a = \frac{Z_s}{2R_a}\left[V_a \pm \sqrt{V_a^2 - 4R_a P_{dma}}\right] \tag{8.30}$$

En correspondencia con la potencia máxima desarrollada por fase, P_{dma}, hay dos valores del voltaje de excitación E_a que se obtienen de la ecuación anterior. Se considera que estos valores representan los límites de la excitación para cualquier carga en el motor.

También puede obtenerse el criterio para la potencia máxima desarrollada por fase como función de E_a para valores fijos de V_a, Z_s y δ, derivando la ecuación 8.16 respecto a E_a e igualando a cero. Al hacerlo se obtiene

$$E_a = \frac{V_a}{2R_a}\left[R_a \cos\delta + X_s \operatorname{sen}\delta\right] \tag{8.31}$$

Al sustituir la ecuación 8.31 en la 8.16 se obtiene la potencia máxima desarrollada como sigue:

$$P_{dma} = \frac{V_a^2}{4R_a}\left[\frac{R_a}{Z_s}\cos\delta + \frac{X_s}{Z_s}\operatorname{sen}\delta\right]^2 \tag{8.32}$$

Sin embargo, del triángulo de impedancia (fig. 8.9) se tiene que

$$R_a = Z_s \cos\phi$$

y

$$X_s = Z_s \operatorname{sen}\phi$$

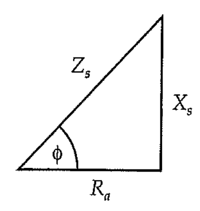


Figura 8.9. Triángulo de impedancia para la impedancia síncrona de un motor síncrono de rotor cilíndrico.

Al sustituir R_a y X_s en la ecuación 8.32 se obtiene la potencia máxima desarrollada como sigue:

$$P_{dma} = \frac{V_a^2}{4R_a} \cos^2(\phi - \delta) \qquad (8.33)$$

Con base en la ecuación anterior resulta evidente que P_{dma} es máxima cuando $\delta = \phi$. Cuando $\delta = \phi$, las ecuaciones 8.31 y 8.33 se reducen a las ecuaciones 8.28 y 8.29, respectivamente.

Ejemplo 8.5

Un motor síncrono, trifásico, de 120 V, 60 Hz, conectado en Y, rotor cilíndrico, tiene una resistencia del devanado de la armadura de $0.5 + j3$ Ω/fase. El motor toma una corriente de 10 A con un factor de potencia de 0.8 en adelanto cuando opera con cierta corriente del campo. La carga se incrementa gradualmente hasta que el motor desarrolla el par máximo, en tanto que la corriente del campo se mantiene constante. Determine la nueva corriente de línea, el factor de potencia y el par desarrollado por el motor.

- **Solución**

Operación inicial:

$$\hat{Z}_s = 0.5 + j3 = 3.04\underline{/80.54^\circ}\ \Omega$$

$$\tilde{V}_a = 69.28\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

$$\tilde{I}_{a1} = 10\underline{/36.87^\circ}\ \text{A}$$

$$\tilde{E}_{a1} = \tilde{V}_a - \tilde{I}_{a1}\hat{Z}_s = 87.54\underline{/-17.96^\circ}\ \text{V}$$

Operación a potencia máxima:

El ángulo de potencia asociado con el par máximo es

$$\delta_m = \tan^{-1}\left[\frac{3}{0.5}\right] = 80.54° \text{ (atraso)}$$

$$\tilde{E}_{a2} = 87.54\angle{-80.54°} \text{ V}$$

La corriente de línea es

$$\tilde{I}_{a2} = \frac{69.28 - 87.54\angle{-80.54°}}{0.5 + j3} = 33.66\angle{-22.98°} \text{ A}$$

La potencia máxima desarrollada por fase por el motor es

$$P_{dma} = \text{Re}\left[(87.54\angle{-80.54°})(33.66\angle{22.98°})\right]$$
$$\approx 1\,580 \text{ W/fase}$$

La potencia total que desarrolla el motor es

$$P_{dm} = 3P_{dma} = 4\,740 \text{ W}$$

La potencia máxima desarrollada por fase puede comprobarse con la ecuación 8.27 de la forma siguiente:

$$P_{dma} = \frac{69.28 \times 87.54}{3.04} - \frac{87.54^2 \times 0.5}{3.04^2} \approx 1\,580 \text{ W/fase}$$

■

Ejercicios

8.6. Un motor síncrono, trifásico, tetrapolar, de 440 V, 60 Hz conectado en Δ, tiene una impedancia síncrona de $1.2 + j8$ Ω/fase. La corriente del campo se ajusta para que el voltaje de excitación sea de 560 V. Si el motor desarrolla la potencia máxima, determine *a*) la corriente de línea, *b*) el factor de potencia, *c*) el ángulo del par, *d*) la potencia máxima desarrollada y *e*) el par máximo desarrollado.

8.7. Un motor síncrono, trifásico, de 208 V, 50 Hz, 12 polos y conectado en Y, tiene una impedancia síncrona de $0.75 + j7.5$ Ω/fase. La excitación del campo se ajusta para que el motor tome 25 A a plena carga con factor de potencia igual a la unidad. La pérdida por rotación es de 1.2 kW. Si la excitación del campo se mantiene constante, calcule *a*) la corriente de línea, *b*) el factor de potencia,

c) la potencia máxima desarrollada, *d*) la potencia máxima de salida, *e*) el par máximo en el eje y *f*) la eficiencia.

8.6. Efecto de la excitación

Condición sin carga (marcha en vacío)

Con objeto de discernir el efecto de la excitación en el comportamiento de un motor síncrono, supondremos que éste es ideal en el sentido de que *a*) no tiene resistencia en el devanado de la armadura y *b*) no hay pérdidas por rotación. También supondremos que el motor está conectado a un conductor (bus) infinito, de modo que su voltaje en las terminales es constante y no hay cambio en su frecuencia. La operación de un motor ideal sin carga requiere que no haya corriente de la armadura. Para que esto ocurra, el voltaje aplicado debe ser igual y opuesto al voltaje de excitación. Puesto que el motor gira a velocidad constante y la frecuencia de la fuente aplicada también es constante, el voltaje de excitación puede modificarse solamente variando la corriente (devanado del campo) de excitación. Cuando la corriente de excitación se ajusta a fin de obtener el voltaje de excitación con magnitud igual a la del voltaje aplicado, se le conoce como *excitación normal (100%)*. Puesto que no hay potencia desarrollada por el motor, el ángulo de potencia δ debe ser cero, como se indica en la figura 8.10*a*.

Si la corriente de excitación se incrementa más allá de lo necesario para la excitación normal, la magnitud del voltaje de excitación aumenta y se dice que el motor está *sobreexcitado*. La diferencia entre los voltajes aplicado y de excitación es la causa de la corriente de la armadura del motor. Esa corriente puede expresarse como

$$\tilde{I}_a = j\frac{\tilde{E}_a - \tilde{V}_a}{X_s} \tag{8.34}$$

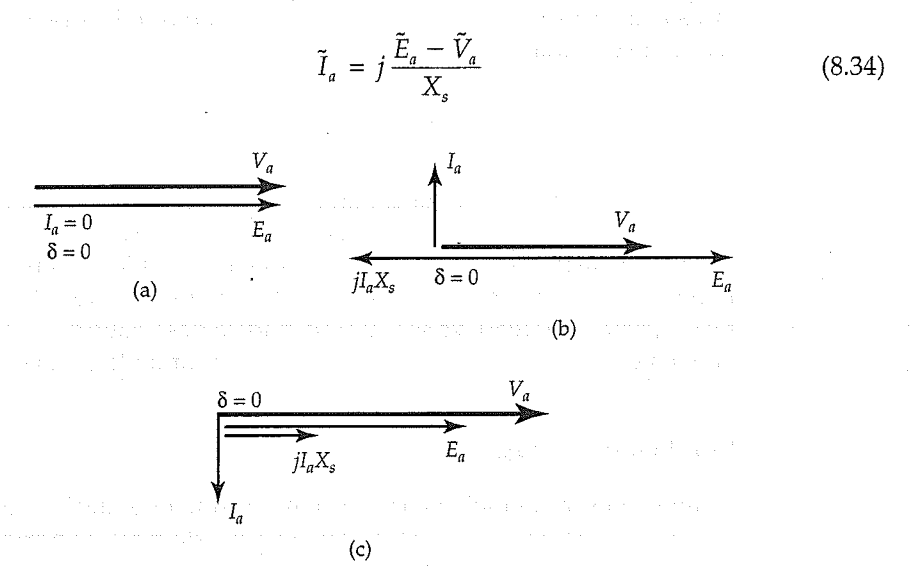


Figura 8.10. Funcionamiento de un motor síncrono sin carga para **(a)** excitación normal, **(b)** sobreexcitación y **(c)** subexcitación.

Como $\tilde{E}_a > \tilde{V}_a$, la corriente de la armadura está en adelanto respecto del fasor $\tilde{E}_a - \tilde{V}_a$ en 90°. La magnitud de la corriente de la armadura depende del nivel de sobreexcitación. Puesto que sin carga, la potencia de salida (desarrollada) es igual a cero, el ángulo de potencia δ todavía debe ser cero, como se muestra en la figura 8.10*b*. Sin embargo, la potencia de entrada compleja al motor es

$$\hat{S}_m = -j3V_aI_a \tag{8.35}$$

donde V_a e I_a son los valores efectivos del voltaje aplicado (en las terminales) y de la corriente de la armadura. La potencia compleja es puramente reactiva, y el signo menos destaca el hecho de que el motor se comporta como condensador cuando está sobreexcitado. Cuando un motor síncrono sobreexcitado opera sin carga, es común referirse a él como *condensador síncrono*. Se aplica de esta manera para mejorar el factor de potencia conjunto de una planta. En la próxima sección se ampliará el análisis de su función como condensador síncrono.

Cuando la corriente de campo está por debajo de su valor normal, se dice que el motor está *subexcitado*. En este caso, el voltaje de excitación es menor que el voltaje en las terminales, y la corriente en el devanado de la armadura es

$$\tilde{I}_a = -j\frac{\tilde{V}_a - \tilde{E}_a}{X_s} \tag{8.36}$$

Puesto que $\tilde{V}_a$ es mayor que $\tilde{E}_a$ y el ángulo de potencia δ todavía debe ser igual a cero, la presencia de $-j$ en la ecuación anterior indica que la corriente se encuentra en atraso respecto del voltaje aplicado en 90°, como se ilustra en la figura 8.10*c*. La potencia de entrada compleja al motor

$$\hat{S}_m = j3V_aI_a \tag{8.37}$$

es puramente inductiva. Luego, un motor síncrono subexcitado se comporta como inductor. Si se utiliza de este modo, el motor síncrono se conoce como *inductor síncrono*.

Del análisis anterior se desprende que un cambio en el nivel de excitación afecta la potencia reactiva sólo cuando el motor opera sin carga. No hay cambio en la potencia promedio (real), ya sea suministrada o desarrollada por el motor. El cambio en la potencia promedio sólo puede lograrse variando la carga en el motor.

Condición de carga

Examinemos la condición cuando el motor síncrono ideal suministra cierta carga. La potencia desarrollada por un motor síncrono de rotor cilíndrico es

$$P_d = \frac{3V_aE_a \operatorname{sen} \delta}{X_s} \tag{8.38}$$

Como V_a y X_s son constantes y P_d se mantiene constante, E_a sen δ también debe ser constante. A medida que E_a cambia con una variación en la excitación del campo, el ángulo de potencia δ también debe cambiar en forma tal que E_a sen δ sea constante. En otras palabras, el lugar geométrico del extremo de $\tilde{E}_a$ debe trazar una línea paralela a $\tilde{V}_a$, como se aprecia en la figura 8.11.

Un cambio en el voltaje de excitación también se acompaña por un cambio en la corriente de la armadura porque

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{V}_a - \tilde{E}_a}{jX_s} \tag{8.39}$$

Sin embargo, la potencia desarrollada por un motor ideal también es igual a la potencia alimentada al motor. Es decir,

$$P_{in} = 3V_a I_a \cos\theta \tag{8.40}$$

Como la potencia de salida del motor es constante, la potencia alimentada también debe serlo. Por ello, $I_a \cos\theta$ debe ser constante. Como la magnitud de la corriente de la armadura se modifica con el cambio en $\tilde{E}_a$, el ángulo del factor de potencia θ se ajusta a sí mismo de manera tal que el producto $I_a \cos\theta$ permanece constante. Esto es posible cuando el lugar geométrico del extremo de $\tilde{I}_a$, traza una línea perpendicular a $\tilde{V}_a$, según se ilustra en la figura 8.11.

Curvas V

Pueden hacerse las observaciones siguientes cuando se modifica gradualmente el nivel de excitación de la sub a la sobreexcitación para una potencia de salida constante:

1. La corriente de la armadura es mínima cuando está en fase con el voltaje en las terminales, es decir, el factor de potencia es igual a la unidad.

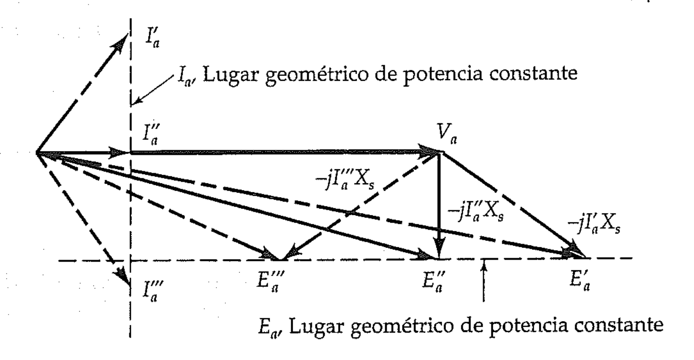


Figura 8.11. Lugares geométricos de potencia constante para la corriente de la armadura y el voltaje de excitación.

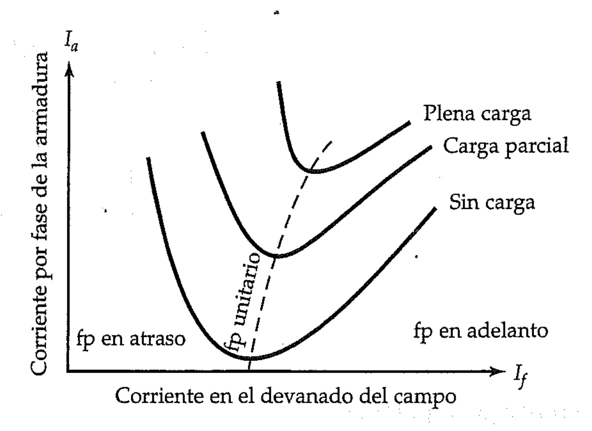


Figura 8.12. Curvas V para un motor síncrono.

2. El factor de potencia está en atraso cuando el motor se encuentra subexcitado. En este caso, el motor se comporta como una carga inductiva.
3. El factor de potencia está en adelanto cuando el motor está sobreexcitado. La operación de un motor síncrono sobreexcitado es análoga a la de una carga capacitiva. Una vez más, el motor no sólo puede usarse para suministrar par de carga, sino también para mejorar el factor de potencia del suministro de potencia trifásica.

Cuando se grafica la magnitud de la corriente de la armadura como función de la corriente de excitación para diferentes condiciones de carga, se obtiene un conjunto de curvas anidadas, conocidas como *curvas* V, las cuales se muestran en la figura 8.12. Estas curvas son muy similares a las trazadas para generadores síncronos en el capítulo anterior. La única diferencia es que el factor de potencia está en atraso cuando el motor está subexcitado, y en adelanto cuando está sobreexcitado.

También pueden graficarse las variaciones en el factor de potencia como función de la corriente de excitación, como se describe en la figura 8.13. Observe la agudeza de la curva sin carga en comparación con la de plena carga. ¿Puede decir por qué ocurre esto?

Ejemplo 8.6

Un motor síncrono, trifásico, de 208 V, conectado en Y tiene una reactancia síncrona de 4 Ω/fase y resistencia despreciable en el devanado de la armadura. Con cierta carga, el motor toma 7.2 kW con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Si la potencia desarrollada por el motor permanece sin cambio al tiempo que se incrementa en 50% el voltaje de excitación elevando la excitación del campo, determine *a*) la nueva corriente de la armadura y *b*) el factor de potencia.

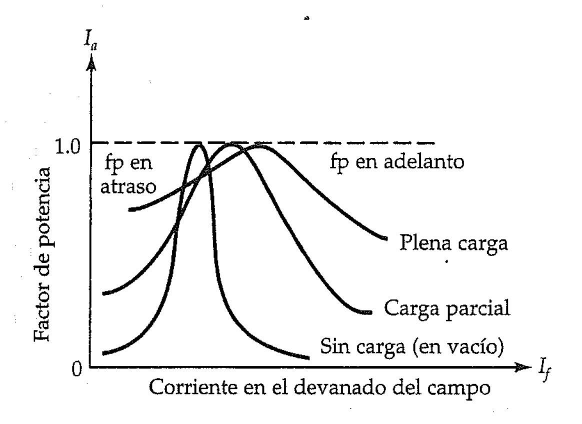


Figura 8.13. Característica del factor de potencia para un motor síncrono.

- Solución

$$\tilde{V}_a = 120\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_a = \frac{7\,200}{3 \times 120 \times 0.8} = 25 \text{ A}$$

Así,

$$\tilde{I}_a = 25\angle -36.87^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{E}_a = 120\angle 0^\circ - j4 \times 25\angle -36.87^\circ$$

$$= 100\angle -53.13^\circ \text{ V}$$

El nuevo voltaje de excitación es: $E_{an} = 100 \times 1.5 = 150$ V

Si δ_n es el nuevo ángulo del par, se tiene entonces que

$$\text{sen}\,\delta_n = \frac{7\,200 \times 4}{3 \times 120 \times 150} = 0.533 \qquad => \qquad \delta_n = -32.23^\circ$$

Por tanto, la nueva corriente de la armadura es

$$\tilde{I}_{an} = \frac{120 - 150\angle -32.23^\circ}{j4} = 20.073\ \angle 4.92^\circ \text{ A}$$

y el nuevo factor de potencia es

$$\text{fp} = \cos(4.92) = 0.996 \text{ (en adelanto)}$$

■

Ejercicios

8.8. Un motor síncrono, trifásico, de 208 V y conectado en Y toma 7.2 kW con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. La reactancia síncrona del motor es de 4 Ω/fase y la resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Si la excitación del campo se ajusta para que el voltaje de excitación disminuya en 50% mientras la carga en el motor permanece constante, determine *a*) el nuevo ángulo del par, *b*) la corriente de la armadura y *c*) el factor de potencia.

8.9. Repita el ejercicio 8.8 cuando la excitación del campo se ajusta para obtener un factor de potencia igual a la unidad. ¿Cuál es el cambio en el voltaje de excitación?

8.10. Grafique la curva V para el motor del ejercicio 8.8 por medio de la variación del factor de potencia, desde 0.5 en atraso hasta 0.5 en adelanto. Suponga que $E_a = 100I_f$, donde I_f es la corriente en el devanado del campo.

8.7. Corrección del factor de potencia

En un sistema eléctrico en el que se usan lámparas fluorescentes para iluminación y motores de inducción como máquinas impulsoras, el factor de potencia conjunto del sistema es bajo. Como la potencia total suministrada por un conductor (bus) infinito a la carga es $3V_aI_a \cos \theta$, una disminución en el factor de potencia $\cos \theta$ o un incremento en el ángulo θ del factor de potencia van acompañados por un incremento en la corriente I_a. Para la misma carga, el aumento en la corriente debido a la disminución del factor de potencia, no sólo ocasiona mayor caída del voltaje en la línea de transmisión, sino también mayores pérdidas de potencia. Por tal razón, una empresa proveedora normalmente cobra un precio más alto al consumidor que mantiene un factor de potencia inferior a 50%.

Puesto que un motor síncrono sobreexcitado toma energía con un factor de potencia en adelanto, se comporta como condensador. Se obtiene ventaja de este hecho a fin de mejorar el factor de potencia conjunto de un sistema eléctrico. Para lograrlo, se coloca un motor síncrono de alta eficiencia en paralelo con el resto de la carga. Es posible instalar un motor síncrono para sustituir un motor de inducción y también para mejorar el factor de potencia. Con el simple cambio en la corriente de excitación, el factor de potencia de un motor síncrono puede variar del atraso al adelanto o viceversa.

Cuando un motor síncrono se construye intencionalmente sin ninguna extensión del eje tan sólo para mejorar el factor de potencia recibe el nombre de *condensador síncrono*. Un motor así requiere escasa potencia real para su propia pérdida por rotación, pero suministra la potencia reactiva necesaria con un factor de potencia en adelanto.

Aunque puede parecer muy lógico elevar a la unidad el factor de potencia conjunto de un sistema eléctrico para reducir al mínimo el consumo de energía, no se acostumbra hacerlo porque una corrección de tal naturaleza impone al motor síncrono exigencias elevadas de potencia reactiva. Puede no ser económicamente viable instalar un motor síncrono con esas características. Por tanto, en la mayor parte de

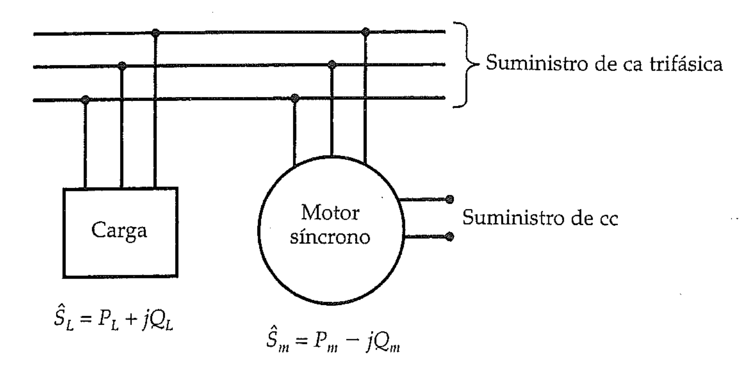


Figura 8.14. Corrección del factor de potencia utilizando un motor síncrono.

los casos, la potencia reactiva suministrada por el motor síncrono es menor que la demanda de potencia reactiva del resto del sistema eléctrico.

Sea $\hat{S}_L = P_L + jQ_L$ la potencia compleja requerida por un sistema eléctrico, como se muestra en la figura 8.14, y $\hat{S}_m = P_m - jQ_m$ la alimentación de potencia compleja al motor síncrono. Los requerimientos de potencia conjuntos son

$$\hat{S}_t = P_L + P_m + j(Q_L - Q_m) \qquad (8.41a)$$

$$= P_t + jQ_t \qquad (8.41b)$$

A la luz del análisis previo, $Q_m \leq Q_L$. El factor de potencia conjunto es

$$\text{fp} = \frac{P_t}{S_t} \qquad (8.42)$$

donde $S_t = |\hat{S}_t|$. En tanto $Q_m \leq Q_L$, el factor de potencia conjunto, pese a mejorar por la adición de un motor síncrono, todavía se encuentra en atraso, como lo ilustran los triángulos de potencia de la figura 8.15.

Ejemplo 8.7

En condiciones de operación normales, una planta manufacturera utiliza 100 kVA con factor de potencia de 0.6 en atraso. Se agrega un motor síncrono al sistema para mejorar el factor de potencia conjunto. La potencia requerida por el motor síncrono es de 10 kW. Determine el factor de potencia conjunto cuando el motor síncrono opera con un factor de potencia de 0.5 en adelanto. ¿Cuál debe ser el factor de potencia del motor para mejorar el factor de potencia conjunto a 0.9 en atraso?

• Solución

Para la carga: $\theta_L = \cos^{-1}(0.6) = 53.13°$ (en atraso)

$$\hat{S}_L = 100\underline{/53.13°} = 60 + j80 \text{ kVA}$$

Para el motor síncrono: $\theta_m = \cos^{-1}(0.5) = 60°$ (en adelanto)

$$S_m = \frac{10}{0.5} = 20 \text{ kVA}$$

Luego, $\hat{S}_m = 20\underline{/-60°} = 10 - j17.32$ kVA

Los requerimientos de potencia conjuntos son

$$\begin{aligned}\hat{S}_t &= 60 + 10 + j(80 - 17.32)\\ &= 70 + j62.68\\ &= 93.96\underline{/41.84°} \text{ kVA}\end{aligned}$$

y el factor de potencia es

$$\text{fp} = \cos(41.84°) = 0.74 \text{ en atraso}$$

Para que el factor de potencia sea de 0.9 en atraso, $\theta_t = 25.84°$ (en atraso). El requerimiento real (promedio) de potencia todavía es de 70 kW, y la potencia aparente correspondiente debe ser de 70/0.9 = 77.778 kVA. Por tanto,

$$\hat{S}_t = 77.778\underline{/25.84°} = 70 + j33.9 \text{ kVA}$$

Para requerimientos de potencia de la carga sin cambio, la nueva demanda de potencia sobre el motor es

$$\begin{aligned}\hat{S}_m &= (70 + j33.9) - (60 + j80)\\ &= 10 - j46.1\\ &= 47.172\underline{/-77.76°} \text{ kVA}\end{aligned}$$

Luego, el factor de potencia del motor es

$$\text{fp} = \cos(77.76) = 0.21 \text{ (en adelanto)}$$

■

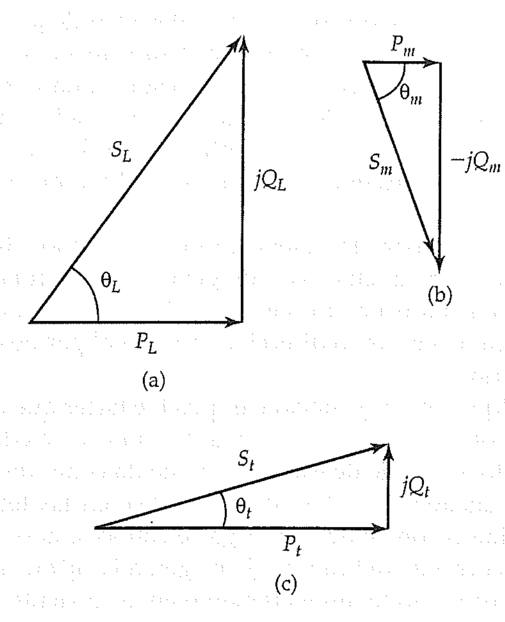


Figura 8.15. Triángulos de potencia en la fuente de energía trifásica para **(a)** carga, **(b)** motor síncrono, y **(c)** carga mejorada.

Ejercicios

8.11. El consumo de energía de una fábrica es de 2 000 kVA con un factor de potencia de 0.45 en atraso. Se agrega un motor síncrono para elevar el factor de potencia a 0.8 en atraso. Si la potencia alimentada al motor es de 100 kW, determine el factor de potencia y la especificación en kVA del motor.

8.12. La carga de una fábrica es de 360 kW con un factor de potencia de 0.6 en atraso, e incluye un motor de inducción que suministra 50 hp con una eficiencia de 80% y un factor de potencia de 0.866 en atraso. Cuando se reemplaza el motor de inducción por un motor síncrono con los mismos caballos de fuerza e igual eficiencia, el factor de potencia se convierte en 0.8 en atraso. Determine la especificación en kVA y el factor de potencia del motor.

Resumen

Eléctricamente, un motor síncrono es igual que un generador síncrono. Sin embargo, no arranca por sí mismo; equipándolo con un devanado amortiguador, desarrolla un par de arranque debido a la corriente inducida en ese devanado.

El devanado amortiguador puede ser trifásico o de jaula de ardilla. Una vez que el motor alcanza una velocidad casi igual a su velocidad síncrona, se excita el devanado del campo y el motor entra en sincronismo. Una vez que el motor alcanza su velocidad síncrona, el devanado amortiguador se vuelve ineficaz. El motor se mantiene girando a su velocidad síncrona mientras el par de carga sea menor que el par de salida. El par de salida es el par máximo que el motor puede aceptar sin salir de sincronismo.

Las ecuaciones para la potencia (o el par) desarrollada por un motor síncrono son las mismas que aquellas para un generador síncrono. La única diferencia es que el motor gira en la misma dirección que el par que desarrolla. Por otro lado, el generador es obligado a girar en dirección opuesta al par desarrollado por medio del impulsor primario.

Para cualquier carga conocida, es posible hacer que un motor síncrono opere con un factor de potencia en atraso, igual a la unidad o en adelanto. La corriente del campo (y por tanto el voltaje de excitación) que da como resultado que la corriente de la armadura se encuentre en fase con el voltaje en las terminales (factor de potencia igual a la unidad) con cualquier carga se conoce como *excitación normal*. Una disminución en la corriente del campo da origen a la *subexcitación* y factor de potencia en atraso. Del mismo modo, un incremento en la corriente del campo a partir de su valor normal ocasiona una *sobreexcitación* y factor de potencia en adelanto.

Un motor síncrono sobreexcitado con factor de potencia en adelanto no sólo sirve como motor para suministrar la potencia mecánica necesaria, sino también funciona como dispositivo para corregir el factor de potencia. En realidad, hay algunos motores síncronos, llamados *condensadores síncronos*, diseñados específicamente para controlar el factor de potencia.

Preguntas de repaso

8.1. ¿Cuál es la diferencia entre un motor síncrono y un generador síncrono?

8.2. ¿Qué es un devanado amortiguador? ¿Cómo contribuye para reducir al mínimo la oscilación?

8.3. Si se equipa un generador síncrono con un devanado amortiguador, ¿qué efecto tiene en la operación del generador?

8.4. ¿Cuál es el efecto del cambio en la corriente de excitación sobre la velocidad del motor?

8.5. ¿Cómo afecta el cambio en la corriente de excitación al factor de potencia de un motor síncrono? Explique brevemente qué sucede cuando la excitación del campo *a*) aumenta y *b*) disminuye.

8.6. Explique brevemente la operación de un motor síncrono.

8.7. Un motor síncrono trabaja con factor de potencia igual a la unidad. ¿Qué debe hacerse para que opere con factor de potencia en adelanto?

8.8. Una máquina síncrona está operando a partir de un conductor (bus) infinito. El voltaje de excitación se adelanta respecto del voltaje del bus en 15° y la corriente de fase está en atraso respecto del voltaje en las terminales en 36.87°. Si la resistencia del devanado de la armadura es despreciable, ¿está funcionando la máquina como motor o como generador? ¿Cuáles son los efectos en el ángulo y en el factor de potencia, y la potencia desarrollada cuando aumenta la corriente del campo?

8.9. La corriente de la armadura aumenta con un incremento en la corriente del campo de un motor síncrono. ¿Cuál es el ángulo inicial del factor de potencia? ¿Cuál es el efecto sobre el ángulo del par?

8.10. Un motor síncrono trabaja a plena carga. La corriente de la armadura disminuye con el aumento en la corriente del campo. La corriente de la armadura, ¿está en adelanto o en atraso respecto del voltaje en las terminales?

8.11. ¿Por qué está en atraso el ángulo de potencia en un motor síncrono?

8.12. Cuando se carga un motor síncrono, ¿qué sucede al eje magnético del rotor respecto al eje magnético del campo rotatorio?

8.13. ¿Es posible para un motor síncrono monofásico establecer un campo rotatorio?

8.14. ¿Es posible para un motor síncrono bifásico establecer un campo rotatorio?

8.15. ¿Hay alguna diferencia entre un motor síncrono y un condensador síncrono?

8.16. ¿Por qué es necesario mejorar el factor de potencia conjunto de una planta fabril?

8.17. ¿Por qué se incrementa la corriente del campo con el aumento en la carga de un motor síncrono a fin de mantenerlo operando con factor de potencia igual a la unidad?

8.18. Si la corriente de excitación se mantiene constante y se aumenta la carga en el motor síncrono, ¿qué sucede a su factor de potencia?

8.19. Un motor síncrono de 100 hp y 90% de eficiencia trabaja a plena carga con un factor de potencia de 0.707 en adelanto. ¿Cuál es la potencia alimentada al motor? ¿Cuál es su requerimiento en kVA? Trace su triángulo de potencia.

8.20. Una máquina usa 500 kW con un factor de potencia de 0.8 en atraso. ¿Qué tipo de carga representa la máquina? ¿Cuál es la exigencia en kVA de esa máquina? Trace su triángulo de potencia.

8.21. Un motor síncrono de 200 hp y eficiencia de 80% funciona a plena carga y toma 600 kVA del suministro. ¿Cuál es su factor de potencia? ¿Qué debe hacerse para reducir sus requerimientos en kVA?

8.22. El ángulo entre los ejes magnéticos del rotor y del campo rotatorio de un motor síncrono, trifásico, de 12 polos y 50 Hz, es de 2.5° mecánicos. ¿Cuál es su ángulo de potencia?

8.23. ¿Por qué aumenta la corriente de la armadura con el incremento en la carga de un motor síncrono aun cuando no haya cambio en su excitación del campo?

8.24. Un motor síncrono trabaja con factor de potencia igual a la unidad (excitación normal) bajo cierta carga. Si ésta aumenta, explique por qué cambia más rápido la corriente que el factor de potencia.

Problemas

8.1. Un motor síncrono, trifásico, de 220 V, conectado en Y tiene una impedancia síncrona de 0.25 + *j*2.5 Ω/fase. El motor entrega la carga nominal de 80 A con un factor de potencia de 0.707 en adelanto. Determine *a*) el voltaje de excitación, *b*) el ángulo de potencia y *c*) la potencia desarrollada por el motor.

8.2. La impedancia síncrona de un motor síncrono, trifásico, de 22 kV, 50 A y conectado en Y es de 0.5 + *j*12 Ω/fase. El motor funciona a plena carga y con un factor de potencia de 0.866 en atraso. La resistencia del devanado del campo es 25 Ω y la corriente del campo a plena carga es de 40 A. La pérdida por rotación es de 20 kW. Determine *a*) el ángulo de potencia, *b*) el voltaje de excitación y *c*) la eficiencia del motor.

8.3. Un motor síncrono, trifásico, hexapolar, de 450 kVA, 2 080 V, 50 Hz y conectado en Y tiene una impedancia síncrona de 1 + *j*15 Ω/fase. Si el motor trabaja a plena carga con un factor de potencia de 0.866 en adelanto, determine *a*) el voltaje de excitación, *b*) el ángulo de potencia, *c*) la potencia desarrollada y *d*) el par desarrollado.

8.4. Un motor síncrono, trifásico, octapolar, de 2 200 V, 60 Hz y conectado en Y tiene una impedancia síncrona de 0.8 + *j*8 Ω/fase. Sin carga, la excitación del campo se ajusta para que la magnitud del voltaje de excitación sea igual a la del voltaje aplicado. Cuando el motor se carga, el ángulo de potencia es de 22° eléctricos (en atraso). Calcule el par que desarrolla el motor.

8.5. La reactancia síncrona de un motor síncrono, trifásico, de 1 000 V y conectado en Δ es de 9 Ω/fase. Cuando el motor opera con cierta carga la potencia alimentada es de 138 kW y el voltaje de excitación es de 1 200 V (línea a línea). Si la resistencia del devanado de la armadura es despreciable, determine *a*) la corriente de línea y *b*) el factor de potencia.

8.6. La impedancia síncrona de un motor síncrono, trifásico, de 2 200 V y conectado en Y es de *j*3 Ω/fase. Con cierta carga, la potencia alimentada al motor es de 762 kW y el voltaje de excitación es de 2 600 V. Si la pérdida por rotación es de 50 kW, determine *a*) el ángulo de potencia, *b*) el factor de potencia y *c*) la eficiencia del motor.

8.7. Un motor síncrono, trifásico, de 100 hp, 2 300 V, 50 Hz y conectado en Δ trabaja a plena carga con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. La reactancia síncrona es de 12 Ω/fase y la resistencia del devanado de la armadura es despreciable. La pérdida por rotación es de 3 kW y la pérdida por excitación del campo es de 1.5 kW. Determine *a*) la corriente de la armadura, *b*) el ángulo de potencia y *c*) la eficiencia del motor.

8.8. Un motor síncrono, trifásico, hexapolar, de 10 hp, 208 V, 60 Hz y conectado en Y tiene una impedancia síncrona de 0.25 + *j*3.5 Ω/fase. La pérdida por fricción y viento es de 450 W, la pérdida en el núcleo es de 250 W y la pérdida por excitación del campo es de 100 W. Determine *a*) la corriente de la armadura, *b*) el ángulo del par, *c*) el par en el eje y *d*) la eficiencia cuando el motor opera a plena carga con factor de potencia igual a la unidad.

8.9. Un motor síncrono, trifásico, de 460 V y conectado en Y consume 20 kW a 1 200 rpm para cierta carga. El voltaje de excitación es de 580 V. La reactancia síncrona es de 5 Ω/fase y la resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Calcule la corriente de línea y el par desarrollado por el motor. Determine su eficiencia cuando la pérdida por rotación es de 2 kW. Desprecie la pérdida de potencia en el devanado del campo.

8.10. Un motor síncrono de 208 V conectado en Δ toma 30 A de un conductor (bus) infinito (suministro) a plena carga con factor de potencia de 0.866 en adelanto. La impedancia síncrona del motor es de $0.5 + j6$ Ω/fase. Determine la potencia desarrollada por el motor. ¿Cuál es la potencia máxima desarrollada por el motor si la excitación del campo se mantiene constante?

8.11. Un motor síncrono, trifásico, está conectado a un generador síncrono, trifásico. Obtenga una expresión para la potencia desarrollada por el motor síncrono en términos de los voltajes por fase sin carga del generador, E_{ga}, y del motor, E_{ma}, las reactancias síncronas del generador, X_{sg}, y del motor, X_{sm}, y los ángulos de potencia del generador, δ_g, y del motor, δ_m.

8.12. Un motor síncrono, trifásico, de polos salientes de 500 V y conectado en Y funciona a plena carga y toma una corriente de 30 A con factor de potencia de 0.8 en adelanto. Las reactancias síncronas en los ejes *d* y *q* son de 1.85 Ω/fase y 1.2 Ω/fase, respectivamente. La resistencia del devanado de la armadura es de 0.25 Ω/fase. La pérdida por rotación es 5% de la potencia desarrollada a plena carga. Determine *a*) el voltaje de excitación, *b*) el ángulo del par, *c*) la potencia total desarrollada y *d*) la eficiencia del motor.

8.13. Las reactancias síncronas en los ejes *d* y *q* de un motor de polos salientes son 1.0 por unidad y 0.7 por unidad. La resistencia del devanado de la armadura es despreciable. El ángulo del par es de 30°. El motor trabaja a su voltaje nominal en terminales y el voltaje de excitación es de 1.2 por unidad. ¿Cuál es la razón entre la potencia desarrollada debido a los polos salientes y la potencia total desarrollada por el motor? Si el factor de potencia es unitario, ¿cuál es la demanda de corriente por unidad del motor?

8.14. Un motor síncrono, trifásico, de 460 V, 60 Hz, 12 polos y conectado en Y trabaja a plena carga con factor de potencia de 0.8 en atraso. La corriente a plena carga es de 15 A. La resistencia del devanado de la armadura es de 0.2 Ω/fase, la reactancia síncrona en el eje *d* es de 15 Ω/fase y la reactancia síncrona en el eje *q* es de 8 Ω/fase. La pérdida de potencia por rotación es de 1.5 kW. Determine *a*) el ángulo del par, *b*) el par en el eje y *c*) la eficiencia del motor.

8.15. Resuelva otra vez el problema 8.14 considerando despreciable la resistencia del devanado de la armadura. También calcule la potencia máxima desarrollada por el motor.

8.16. Un motor síncrono, trifásico, de 208 V y conectado en Y tiene una impedancia síncrona de $0.4 + j4$ Ω/fase. El motor toma 30 A a plena carga y factor de potencia igual a la unidad. Si la corriente del campo se mantiene constante y la carga se incrementa gradualmente hasta que el motor desarrolla el par máximo, determine *a*) el nuevo factor de potencia, *b*) el ángulo del par y *c*) la po-

tencia desarrollada por el motor. También determine los límites de la excitación para el voltaje de excitación.

8.17. Un motor síncrono, trifásico, octapolar, de 2 080 V, 50 Hz y conectado en Y tiene una impedancia síncrona de $0.4 + j8\ \Omega$/fase. La corriente del campo se ajusta para obtener un voltaje de excitación de 1 732 V a plena carga. ¿Cuál es el par máximo que puede entregar el motor antes de salirse de sincronismo? También calcule *a*) el ángulo del par, *b*) la corriente de la armadura, *c*) el factor de potencia y *d*) los límites de excitación.

8.18. Un motor síncrono, trifásico, de 208 V y conectado en Y tiene una impedancia síncrona de $0.25 + j5\ \Omega$/fase. El motor opera a su límite más bajo de excitación y suministra una potencia máxima de 15 kW. Determine *a*) el ángulo del par, *b*) el voltaje de excitación, *c*) la corriente de línea, *d*) el factor de potencia y *e*) la eficiencia.

8.19. Un motor síncrono, trifásico, de 2 300 V conectado en Y tiene una impedancia síncrona de $0.2 + j10\ \Omega$/fase. El motor toma 40 A con un factor de potencia de 0.8 en atraso a plena carga. La corriente del campo se ajusta de tal modo que el motor desarrolla su potencia máxima sin ningún cambio significativo en su ángulo de potencia. Determine *a*) el nuevo voltaje de excitación, *b*) el ángulo de potencia, *c*) la corriente de línea, *d*) el factor de potencia y *e*) la potencia máxima desarrollada.

8.20. Resuelva otra vez el problema 8.19 con una excitación del campo constante y carga sobre el motor en aumento hasta que desarrolla la potencia máxima.

8.21. La reactancia síncrona de un motor síncrono, trifásico, de 2 200 V y conectado en Y es de 8 Ω/fase; la resistencia en el devanado de la armadura es despreciable. A plena carga el motor toma 90 kW con factor de potencia de 0.8 en adelanto. Si el par de la carga se mantiene constante pero se aumenta la excitación del campo en 30%, determine *a*) el nuevo ángulo del par, *b*) la corriente de la armadura y *c*) el factor de potencia.

8.22. Obtenga la curva V para el motor síncrono del problema 8.21 a plena carga. Suponga que el voltaje de excitación por fase es 500 veces la corriente del campo. Varíe el factor de potencia de 0.5 en atraso a 0.5 en adelanto.

8.23. Un motor síncrono, trifásico, de 460 V y conectado en Y toma 30 kW a plena carga con un factor de potencia igual a la unidad. La reactancia síncrona es de 4 Ω/fase y la resistencia del devanado es despreciable. Para una potencia de salida constante con factor de potencia de 0.8 en adelanto, ¿cuál debe ser el cambio en el voltaje de excitación? ¿Cuáles son los nuevos valores de potencia, ángulo, corriente de la armadura y factor de potencia?

8.24. Una fuente trifásica de 4 160 V conectada en Y suministra potencia a dos cargas inductivas conectadas en paralelo por medio de una línea de transmisión de tres conductores. La carga *A* está conectada en Y y tiene una impedancia de $30 + j40\ \Omega$/fase. La carga *B* está conectada en Δ y tiene una impedancia de $150 + j360\ \Omega$/fase. Para cada carga, determine *a*) la corriente, potencia y factor de potencia, *b*) la potencia total suministrada por la fuente y *c*) el factor de potencia de la carga combinada. Un motor síncrono conectado en Y que toma 30 kW con factor de potencia de 0.2 en adelanto está conectado en paralelo con

la fuente. ¿Cuál es la corriente que toma el motor? ¿Cuál es el factor de potencia conjunto?

8.25. Una compañía consume 500 kVA con factor de potencia de 0.45 en atraso de manera consuetudinaria. Se coloca un condensador síncrono de 300 kVAR en paralelo con el suministro a fin de mejorar el factor de potencia. Determine el nuevo factor de potencia.

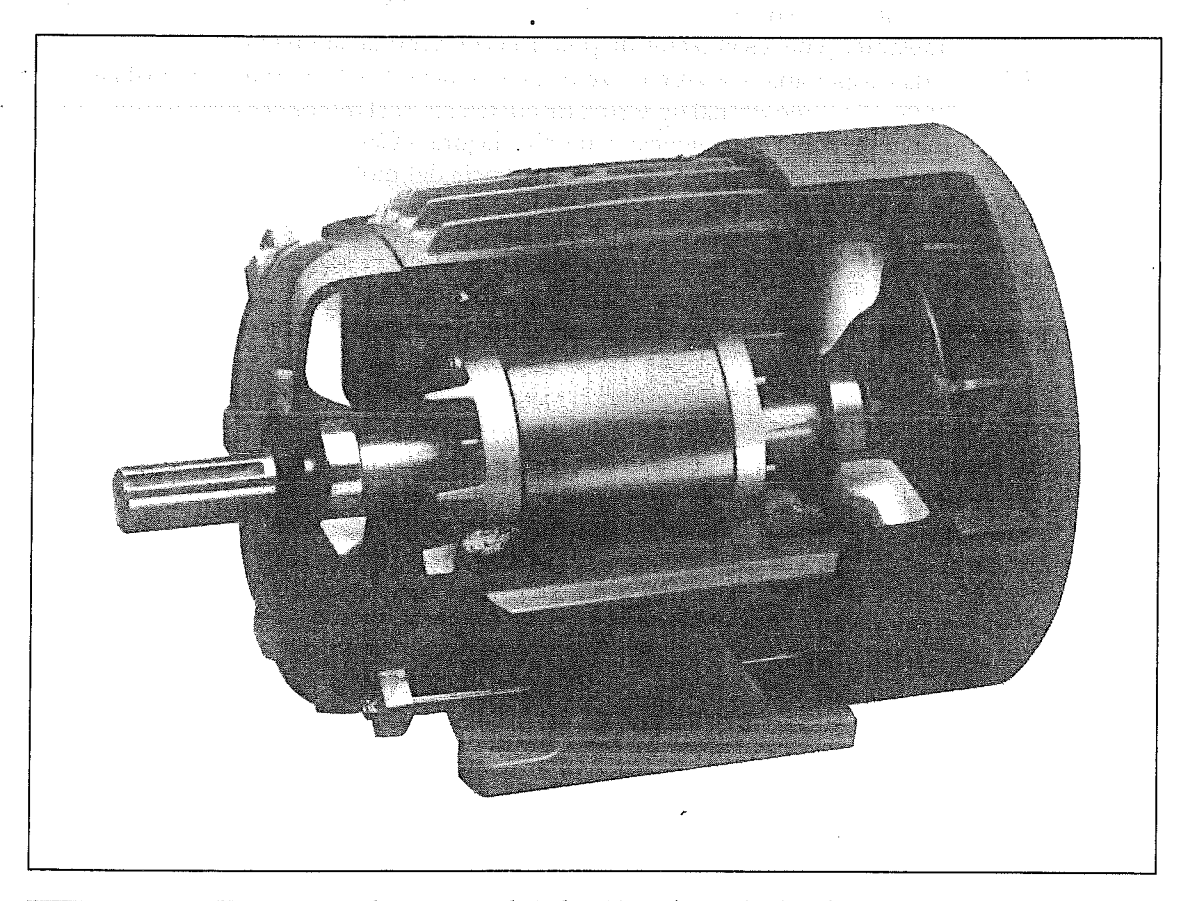
8.26. Una carga de 2.4 MVA funciona con factor de potencia promedio de 0.6 en atraso. ¿Cuáles deben ser la especificación de kVA y el factor de potencia de un condensador síncrono con objeto de obtener un factor de potencia conjunto de *a*) 0.85 en atraso y *b*) igual a la unidad? La resistencia del devanado del condensador síncrono es despreciable y la pérdida por rotación es de 24 kW. ¿Qué conclusiones pueden obtenerse al comparar los kVA nominales de la máquina síncrona?

8.27. La exigencia promedio de potencia de una planta es de 1 500 kVA con factor de potencia de 0.707 en atraso. Se agrega un motor síncrono de 200 hp y eficiencia de 90% para operar una nueva línea de ensamble. Cuando el motor trabaja a su carga especificada y consume 300 kVA con factor de potencia en adelanto, ¿cuál es el factor de potencia conjunto de la planta?

8.28. Una carga toma 3 MVA con factor de potencia de 0.5 en atraso. Se instala un motor síncrono de 400 hp y 80% de eficiencia. Si el motor opera a su carga nominal, el factor de potencia conjunto mejora a 0.866 en atraso. Calcule la especificación de kVA y el factor de potencia del motor.

9

Motores polifásicos de inducción



Vista en corte de un motor de inducción trifásico de alta eficiencia. (*Cortesía de MagneTek.*)

9.1. Introducción

Los motores de corriente continua (cc) y síncronos que se han analizado hasta aquí tienen algo en común: ambos son del tipo de doble alimentación. Estos motores tienen corriente continua en los devanados del campo y corriente alterna (ca) en los devanados de la armadura. Como la energía eléctrica se alimenta directamente a la armadura de un motor de cc por medio de un conmutador, también puede hacerse referencia a él como un *motor de conducción*.

Ahora consideraremos un motor en el que el rotor no recibe la energía por conducción sino por inducción y, por tanto, se llama *motor de inducción*. Un devanado que recibe la energía exclusivamente por inducción constituye un transformador. Por ende, un motor de inducción es un transformador con un devanado secundario giratorio. De lo anterior se desprende que:

1. Un motor de inducción es un motor con una sola alimentación. Por consiguiente, no requiere de un conmutador, anillos rozantes o escobillas. En realidad, no hay contactos móviles entre el estator y el rotor. Los aspectos mencionados dan como resultado un motor robusto, confiable y prácticamente libre de mantenimiento.
2. La ausencia de escobillas elimina la pérdida eléctrica debida a la caída de voltaje en éstas y la pérdida mecánica debida a la fricción entre las escobillas y el conmutador o los anillos rozantes. Por tanto, un motor de inducción tiene una eficiencia relativamente alta.
3. Un motor de inducción porta ca en los devanados tanto del estator como del rotor.
4. Un motor de inducción es un transformador rotatorio en el que el devanado secundario recibe energía por inducción mientras gira.

Hay dos tipos básicos de motores de inducción: monofásicos y polifásicos. Los motores de inducción monofásicos son preferibles para aplicaciones domésticas. Un gran número de ellos se construyen en el rango de potencia fraccionaria (menos de un caballo de fuerza) y los estudiaremos en el capítulo 10. Por otro lado, los motores de inducción polifásicos cubren todo el espectro de las especificaciones en caballos de fuerza y se prefiere instalarlos en lugares donde hay acceso fácil a una fuente de potencia polifásica.

Debido a la amplia disponibilidad de la generación y transmisión de potencia trifásica, la mayor parte de los motores de inducción polifásicos son del tipo trifásico. En este capítulo limitaremos el estudio a los motores de inducción trifásicos; sin embargo, el desarrollo teórico puede extenderse a un motor de inducción n-fásico, donde $n \geq 2$.

9.2. Construcción

Los componentes esenciales de un motor de inducción son un *estator* y un *rotor*.

Estator

El miembro externo (estacionario) de un motor de inducción se llama *estator* y está formado por un conjunto de laminaciones delgadas, ranuradas, de acero de alta permeabilidad, dentro de un bastidor o carcasa de acero o hierro de fundición. El bastidor proporciona apoyo mecánico al motor y, aunque está hecho de material magnético, no está diseñado para conducir flujo magnético.

En las ranuras se devanan (o colocan) bobinas idénticas y luego se conectan para formar un devanado trifásico equilibrado. Si se desea obtener más detalles acerca de la colocación de las bobinas y sus conexiones internas, véase el capítulo 7.

Rotor

El rotor también está compuesto de laminaciones delgadas, ranuradas, de acero sumamente permeable que se fijan por presión sobre un eje. Hay dos tipos de rotores: de *jaula de ardilla* y *devanado.*

Por lo general, el *rotor de jaula de ardilla* se usa cuando la carga requiere un par de arranque reducido. Para motores pequeños, un devanado así se moldea forzando un material conductor fundido (con frecuencia, aluminio) dentro de las ranuras mediante el proceso de fundición a presión. En ambos lados del conjunto de láminas también se forman anillos circulares, llamados *anillos terminales,* que colocan en cortocircuito las barras en ambos extremos del rotor, según se explicó en el capítulo 8, donde el devanado de jaula de ardilla se designó *devanado amortiguador.* Para motores grandes, el devanado de jaula de ardilla se forma insertando barras conductoras pesadas (generalmente de cobre, aluminio o alguna de sus aleaciones) en las ranuras y después soldándolas o atornillándolas a los anillos terminales.

Cada par de polos tiene tantas fases en el rotor como barras, ya que cada una de éstas se comporta en forma independiente de las demás. Es práctica común *sesgar* las laminaciones del rotor para reducir la vibración y el ruido eléctrico en el motor. En una sección posterior se ampliarán estos conceptos.

Es necesario utilizar un *rotor devanado* cuando la carga requiere un par de arranque alto. Un rotor devanado debe tener tantos polos y fases como el estator. En realidad, la colocación de las bobinas en un rotor devanado no es diferente de la de un estator. Los devanados trifásicos en el rotor están conectados internamente para formar una conexión *neutra interna.* Los otros tres extremos están conectados a los anillos rozantes, como se explicó en el capítulo 8. Con las escobillas deslizándose sobre los anillos rozantes, es posible agregar resistencias externas en el circuito del rotor. De este modo puede controlarse la resistencia total del circuito del rotor; al hacerlo, realmente está controlándose el par que desarrolla el motor. Demostraremos más adelante que la velocidad a la que un motor de inducción desarrolla el par máximo (denominada *velocidad crítica*) depende de la resistencia del rotor. Conforme se incrementa la resistencia del rotor, la velocidad crítica disminuye. Por tanto, es posible obtener el par máximo en el arranque (velocidad cero) insertando la cantidad exacta de resistencia en el circuito del rotor. Sin embargo, un motor de inducción con rotor devanado es más caro y menos eficiente que uno de inducción de jaula de ardilla con

las mismas especificaciones. Por esas razones, un motor de inducción con rotor devanado sólo se utiliza cuando uno de jaula de ardilla no puede suministrar el par de arranque alto que exige la carga.

9.3. Principio de operación

Cuando el devanado del estator de un motor de inducción trifásico se conecta a una fuente de potencia trifásica, produce un campo magnético que *a*) es de magnitud constante y *b*) gira alrededor de la periferia del rotor a la velocidad síncrona. Los detalles de cómo se produce el campo rotatorio y el par se exponen en el capítulo 3, aquí sólo se presenta un repaso breve.

Si f es la frecuencia de la corriente en el devanado del estator y P es el número de polos, la velocidad síncrona del campo rotatorio es

$$N_s = \frac{120f}{P} \tag{9.1a}$$

en revoluciones por minuto (rpm), o

$$\omega_s = \frac{4\pi f}{P} \tag{9.1b}$$

en radianes por segundo.

El campo rotatorio induce fuerza electromotriz (fem) en el devanado del rotor. Como el devanado del rotor forma un lazo cerrado, la fem inducida en cada una de las bobinas da origen a una corriente inducida en ellas. Cuando la bobina conductora de corriente se introduce en un campo magnético, experimenta una fuerza (o par) que tiende a hacerla girar. El par así desarrollado se llama *par de arranque*. Si el par de la carga es menor que el par de arranque, el rotor comienza a girar. La fuerza desarrollada y, por tanto, la rotación del rotor están en la misma dirección que el campo rotatorio. Esto concuerda con la ley de inducción de Faraday. En condiciones sin carga, el rotor alcanza pronto una velocidad casi igual a la síncrona, pero nunca puede girar a ella porque sus bobinas parecerían estacionarias respecto al campo rotatorio y no habría fem inducida en ellas. En ausencia de una fem inducida en las bobinas del rotor, no habría corriente en los conductores de éste y, en consecuencia, tampoco experimentarían fuerza. En ausencia de una fuerza, el rotor tendería a disminuir su velocidad. En cuanto el rotor comienza a reducir su velocidad el proceso de inducción se presenta de nuevo. En resumen, el rotor recibe su potencia por inducción sólo cuando existe un movimiento relativo entre su velocidad y el campo rotatorio. Puesto que el rotor gira a una velocidad menor que la síncrona del campo rotatorio, un motor de inducción también se denomina *motor asíncrono*.

Sea N_m (o ω_m) la velocidad del rotor con cierta carga. Respecto al motor, el campo rotatorio se mueve hacia delante con una velocidad relativa de

$$N_r = N_s - N_m \tag{9.2a}$$

o

$$\omega_r = \omega_s - \omega_m \tag{9.2b}$$

La velocidad relativa también se llama *velocidad de deslizamiento*. Se trata de la velocidad con la que el rotor se desliza hacia atrás de un punto en un polo giratorio ficticio con objeto de producir un par. No obstante, es práctica común expresar la velocidad de deslizamiento en términos del deslizamiento (s), que es la razón de la velocidad de deslizamiento a la velocidad síncrona. Es decir,

$$s = \frac{N_r}{N_s} = \frac{\omega_r}{\omega_s}$$

o

$$s = \frac{N_s - N_m}{N_s} = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} \tag{9.3}$$

Aunque con la ecuación anterior se obtiene el deslizamiento por unidad, es costumbre expresarlo como porcentaje de la velocidad síncrona (*deslizamiento porcentual*).

En términos de la velocidad síncrona y el deslizamiento por unidad, la velocidad del rotor puede expresarse como

$$N_m = (1 - s)N_s \tag{9.4a}$$

o

$$\omega_m = (1 - s)\omega_s \tag{9.4b}$$

Cuando el rotor se encuentra estacionario, el deslizamiento por unidad es 1 y el rotor aparece exactamente como el devanado secundario en cortocircuito de un transformador. La frecuencia de la fem inducida en el devanado del rotor es la misma que la del campo rotatorio. Sin embargo, cuando el rotor gira, la causante de la fem inducida en sus devanados es la velocidad relativa del rotor N_r (o ω_r). Luego, la frecuencia de la fem inducida en el rotor es

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{PN_r}{120} \\ &= \frac{P(N_s - N_m)}{120} = \frac{PN_s}{120}\left[\frac{N_s - N_m}{N_s}\right] \\ &= sf \end{aligned} \tag{9.5}$$

La ecuación anterior destaca el hecho de que la frecuencia del rotor depende del deslizamiento del motor. En la inmovilidad, el deslizamiento es 1 y la frecuencia del rotor es la

misma que la del campo rotatorio. Empero, la frecuencia del rotor decrece con la disminución del deslizamiento. A medida que éste se acerca a cero, también lo hace la frecuencia del rotor. Un motor de inducción generalmente opera con bajo deslizamiento, por lo que la frecuencia de la fem inducida en el rotor es baja. Por tal razón, la pérdida del núcleo en el circuito magnético del rotor suele despreciarse.

Ejemplo 9.1

Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 208 V y 60 Hz trabaja a plena carga con una velocidad de 1 755 rpm. Calcule *a*) su velocidad síncrona, *b*) el deslizamiento y *c*) la frecuencia del rotor.

- Solución

a) La velocidad síncrona del motor de inducción es

$$N_s = \frac{120 \times 60}{4} = 1\,800 \text{ rpm}$$

b) A plena carga, el deslizamiento es

$$s = \frac{1\,800 - 1\,755}{1\,800} = 0.025 \quad \text{o} \quad 2.5\%$$

c) La frecuencia del rotor a plena carga es

$$f_r = 0.025 \times 60 = 1.5 \text{ Hz}$$

■

Ejercicios

9.1. La velocidad del rotor de un motor de inducción trifásico, octapolar, de 440 V y 50 Hz es de 720 rpm. Determine *a*) la velocidad síncrona, *b*) el deslizamiento y *c*) la frecuencia del rotor.

9.2. Si la frecuencia del rotor de un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 50 Hz es de 3 Hz, calcule *a*) el deslizamiento y *b*) la velocidad del rotor.

9.3. El campo magnético que produce un motor de inducción trifásico gira a una velocidad de 900 rpm. Si la frecuencia del voltaje aplicado es de 60 Hz, determine el número de polos en el motor. Cuando el rotor gira a una velocidad de 800 rpm, ¿cuál es el deslizamiento porcentual del motor?

9.4. Desarrollo de un circuito equivalente

Cuando se excita un motor de inducción trifásico equilibrado por medio de una fuente trifásica equilibrada, las corrientes en los devanados de fase deben ser de magnitud igual y tener una diferencia de fases de 120° eléctricos. Debe cumplirse lo mismo para las corrientes en los devanados del rotor, puesto que se transfiere energía por inducción a través del entrehierro entre el estator y el rotor. Sin embargo, la frecuencia de la fem inducida en el rotor es proporcional a su deslizamiento (véase la ecuación 9.5). Como los devanados del estator y del rotor están acoplados inductivamente, un motor de inducción se asemeja a un transformador trifásico con devanado secundario giratorio. La similitud se acentúa aún más cuando el rotor está en reposo (*condición de rotor fijo*, $s = 1$). Así, un motor de inducción trifásico puede representarse por fase mediante un circuito equivalente con cualquier deslizamiento s, como se ilustra en la figura 9.1, donde

$\tilde{V}_1$ = voltaje aplicado por fase
R_1 = resistencia por fase del devanado del estator
L_1 = inductancia de dispersión por fase del devanado del estator
$X_1 = 2\pi f L_1$ = reactancia de dispersión por fase del devanado del estator
R_r = resistencia por fase del devanado del rotor
L_b = reactancia de dispersión por fase del devanado del rotor
$X_b = 2\pi f L_b$ = reactancia de dispersión por fase del devanado del rotor, en condición de rotor fijo ($s = 1$)
$X_r = 2\pi s f L_b = sX_b$ = reactancia de dispersión por fase del devanado del rotor, con deslizamiento s.
X_m = reactancia de magnetización por fase
R_c = resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo por fase
N_1 = vueltas reales por fase del devanado del estator
N_2 = vueltas reales por fase del devanado del rotor
k_{w1} = factor de devanado para el devanado del estator
k_{w2} = factor de devanado para el devanado del rotor
Φ_m = amplitud del flujo por fase
$\tilde{E}_1 = 4.44 f N_1 k_{w1} \Phi_m$ = fem inducida por fase en el devanado del estator

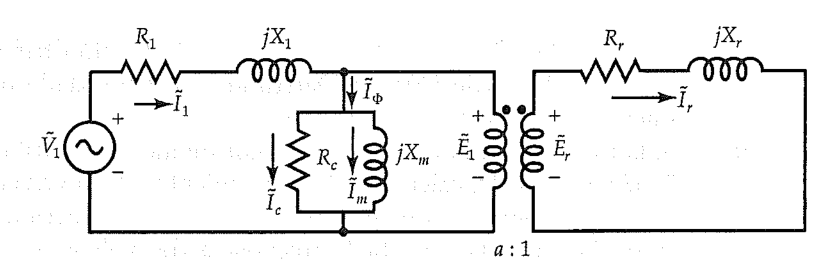


Figura 9.1. Circuito equivalente por fase de un motor de inducción trifásico equilibrado.

$\tilde{E}_b$ = $4.44fN_2k_{w2}\Phi_m$ = fem inducida por fase en el devanado del rotor en condición de rotor fijo ($s = 1$)
$\tilde{E}_r$ = $s\tilde{E}_b$ = fem inducida por fase en el devanado del rotor, con deslizamiento s
$\tilde{I}_r$ = corriente por fase en el devanado del rotor
$\tilde{I}_1$ = corriente por fase alimentada por la fuente
$\tilde{I}_\Phi$ = $\tilde{I}_c + \tilde{I}_m$ = corriente de excitación por fase
$\tilde{I}_c$ = corriente por fase de la pérdida en el núcleo
$\tilde{I}_m$ = corriente de magnetización por fase

Con base en el circuito equivalente por fase (fig. 9.1) es evidente que la corriente en el circuito del rotor es

$$\tilde{I}_r = \frac{\tilde{E}_r}{R_r + jX_r} = \frac{s\tilde{E}_b}{R_r + jsX_b} = \frac{\tilde{E}_b}{(R_r/s) + jX_b} \tag{9.6}$$

A partir de la ecuación anterior, podemos desarrollar otro circuito para un motor de inducción como se indica en la figura 9.2. En este circuito, la resistencia hipotética R_r/s en el circuito del rotor se denomina *resistencia efectiva,* la cual es la misma que la resistencia real del rotor cuando éste se encuentra en reposo (en condición de inmovilidad o fijo). Por otro lado, cuando el deslizamiento se aproxima a cero en condiciones sin carga, la resistencia efectiva es muy elevada ($R_r/s \to \infty$).

Si se define la relación de transformación, relación a, como

$$a = \frac{N_1k_{w1}}{N_2k_{w2}} \tag{9.7}$$

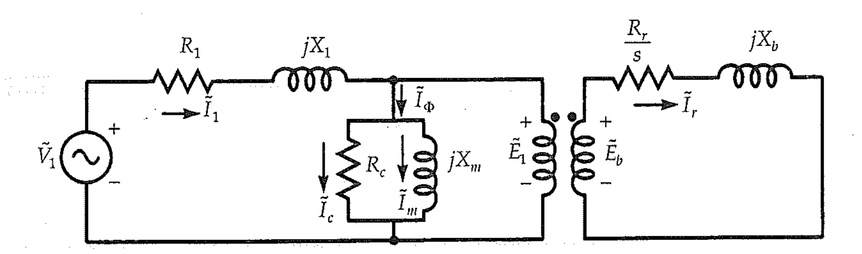


Figura 9.2 Circuito equivalente modificado de un motor trifásico equilibrado por fase.

podemos representar el motor de inducción mediante su circuito equivalente por fase referido al estator. En la figura 9.3 se muestra un circuito equivalente de esta naturaleza, donde

$$R_2 = a^2 R_r \tag{9.8a}$$

$$X_2 = a^2 X_b \tag{9.8b}$$

y

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{I}_r}{a} \tag{9.8c}$$

Para este circuito equivalente

$$\tilde{E}_1 = \frac{\tilde{I}_2 R_2}{s} + j\tilde{I}_2 X_2$$

$$\tilde{I}_\phi = \tilde{I}_c + \tilde{I}_m$$

donde

$$\tilde{I}_c = \frac{\tilde{E}_1}{R_c} \quad \text{e} \quad \tilde{I}_m = \frac{\tilde{E}_1}{jX_m}$$

La corriente por fase del devanado del estator y el voltaje aplicado son

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_\phi + \tilde{I}_2$$

y

$$\tilde{V}_1 = \tilde{E}_1 + \tilde{I}_1(R_1 + jX_1)$$

En la figura 9.3, el circuito equivalente del rotor se expresa en términos de la resistencia hipotética R_2/s. En este circuito, $I_2^2 R_2/s$ representa la potencia por fase ali-

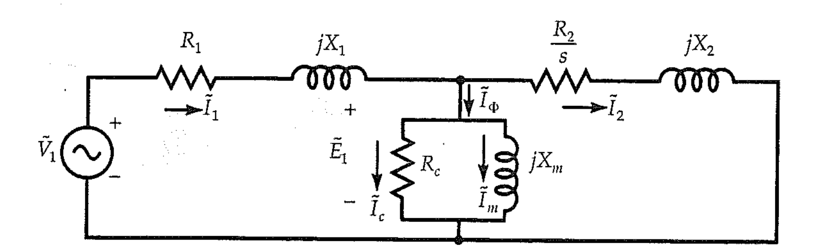


Figura 9.3 Circuito equivalente por fase de un motor de inducción trifásico equilibrado, referido al lado del estator.

mentada al rotor. Sin embargo, la pérdida del cobre por fase en el rotor debe ser $I_2^2 R_2$. Luego, la potencia por fase desarrollada por el motor es

$$I_2^2 \frac{R_2}{s} - I_2^2 R_2 = I_2^2 R_2 \left[\frac{1-s}{s}\right]$$

o

$$\frac{R_2}{s} = R_2 + R_2 \left[\frac{1-s}{s}\right] \tag{9.9}$$

La ecuación anterior establece el hecho de que la resistencia hipotética R_2/s puede dividirse en dos componentes: la resistencia real del rotor R_2 y una resistencia adicional $R_2[(1 - s)/s]$. La resistencia adicional se denomina *resistencia de carga* o *resistencia dinámica*. La resistencia de carga depende de la velocidad del motor y se dice que representa la carga sobre el motor porque la potencia mecánica desarrollada por éste es proporcional a ella. En otras palabras, la resistencia de carga es el equivalente eléctrico de la carga mecánica sobre el motor.

En la figura 9.4 se muestra un circuito equivalente de un motor de inducción en términos de la resistencia de carga. Este circuito es reconocido como el *circuito equivalente exacto de un motor de inducción trifásico equilibrado por fase.*

Relaciones de potencia

Puesto que la resistencia de carga varía con el deslizamiento y éste se ajusta a sí mismo a la carga mecánica sobre el motor, la potencia entregada a la resistencia de carga es equivalente a la potencia desarrollada por el motor. En consecuencia, el rendimiento del motor con cualquier deslizamiento puede determinarse a partir de su circuito equivalente, como se ilustra en la figura 9.4.

Para un motor de inducción trifásico equilibrado

$$P_{in} = 3V_1 I_1 \cos\theta \tag{9.10}$$

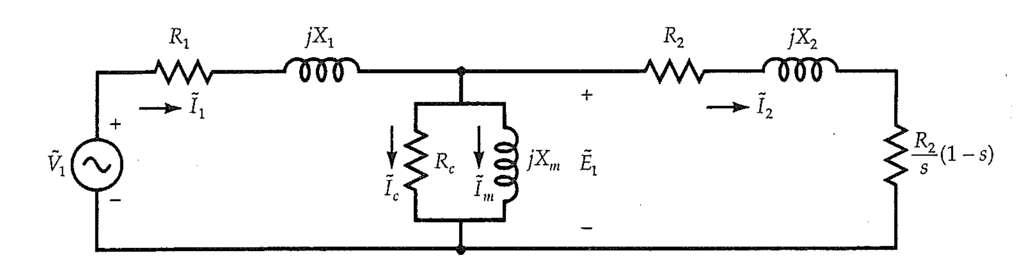


Figura 9.4. Circuito equivalente de la figura 9.3 modificado para mostrar las resistencias del rotor y de la carga.

donde θ es la diferencia de fase entre el voltaje aplicado $\tilde{V}_1$ y la corriente en el devanado del estator $\tilde{I}_1$. Como la potencia de entrada es de naturaleza eléctrica, primero deben tenerse en cuenta las pérdidas eléctricas. La pérdida eléctrica inmediata que debe considerarse es la pérdida en el cobre del estator.

La pérdida total en el cobre del estator es

$$P_{sc\ell} = 3I_1^2R_1 \tag{9.11}$$

Si la pérdida en el núcleo se modela con una resistencia equivalente a la pérdida en el núcleo, como se muestra en la figura, también debe considerarse la pérdida total en el núcleo (pérdida magnética) como sigue:

$$P_m = 3I_c^2R_c \tag{9.12}$$

La potencia neta que cruza el entrehierro y se transporta al rotor por inducción electromagnética se llama *potencia en el entrehierro*. En este caso, la potencia en el entrehierro es

$$P_{ag} = P_{in} - P_{sc\ell} - P_m \tag{9.13a}$$

La potencia en el entrehierro también debe ser igual a la potencia entregada a la resistencia hipotética R_2/s. Es decir,

$$P_{ag} = \frac{3I_2^2R_2}{s} \tag{9.13b}$$

La pérdida de potencia eléctrica en el circuito del rotor es

$$P_{rc\ell} = 3I_2^2R_2 = sP_{ag} \tag{9.14}$$

Por tanto, la potencia desarrollada por el motor es

$$\begin{aligned} P_d &= P_{ag} - P_{rc\ell} \\ &= \frac{3I_2^2(1-s)R_2}{s} = (1-s)P_{ag} = SP_{ag} \end{aligned} \tag{9.15}$$

donde
$$S = 1 - s = \frac{N_m}{N_s} = \frac{\omega_m}{\omega_s}$$

es la velocidad por unidad (normalizada) del motor.

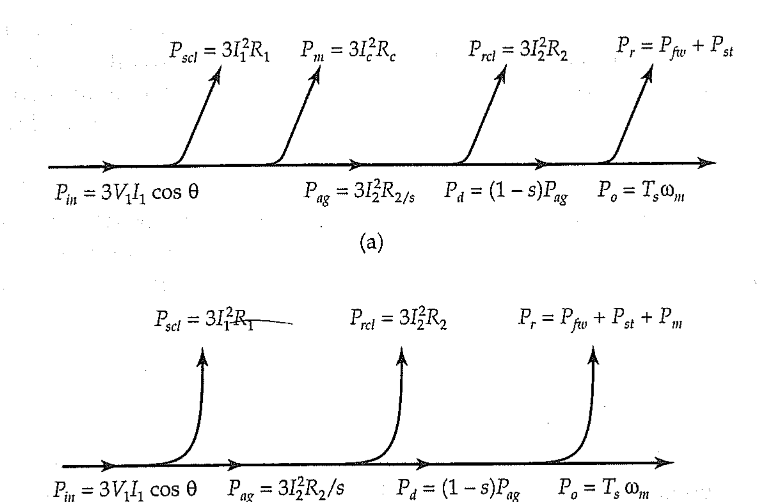


Figura 9.5. Diagrama de flujo de potencia cuando la pérdida en el núcleo es **(a)** simulada por R_c, y **(b)** tomada como parte de la pérdida por rotación.

El par electromagnético desarrollado por el motor es

$$T_d = \frac{P_d}{\omega_m} = \frac{P_{ag}}{\omega_s} = 3I_2^2\,\frac{R_2}{s\omega_s} \tag{9.16}$$

Si se resta la pérdida por rotación de la potencia desarrollada, se obtiene la potencia de salida del motor, como sigue:

$$P_o = P_d - P_r \tag{9.17}$$

Puesto que la pérdida en el núcleo ya se tuvo en cuenta, la pérdida por rotación incluye la fricción y la pérdida por viento P_{fw}, así como la pérdida por cargas parásitas P_{st}. En la figura 9.5*a* se presenta el diagrama de flujo de potencia correspondiente. Cuando la pérdida en el núcleo P_m también se considera parte de la pérdida por rotación, la resistencia R_c que corresponde a la pérdida en el núcleo en la figura 9.4 debe omitirse; luego, la ecuación 9.13*a* se convierte en $P_{ag} = P_{in} - P_{scl}$. En la figura 9.5*b* se ilustra el diagrama de flujo de potencia cuando la pérdida en el núcleo forma parte de la pérdida por rotación.

Característica velocidad-par

La ecuación 9.16 indica que el par desarrollado por un motor de inducción es directamente proporcional al cuadrado de la corriente en el circuito del rotor y a la resistencia equivalente hipotética del rotor. Sin embargo, las dos cantidades, la corriente en el rotor y la resistencia hipotética del rotor, guardan una relación inversa entre sí. Por

ejemplo, si se incrementa la resistencia del rotor, cabe esperar que el par desarrollado por el motor aumente de manera lineal. Pero cualquier aumento en la resistencia del rotor se acompaña por una disminución de la corriente en el rotor para la misma fem inducida en el rotor. Una disminución de la corriente en el rotor ocasiona una disminución del par desarrollado. El hecho de que el par en su conjunto aumente o disminuya depende de cuál es el parámetro que desempeña el papel dominante.

Examinemos la característica completa velocidad-par del motor. En estado de reposo, el deslizamiento del rotor es igual a la unidad y la resistencia efectiva del rotor es R_2. Con base en la figura 9.3, la magnitud de la corriente en el rotor es

$$I_2 = \frac{E_1}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}} \tag{9.18}$$

Observe que la resistencia del devanado del rotor R_2 generalmente es muy pequeña en comparación con su reactancia de dispersión X_2. Es decir, $R_2 << X_2$.

El *par de arranque* desarrollado por el motor es

$$T_{ds} = 3I_2^2 \frac{R_2}{\omega_s} \tag{9.19}$$

Conforme el rotor comienza a girar, un incremento en su velocidad va acompañado de una disminución en su deslizamiento. Mientras s disminuye, R_2/s aumenta. En tanto R_2/s es menor que X_2, la reducción de la corriente en el rotor es mínima. Por tanto, en este rango de velocidad la corriente en el rotor puede aproximarse como sigue:

$$I_2 \approx \frac{E_1}{X_2} \tag{9.20}$$

En virtud de que la corriente en el rotor es casi constante, el par que desarrolla el motor se incrementa con el aumento en la resistencia efectiva R_2/s. Por consiguiente, el par desarrollado por el motor se mantiene en aumento con la disminución del deslizamiento en tanto la resistencia del rotor influya escasamente en la corriente en el rotor.

Cuando el deslizamiento disminuye por debajo de cierto valor, llamado *deslizamiento crítico*, s_b, la resistencia hipotética se vuelve el factor dominante. En este rango, $R_2/s >> X_2$ y la corriente en el rotor puede aproximarse como sigue:

$$I_2 = \frac{sE_1}{R_2} \tag{9.21}$$

El par desarrollado por el motor es ahora proporcional al deslizamiento s. A medida que éste disminuye, también lo hace el par desarrollado. En condiciones sin carga, el deslizamiento es casi igual a cero, la resistencia hipotética del rotor es casi infinita, la corriente en el rotor se aproxima a cero y el par desarrollado es prácticamente igual a cero. Una vez entendido lo anterior, es posible trazar la curva velocidad-par de un motor de inducción. En la figura 9.6 se muestra una curva de ese tipo.

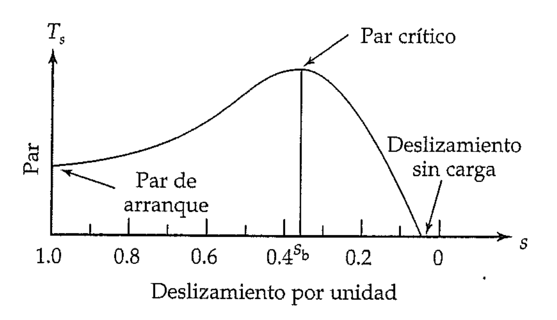


Figura 9.6. Característica típica velocidad-par de un motor de inducción trifásico.

Ejemplo 9.2

Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 230 V, 60 Hz y conectado en Y tiene los parámetros siguientes, por fase: $R_1 = 0.5\ \Omega$, $R_2 = 0.25\ \Omega$, $X_1 = 0.75\ \Omega$, $X_2 = 0.5\ \Omega$, $X_m = 100\ \Omega$ y $R_c = 500\ \Omega$. La pérdida por fricción y viento es de 150 W. Determine la eficiencia del motor a su deslizamiento especificado de 2.5%.

- **Solución**

La velocidad síncrona del motor es

$$N_s = \frac{(120 \times 60)}{6} = 1\ 200 \text{ rpm} \qquad \text{o} \qquad \omega_s = 125.66 \text{ rad/s}$$

El voltaje aplicado por fase es

$$V_1 = \frac{230}{\sqrt{3}} = 132.791 \text{ V}$$

La impedancia efectiva del rotor con relación al estator es

$$\hat{Z}_2 = \frac{R_2}{s} + jX_2 = \frac{0.25}{0.025} + j0.5 = 10 + j0.5\ \Omega$$

La impedancia del devanado del estator es

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 0.5 + j0.75\ \Omega$$

Puesto que R_c, jX_m y $\hat{Z}_2$ están en paralelo, la impedancia equivalente $\hat{Z}_e$ puede calcularse como sigue:

$$\frac{1}{\hat{Z}_e} = \frac{1}{500} + \frac{1}{j100} + \frac{1}{10 + j0.5}$$
$$= 0.102 - j0.015 \text{ S}$$

o

$$\hat{Z}_e = 9.619 + j1.417\ \Omega$$

Luego, la impedancia total de entrada es

$$\hat{Z}_{in} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_e = 10.119 + j2.167\ \Omega$$

La corriente en el estator es: $\tilde{I}_1 = \dfrac{\tilde{V}_1}{\hat{Z}_{in}} = 12.832\underline{/-12.09^\circ}\ \text{A}$

El factor de potencia es: fp = cos (12.09°) = 0.978 en atraso

La potencia de entrada es: $P_{in} = 3V_1I_1 \cos\theta = 4\,998.54$ W

La pérdida en el cobre del estator es: $P_{scl} = 3I_1^2R_1 = 246.99$ W

$$\tilde{E}_1 = \tilde{V}_1 - \tilde{I}_1\hat{Z}_1 = 124.763\underline{/-3.71^\circ}\ \text{V}$$

La corriente por pérdida en el núcleo es: $\tilde{I}_c = \dfrac{\tilde{E}_1}{R_c} = 0.25\underline{/-3.71^\circ}\ \text{A}$

La corriente de magnetización es: $\tilde{I}_m = \dfrac{\tilde{E}_1}{jX_m} = 1.248\underline{/-93.71^\circ}\ \text{A}$

La corriente de excitación es: $\tilde{I}_\phi = \tilde{I}_c + \tilde{I}_m = 1.273\underline{/-82.38^\circ}\ \text{A}$

Por tanto, la corriente en el rotor es: $\tilde{I}_2 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_\phi = 12.461\underline{/-6.59^\circ}\ \text{A}$

La pérdida en el núcleo es: $P_m = 3I_c^2R_c = 93.75$ W

La potencia en el entrehierro es: $P_{ag} = P_{in} - P_{scl} - P_m = 4\,657.8$ W

La pérdida en el cobre del rotor es: $P_{rcl} = 3I_2^2R_2 = 116.46$ W

La potencia desarrollada es: $P_d = P_{ag} - P_{rcl} = 4\,541.34$ W

La potencia de salida es: $P_o = P_d - 150 = 4\,391.34$ W

La eficiencia es: $\eta = \dfrac{P_o}{P_{in}} = 0.879$ u 87.9%

El par en el eje es: $T_s = \dfrac{P_o}{\omega_m} = \dfrac{P_o}{(1-s)\omega_s}$

$$= \frac{4\,391.34}{(1-0.025)\times 125.66} = 35.84 \text{ N} \cdot \text{m}$$

■

Ejercicios

9.4. Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 10 hp, 440 V, 60 Hz y conectado en Y funciona a 1 725 rpm a plena carga. La pérdida en el cobre del estator es de 212 W, y la pérdida por rotación es de 340 W. Determine *a*) la potencia desarrollada, *b*) la potencia en el entrehierro, *c*) la pérdida en el cobre del rotor, *d*) la potencia de entrada total, y *e*) la eficiencia del motor. ¿Cuál es el par en el eje?

9.5. Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 2 hp, 120 V, 60 Hz y conectado en Y opera a 1 650 rpm a plena carga. La impedancia del rotor en reposo es de $0.02 + j0.06$ Ω/fase. Determine la corriente en el rotor si la pérdida por rotación es de 160 W. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en el rotor?

9.6. Un motor de inducción trifásico, de 12 polos, 208 V, 50 Hz y conectado en Y tiene una impedancia en el estator de $0.1 + j0.3$ Ω/fase y una en el rotor de $0.06 + j0.8$ Ω/fase en reposo. La resistencia de la pérdida en el núcleo es de 150 Ω/fase y la reactancia de magnetización es de 750 Ω/fase. La pérdida por fricción y viento es de 2 kW. Si el motor opera a plena carga con deslizamiento de 5%, calcule *a*) la potencia de entrada, *b*) la pérdida en el cobre del estator, *c*) la pérdida en el cobre del rotor, *d*) la potencia en el entrehierro, *e*) la potencia desarrollada, *f*) la potencia de salida, *g*) la eficiencia, *h*) el par en el eje, e *i*) la especificación del motor en caballos de fuerza.

9.5. Un circuito equivalente aproximado

Generalmente, un motor de inducción trifásico bien diseñado cumple con la mayor parte de las directrices siguientes:

1. La resistencia del devanado del estator se mantiene pequeña a fin de reducir la pérdida en el cobre del estator.
2. La reactancia de dispersión en el devanado del estator se minimiza reduciendo la longitud media de las vueltas (espiras) de cada bobina.

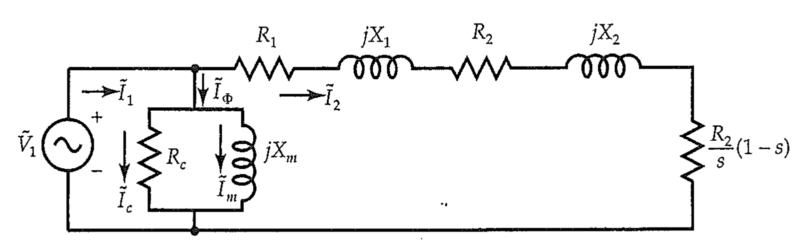


Figura 9.7. Circuito equivalente aproximado por fase de un motor de inducción trifásico equilibrado.

3. Se utilizan laminaciones de acero delgadas con pérdidas bajas para abatir la pérdida en el núcleo. Por tanto, la resistencia equivalente de la pérdida en el núcleo comúnmente es alta.
4. La permeabilidad del acero seleccionado para hacer las laminaciones es alta y la densidad del flujo de operación en el motor se mantiene por abajo del punto de inflexión de la curva de magnetización. Por ende, en general la reactancia de magnetización es alta.

Un motor de inducción que cumpla con las estipulaciones anteriores puede representarse por medio de un circuito equivalente aproximado como el que se muestra en la figura 9.7. En este caso, se ha situado la rama paralela (el circuito de excitación) entre las líneas del suministro de potencia. Se admite que el análisis de un motor de inducción utilizando un circuito equivalente aproximado es un tanto inexacto, pero tal desventaja es despreciable para un motor bien diseñado. Por otro lado, el circuito equivalente aproximado no sólo simplifica el análisis, sino que también ayuda a comprender varias características del motor. Por ejemplo, se usa el circuito equivalente aproximado para determinar la velocidad a la que *a*) el par desarrollado es máximo, *b*) la potencia desarrollada es máxima, y *c*) la eficiencia del motor es máxima. Antes de continuar, examinaremos el error que se introduce cuando se analiza un motor de inducción utilizando un circuito equivalente aproximado.

Ejemplo 9.3

Con los datos del ejemplo 9.2 y el circuito equivalente aproximado, determine la eficiencia del motor a su deslizamiento especificado.

- Solución

Corriente por pérdida en el núcleo: $\tilde{I}_c = \dfrac{132.791}{500} = 0.266$ A

Corriente de magnetización: $\tilde{I}_m = \dfrac{132.791}{j100} = -j1.328$ A

La impedancia equivalente del circuito serie es

$$\hat{Z}_e = R_1 + \frac{R_2}{s} + j(X_1 + X_2) = 10.5 + j1.25\ \Omega$$

Luego, la corriente en el rotor es

$$\tilde{I}_2 = \frac{132.791}{10.5 + j1.25} = 12.558\underline{/-6.79°}\ \text{A}$$

La corriente por fase suministrada por la fuente es

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 + \tilde{I}_c + \tilde{I}_m = 13.043\underline{/-12.45°}\ \text{A}$$

La potencia de entrada es: $P_{in} = 3\text{Re}[132.791 \times 13.043\underline{/12.45°}]$

$= 5\,073.79$ W

La pérdida en el cobre del estator es: $P_{scl} = 3I_2^2R_1 = 236.56$ W

La pérdida en el cobre del rotor es: $P_{rcl} = 3I_2^2R_2 = 118.28$ W

La pérdida en el núcleo es: $P_m = 3I_c^2R_c = 106.13$ W

La potencia de salida es: $P_o = P_{in} - P_{scl} - P_{rcl} - P_m - 150$

$= 4\,462.82$ W

Finalmente, la eficiencia es: $\eta = \dfrac{4\,462.82}{5\,073.79} = 0.8796$ u 87.96%

■

Ejercicios

9.7. Resuelva otra vez el ejercicio 9.6 aplicando el circuito equivalente aproximado.

9.8. Los parámetros del circuito equivalente de un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 208 V y 60 Hz conectado en Y en ohms/fase son: $R_1 = 0.21$, $R_2 = 0.33$, $X_1 = 0.6$, $X_2 = 0.6$, $R_c = 210$ y $X_m = 450$. Considerando que el motor funciona con un deslizamiento de 5% a plena carga, aplique el circuito equivalente aproximado y determine el par que desarrolla.

9.6. Criterio de la potencia máxima

Del circuito equivalente que se observa en la figura 9.7, la corriente en el rotor es

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_1}{R_e + jX_e + R_2(1-s)/s} \tag{9.22}$$

donde $$R_e = R_1 + R_2$$

y $$X_e = X_1 + X_2$$

Con base en la ecuación 9.15, la potencia desarrollada por el motor de inducción trifásico es

$$P_d = \frac{3V_1^2 R_2(1-s)/s}{R_e^2 + X_e^2 + [R_2(1-s)/s]^2 + 2R_eR_2(1-s)/s} \tag{9.23}$$

De la ecuación anterior resulta evidente que la potencia desarrollada por un motor de inducción trifásico es función del deslizamiento. Por consiguiente, es posible determinar el deslizamiento s_p con el que la potencia desarrollada por el motor es máxima, derivando la ecuación anterior e igualando la derivada a cero. Después de derivar y cancelar la mayoría de los términos se obtiene

$$R_e^2 + X_e^2 = \left[\frac{R_2}{s_p}(1-s_p)\right]^2$$

o (9.24)

$$Z_e = \frac{R_2}{s_p}(1-s_p)$$

donde Z_e es la magnitud de la impedancia equivalente de los devanados del estator y del rotor en reposo. Es decir,

$$Z_e = |R_e + jX_e| \tag{9.25}$$

En la ecuación 9.24 se establece que la potencia desarrollada por un motor de inducción trifásico es máxima cuando la resistencia equivalente de la carga (dinámica) es igual a la magnitud de la impedancia del motor en reposo. Esto, naturalmente, es el resultado bien conocido que se obtuvo a partir del *teorema de la máxima transferencia de potencia* durante el estudio de la teoría de los circuitos eléctricos.

De la ecuación 9.24 se obtiene el deslizamiento con el que el motor de inducción desarrolla su potencia máxima

$$s_p = \frac{R_2}{R_2 + Z_e} \tag{9.26}$$

Al sustituir el deslizamiento en la ecuación 9.23 se obtiene la expresión para la potencia máxima desarrollada por un motor de inducción trifásico, como sigue:

$$P_{dm} = \frac{3}{2}\left[\frac{V_1^2}{R_e + Z_e}\right] \tag{9.27}$$

Sin embargo, la potencia de salida neta es menor que la potencia desarrollada en una cantidad igual a la pérdida por rotación del motor.

Ejemplo 9.4

Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 120 V, 60 Hz y conectado en Δ tiene una impedancia en el estator de $0.1 + j0.15$ Ω/fase y una impedancia equivalente en el rotor de $0.2 + j0.25$ Ω/fase en reposo. Encuentre la potencia máxima que desarrolla el motor y el deslizamiento con el que esto ocurre. ¿Cuál es el valor correspondiente del par desarrollado por el motor?

- Solución

$$\begin{aligned}\hat{Z}_e &= R_e + jX_e = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2) \\ &= 0.1 + 0.2 + j(0.15 + 0.25) = 0.5\underline{/53.13^\circ}\ \Omega\end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación 9.26, el deslizamiento con el que el motor desarrolla la potencia máxima es

$$s_p = \frac{0.2}{0.2 + 0.5} = 0.286 \quad \text{o} \quad 28.6\%$$

La potencia máxima que desarrolla el motor es

$$P_{dm} = \frac{3 \times 120^2}{2(0.3 + 0.5)} = 27\ 000\ \text{W} \quad \text{o} \quad 27\ \text{kW}$$

La velocidad síncrona del motor es

$$N_s = \frac{120 \times 60}{6} = 1\,200 \text{ rpm} \qquad \text{o} \qquad 125.66 \text{ rad/s}$$

La velocidad del motor es: $\omega_m = (1 - s_p)\omega_s = (1 - 0.286)125.664 = 89.72$ rad/s
Luego, el par que desarrolla el motor es

$$T_d = \frac{P_{dm}}{\omega_m} = \frac{27\,000}{89.72} = 300.94 \text{ N} \cdot \text{m}$$

■

Ejercicios

9.9. Un motor de inducción trifásico, octapolar, de 440 V y 50 Hz conectado en Δ tiene una impedancia en el estator de $0.05 + j0.25$ Ω/fase y una impedancia equivalente en el rotor de $0.15 + j0.35$ Ω/fase en reposo. Determine *a*) el deslizamiento con el que el motor desarrolla su potencia máxima, *b*) la potencia máxima que desarrolla el motor, y *c*) el valor correspondiente del par desarrollado.

9.10. Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 208 V y 60 Hz conectado en Y tiene las constantes siguientes, en ohms/fase: $R_1 = 0.08$, $X_1 = 0.5$, $R_2 = 0.1$, $X_2 = 0.6$. Determine el deslizamiento con el que el motor desarrolla la potencia máxima. ¿Cuál es la potencia máxima que desarrolla el motor? ¿Cuál es el par correspondiente desarrollado por el motor?

9.7. Criterio del par máximo

De acuerdo con la ecuación 9.23, el par desarrollado por un motor de inducción trifásico es

$$T_d = \frac{\dfrac{3V_1^2R_2}{s}}{\left[R_e^2 + X_e^2 + \left[\dfrac{R_2(1-s)}{s}\right]^2 + \dfrac{2R_eR_2(1-s)}{s}\right]\omega_s} \tag{9.28}$$

donde $R_e = R_1 + R_2$ y $X_e = X_1 + X_2$.

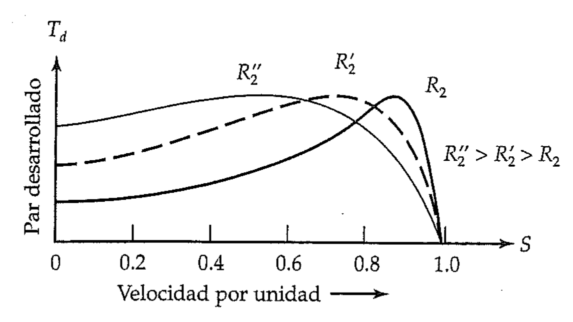


Figura 9.8. Efecto de la resistencia del rotor en el deslizamiento crítico.

Al derivar la ecuación anterior con respecto a s e igualar el resultado a cero, se obtiene una expresión para el deslizamiento crítico s_b, con el cual el motor desarrolla el par máximo (crítico), como sigue:

$$s_b = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2}} \tag{9.29}$$

Observe que el deslizamiento crítico es directamente proporcional a la resistencia del rotor. Como ésta puede ajustarse con facilidad en un motor de inducción con rotor devanado por medio de una resistencia externa, es posible obtener el par máximo a cualquier velocidad, inclusive la velocidad cero (de arranque). Al sustituir la expresión anterior para el deslizamiento crítico en la ecuación 9.28 se obtiene una expresión para el par máximo desarrollado por el motor, como sigue:

$$T_{dm} = \frac{3V_1^2}{2\omega_s}\left[\frac{1}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2}}\right] \tag{9.30}$$

Debe advertirse que el par máximo desarrollado por el motor es independiente de la resistencia del rotor. En otras palabras, el motor desarrolla el mismo par máximo sin importar la resistencia de su rotor. La resistencia del rotor afecta solamente el deslizamiento crítico (o velocidad crítica) que corresponde al par máximo, como se ilustra en la figura 9.8.

Ejemplo 9.5

Con los datos del ejemplo 9.4, determine *a*) el deslizamiento crítico, *b*) el par crítico, y *c*) la potencia correspondiente desarrollada por el motor.

- Solución

Los parámetros del motor que se dan en el ejemplo 9.4 son los siguientes:

$$R_1 = 0.1\ \Omega,\ X_1 = 0.15\ \Omega,\ R_2 = 0.2\ \Omega,\ X_2 = 0.25\ \Omega,\ V_1 = 120\ \text{V}$$

De acuerdo con la ecuación 9.29, el deslizamiento crítico es

$$s_b = \frac{0.2}{\sqrt{0.1^2 + (0.15 + 0.25)^2}} = 0.485$$

De la ecuación 9.30, el par máximo (crítico) desarrollado por el motor es

$$T_{dm} = \frac{3 \times 120^2}{2 \times 125.664}\left[\frac{1}{0.1 + \sqrt{0.1^2 + (0.15 + 0.25)^2}}\right]$$
$$= 335.52 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La potencia desarrollada por el motor con el deslizamiento crítico es

$$P_d = T_{dm}(1 - s_b)\omega_s$$
$$= 335.52(1 - 0.485)125.66 = 21.17 \text{ kW}$$

■

Cuando se comparan las expresiones para el deslizamiento crítico (ecuación 9.29) con el deslizamiento necesario para que el motor desarrolle su potencia máxima (ecuación 9.26), se encuentra que el denominador de la ecuación 9.26 es mayor que el de la 9.29. En otras palabras, el motor desarrolla potencia máxima con un deslizamiento menor que aquel con el que desarrolla el par máximo ($s_p < s_b$).

Aproximaciones adicionales

Cuando la impedancia del estator es tan pequeña que puede despreciarse en comparación con la impedancia del rotor en reposo, se obtiene, a partir de la ecuación 9.29, una expresión muy útil para el deslizamiento crítico, como sigue:

$$s_b = \frac{R_2}{X_2} \tag{9.31}$$

Esta ecuación establece que el deslizamiento crítico es la razón de la resistencia del rotor a su propia reactancia. Cuando la resistencia del rotor se iguala a su reactancia, el deslizamiento crítico es igual a uno. En este caso, el motor desarrolla el par máximo al arrancar.

La expresión aproximada para el par crítico (ecuación 9.30) se convierte en

$$T_{dm} = \frac{3V_1^2}{2\omega_s}\left[\frac{1}{X_2}\right] = \frac{3V_1^2}{2\omega_s}\left[\frac{s_b}{R_2}\right] \tag{9.32}$$

Con objeto de usar la ecuación 9.32, el motor de inducción debe operar con un deslizamiento muy bajo. En efecto, la mayor parte de los motores de inducción trifásicos operan con un deslizamiento inferior a 5% y la relación aproximada puede usarse para estimar el par máximo que desarrolla el motor.

La corriente en el rotor a cualquier velocidad y despreciando la impedancia del estator es

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_1}{R_2/s + jX_2} \tag{9.33}$$

El par desarrollado por el motor con cualquier deslizamiento es

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{3I_2^2 R_2}{s\omega_s} \\ &= \left[\frac{3V_1^2}{(R_2/s)^2 + X_2^2}\right]\frac{R_2}{s\omega_s} \end{aligned} \tag{9.34}$$

La razón del par desarrollado con cualquier deslizamiento s al par crítico es

$$\frac{T_d}{T_{dm}} = \frac{2ss_b}{s^2 + s_b^2} \tag{9.35}$$

Ésta es una relación muy útil, aunque aproximada, que puede usarse para calcular el par desarrollado con cualquier deslizamiento s una vez determinado el par crítico T_{dm} y el deslizamiento crítico s_b.

Ejemplo 9.6

Un motor de inducción trifásico, octapolar, de rotor devanado, 208 V y 60 Hz conectado en Y tiene una impedancia despreciable en el estator y una impedancia en el rotor de $0.02 + j0.08\ \Omega$/fase en reposo. Determine el deslizamiento y el par críticos. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor? Si el par de arranque del motor tiene que ser 80% del par máximo, determine la resistencia externa que debe agregarse en serie con el rotor.

- **Solución**

$$s_b = \frac{0.02}{0.08} = 0.25$$

$$N_s = \frac{120 \times 60}{8} = 900 \text{ rpm} \qquad \text{o} \qquad \omega_s = 94.248 \text{ rad/s}$$

La velocidad del motor es: $N_m = (1 - s_b)N_s = (1 - 0.25)900 = 675$ rpm

$$V_1 = 120 \text{ V}$$

Con base en la ecuación 9.32,

$$T_{dm} = \frac{3 \times 120^2}{2 \times 94.248}\left[\frac{0.25}{0.02}\right] = 2864.782 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A partir de la ecuación 9.35, el par de arranque ($s = 1$) en términos del par máximo es

$$T_s = \frac{2 \times 1 \times 0.25}{1 + 0.25^2} T_{dm} = 0.47\ T_{dm}$$

Puesto que el par de arranque solo es 47% del par máximo, es preciso agregar una resistencia en el circuito del rotor. Al aumentar la resistencia del rotor, el deslizamiento crítico también aumenta. Si s_{bn} es el nuevo deslizamiento crítico, entonces

$$\frac{T_s}{T_{dm}} = \frac{2ss_{bn}}{s^2 + s_{bn}^2}$$

Como en el arranque $s = 1$ y $T_s/T_{dm} = 0.8$, la ecuación anterior se convierte en

$$s_{bn}^2 - 2.5s_{bn} + 1 = 0$$

Las dos raíces de la ecuación cuadrática anterior son 2 y 0.5. Luego, el nuevo deslizamiento crítico debe ser 0.5. Según la ecuación 9.31, es

$$R_{2n} = s_{bn}X_2 = 0.5 \times 0.08 = 0.04\ \Omega$$

el valor correspondiente de la resistencia del rotor es 0.02 Ω.

■

Ejercicios

9.11. Calcule el deslizamiento y el par críticos del motor del ejercicio 9.9. ¿Cuál es la potencia correspondiente desarrollada por el motor?

9.12. Con los datos del ejercicio 9.10, calcule *a*) la velocidad crítica, *b*) el par crítico, y *c*) la potencia desarrollada por el motor con su deslizamiento crítico.

9.13. La impedancia del rotor, en reposo, de un motor de inducción trifásico, octapolar, de rotor devanado, conectado en Y de 208 V y 60 Hz es de $0.1 + j0.5\ \Omega$/fase.

Determine el deslizamiento crítico, el par crítico y la potencia desarrollada por el motor. ¿Cuál es el par de arranque de este motor? Calcule la resistencia que debe insertarse en serie con el circuito del rotor de modo que el par de arranque sea la mitad del par máximo.

9.8. Criterio de la eficiencia máxima

Cuando la pérdida en el núcleo se considera parte de la pérdida por rotación, mediante el circuito equivalente aproximado se encuentra que la potencia de entrada al motor es

$$P_{in} = 3V_1 I_2 \cos\theta \tag{9.36}$$

donde θ es el ángulo del factor de potencia entre el voltaje aplicado $\tilde{V}_1$ y la corriente del rotor $\tilde{I}_2$.

La potencia de salida es

$$P_o = 3V_1 I_2 \cos\theta - 3I_2^2(R_1 + R_2) - P_r \tag{9.37}$$

La eficiencia del motor es

$$\eta = \frac{3V_1 I_2 \cos\theta - 3I_2^2(R_1 + R_2) - P_r}{3V_1 I_2 \cos\theta} \tag{9.38}$$

Al derivar η respecto a I_2 e igualar a cero el resultado se obtiene

$$3I_2^2(R_1 + R_2) = P_r \tag{9.39}$$

lo que representa el criterio para la eficiencia máxima de un motor de inducción. La expresión anterior simplemente establece que la eficiencia de un motor de inducción es máxima cuando la suma de las pérdidas en el cobre del estator y del rotor es igual a la pérdida por rotación.

9.9. Algunas conclusiones relevantes

Antes de proseguir, hagamos una pausa para efectuar las observaciones siguientes a la luz del par desarrollado, la corriente del rotor y la eficiencia del motor.

El par desarrollado

Cuando el motor está trabajando con su deslizamiento especificado o cerca de él, que generalmente es inferior a 10%, la resistencia hipotética del rotor es considerable-

mente mayor que su reactancia de dispersión. Es decir, $R_2/s >> X_2$. Por tanto, la ecuación 9.34 puede aproximarse como sigue:

$$T_d \approx \frac{3V_1^2 s}{\omega_s R_2} \tag{9.40}$$

1. Cuando el voltaje aplicado y la resistencia del rotor se mantienen constantes, el par desarrollado por el motor es proporcional al deslizamiento. En este rango lineal, la razón de pares desarrollados es igual a la razón de los deslizamientos.
2. El par desarrollado es inversamente proporcional a la resistencia del rotor con un deslizamiento dado en tanto el voltaje aplicado se mantenga constante. En otras palabras, el par desarrollado con cualquier deslizamiento puede ajustarse variando la resistencia del rotor, lo cual puede llevarse a cabo fácilmente en un motor de rotor devanado.
3. En un valor definido de deslizamiento y resistencia del rotor, el par desarrollado por el motor es directamente proporcional al cuadrado del voltaje aplicado.
4. Para una operación con par constante y voltaje aplicado fijo, el deslizamiento del motor es directamente proporcional a la resistencia del rotor.

La corriente del rotor

Según la ecuación 9.33, es evidente que la corriente en el rotor es directamente proporcional al voltaje aplicado, siempre que la resistencia del rotor y el deslizamiento se mantengan sin cambio.

Cuando $R_2/s >> X_2$, la corriente del rotor puede aproximarse como sigue:

$$I_2 = \frac{V_1 s}{R_2} \tag{9.41}$$

a) La corriente del rotor varía linealmente con el deslizamiento cuando el motor trabaja con bajo deslizamiento.

b) La corriente del rotor varía inversamente con la resistencia del rotor.

Eficiencia del motor

Para un motor ideal puede suponerse que *a*) la pérdida en el cobre del estator es despreciable y *b*) la pérdida por rotación es igual a cero. En este caso, la potencia en el entrehierro es igual a la potencia de entrada. Es decir, $P_{in} = P_{ag}$. Sin embargo, la potencia desarrollada es $P_d = (1 - s)P_{ag} = SP_{ag}$, donde S es la velocidad por unidad. Como la pérdida por rotación es igual a cero, la potencia de salida es igual a la potencia desarrollada. Por tanto, la eficiencia del motor en condiciones ideales es

$$\eta = 1 - s = S \tag{9.42}$$

La ecuación anterior establece un límite máximo a la eficiencia de un motor de inducción trifásico. Esta ecuación destaca el hecho de que si un motor opera a 60% de su velocidad síncrona, la eficiencia máxima en condiciones ideales (teóricamente posibles) es de 60%. Por consiguiente, a mayor velocidad de operación, mayor será la eficiencia. Por ejemplo, un motor que opere con un deslizamiento de 5%, puede tener en teoría, una eficiencia de 95%.

Ejemplo 9.7

Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 230 V y 60 Hz conectado en Δ trabaja a plena carga a una velocidad de 1 710 rpm. La potencia desarrollada a esta velocidad es de 2 hp y la corriente en el rotor es de 4.5 A. Si el voltaje de suministro fluctúa ± 10%, determine *a*) el rango del par y *b*) el rango de la corriente.

- **Solución**

$$N_s = \frac{120 \times 60}{4} = 1800 \text{ rpm}$$

$$s = \frac{1800 - 1710}{1800} = 0.05$$

$$\omega_m = \frac{2 \times \pi \times 1710}{60} = 179.09 \text{ rad/s}$$

El par desarrollado al voltaje nominal (o especificado) de 230 V es

$$T_d = \frac{2 \times 746}{179.07} = 8.33 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cuando el voltaje de suministro está 10% abajo, el par desarrollado por el motor es

$$T_{dL} = 8.33 \left[\frac{0.9 \times 230}{230}\right]^2 = 6.75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La corriente correspondiente del rotor es

$$I_{2L} = 4.5 \left[\frac{0.9 \times 230}{230}\right] = 4.05 \text{ A}$$

En forma semejante, cuando el voltaje de suministro está 10% arriba, el par desarrollado por el motor es

$$T_{dH} = 8.33[1.1]^2 = 10.08 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y la corriente del rotor es

$$I_{2H} = 4.5 \times 1.1 = 4.95 \text{ A}$$

Por tanto, el par varía de 6.75 N · m a 10.08 N · m, y la corriente del rotor fluctúa entre 4.05 y 4.95 A.

■

Ejercicios

9.14. Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 440 V y 50 Hz conectado en Y funciona con un deslizamiento de 5% a plena carga y desarrolla una potencia de 10 hp. El deslizamiento disminuye a 2% cuando el motor trabaja con carga ligera. Determine el par desarrollado y la potencia de salida del motor cuando opera con *a*) plena carga y *b*) carga ligera.

9.15. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 660 V y 60 Hz conectado en Y funciona a 1 125 rpm a plena carga y desarrolla una potencia de 10 hp. El voltaje de suministro no regulado fluctúa de 600 a 720 V. ¿Cuál es el rango del par del motor si la velocidad se mantiene constante? ¿Cuál es el rango de velocidad para que el motor desarrolle el mismo par?

9.10. Parámetros del circuito equivalente

Los parámetros del circuito equivalente y el rendimiento de un motor de inducción trifásico pueden determinarse realizando cuatro pruebas: *a*) prueba de resistencia del estator, *b*) prueba de rotor fijo, *c*) prueba sin carga y *d*) prueba con carga.

Prueba de resistencia del estator

Esta prueba se efectúa para determinar la resistencia de cada devanado de fase del estator. Sea R el valor con cc de la resistencia entre dos terminales cualesquiera del motor; luego, la resistencia por fase es

$$R_1 = 0.5 \text{ R, para la conexión en Y}$$

$$R_1 = 1.5 \text{ R, para la conexión en } \Delta$$

El valor medido de la resistencia puede multiplicarse por un factor que varía de 1.05 a 1.25, a fin de convertirlo de su valor en términos de cc a su valor en ca. Esto se hace para tener en cuenta el *efecto superficial*. El factor multiplicador puede ser dis-

cutible con potencias cuya frecuencia sea de 50 o 60 Hz, pero se vuelve significativo para motores que operan a una frecuencia de 400 Hz.

Prueba de rotor fijo

Esta prueba, también llamada *prueba de rotor bloqueado*, es muy parecida a la prueba en cortocircuito de un transformador. En este caso, el rotor se mantiene estacionario aplicando al eje un par externo. El devanado de campo del estator se conecta a un suministro trifásico variable. El voltaje se incrementa cuidadosamente desde cero hasta un nivel en el que el motor tome la corriente nominal (o especificada). En este momento, se registran las lecturas de la corriente de línea, el voltaje aplicado de línea y la potencia de entrada usando el método de dos vatímetros como se ilustra en la figura 9.9.

Puesto que la impedancia del circuito del rotor es relativamente pequeña en condiciones de rotor fijo ($s = 1$), el voltaje aplicado es considerablemente menor que el voltaje especificado del motor. Luego, la corriente de excitación es muy pequeña y puede despreciarse. De acuerdo con este supuesto, en la figura 9.10 se muestra el circuito equivalente aproximado del motor por fase. La impedancia total en serie es

$$\hat{Z}_e = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2) = R_e + jX_e \quad (9.43)$$

Sean V_{br}, I_{br} y P_{br} el voltaje aplicado, la corriente especificada y la potencia de entrada por fase en condiciones de rotor fijo; luego,

$$R_e = \frac{P_{br}}{I_{br}^2} \quad (9.44)$$

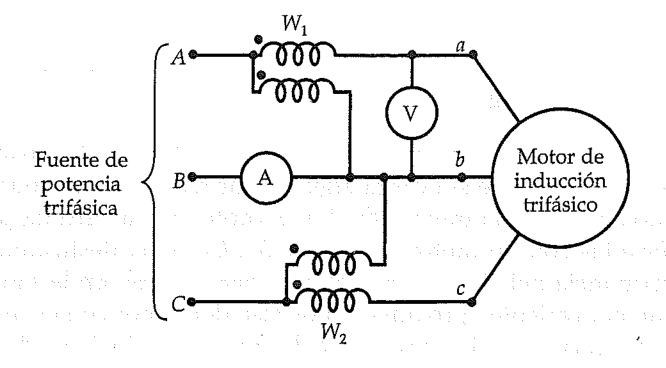


Figura 9.9. Conexiones típicas para realizar pruebas a un motor de inducción trifásico.

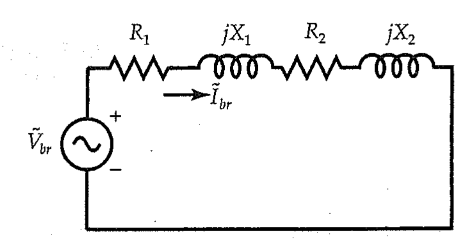


Figura 9.10. Circuito equivalente aproximado por fase de un motor de inducción en la situación de rotor fijo.

En virtud de que R_1 ya se conoce a partir de la prueba de resistencia del estator, la resistencia equivalente del rotor es

$$R_2 = R_e - R_1 \tag{9.45}$$

Sin embargo,

$$Z_e = \frac{V_{br}}{I_{br}} \tag{9.46}$$

Por tanto,

$$X_e = \sqrt{Z_e^2 - R_e^2} \tag{9.47}$$

Resulta difícil aislar las reactancias de dispersión, X_1 y X_2. Para todo fin práctico, estas reactancias se suponen iguales. Es decir,

$$X_1 = X_2 = 0.5X_e \tag{9.48}$$

Prueba sin carga

En este caso, el voltaje nominal se aplica sobre los devanados del estator y el motor trabaja libremente sin carga alguna. Por tanto, esta prueba es semejante a la de circuito abierto en el transformador, excepto que la pérdida por fricción y viento están asociadas con un motor de inducción. Como el deslizamiento es cercano a cero, la impedancia del circuito del rotor es casi infinita. En la figura 9.11 se muestra el circuito equivalente aproximado por fase del motor con el circuito del rotor abierto.

Sean W_{oc}, I_{oc} y V_{oc} la potencia de entrada, la corriente de entrada y el voltaje nominal aplicado por fase en condiciones sin carga. Con objeto de representar la pérdida

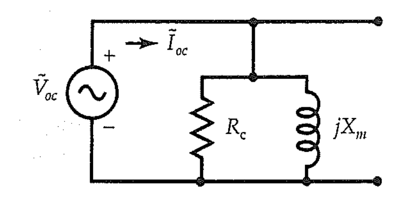


Figura 9.11. Circuito equivalente aproximado por fase de un motor de inducción en la situación sin carga.

en el núcleo por medio de una resistencia equivalente, R_c, debe restarse la pérdida por fricción y viento de la potencia de entrada.

La pérdida por fricción y viento puede medirse acoplando el motor sujeto a prueba con otro motor con salida conocida y haciéndolo funcionar a la velocidad sin carga del motor de inducción. Sea $P_{fw\phi}$ la pérdida por fricción y viento por fase. Luego, la pérdida de potencia en R_c es

$$P_{oc} = W_{oc} - P_{fw\phi} \tag{9.49}$$

Por tanto, la resistencia de la pérdida en el núcleo es

$$R_c = \frac{V_{oc}^2}{P_{oc}} \tag{9.50}$$

El factor de potencia sin carga es

$$\cos\,\theta_{oc} = \frac{W_{oc}}{V_{oc} I_{oc}} \tag{9.51}$$

La reactancia de magnetización es

$$X_m = \frac{V_{oc}}{I_{oc}\ \text{sen}\ \theta_{oc}} \tag{9.52a}$$

La reactancia de magnetización también puede calcularse como sigue:

$$S_{oc} = V_{oc} I_{oc}$$

$$Q_{oc} = \sqrt{S_{oc}^2 - W_{oc}^2}$$

y
$$X_m = \frac{V_{oc}^2}{Q_{oc}} \tag{9.52b}$$

Cuando se usa el método de dos vatímetros para medir la potencia sin carga, la lectura en uno de ellos podría ser negativa porque el factor de potencia del motor sin carga puede ser menor que 0.5. Si éste fuera el caso, la potencia total de entrada es la diferencia de las dos lecturas en los vatímetros.

Prueba con carga

Para determinar experimentalmente las características velocidad-par y la eficiencia de un motor de inducción, acople el motor a un dinamómetro y conecte los devanados trifásicos del estator a una fuente de poder equilibrada trifásica. Si es necesario, puede invertirse el sentido de giro con el intercambio de dos terminales del suministro. Comenzando desde la condición sin carga, ésta se incrementa lentamente y se registran las lecturas correspondientes a la velocidad del motor, el par en el eje, la potencia de entrada, el voltaje aplicado y la corriente de línea. A partir de estos datos puede calcularse el rendimiento del motor como función de su velocidad (o deslizamiento). Utilizando convertidores analógico-digital es posible almacenar los datos en un disco magnético para manipulaciones posteriores.

Ejemplo 9.8

Los datos de prueba de un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 208 V y 60 Hz conectado en Y con especificación de 1 710 rpm son los siguientes:

Resistencia del estator (cc) entre dos terminales cualesquiera = 2.4 Ω

	Prueba sin carga		*Prueba de rotor fijo*	
Potencia de entrada	450	W	59.4	W
Corriente de línea	1.562	A	2.77	A
Voltaje de línea	208	V	27	V

Pérdida por fricción y viento = 18 W

Calcule los parámetros del circuito equivalente del motor.

• Solución

Para un motor conectado en Y, la resistencia por fase del devanado del estator es

$$R_1 = \frac{2.4}{2} = 1.2\ \Omega$$

Prueba sin carga: $W_{oc} = \dfrac{450}{3} = 150 \text{ W}$

$$P_{fw\phi} = \frac{18}{3} = 6 \text{ W}$$

$$P_{oc} = 150 - 6 = 144 \text{ W}$$

$$V_{oc} = \frac{208}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$$

$$I_{oc} = 1.562 \text{ A}$$

La resistencia de la pérdida en el núcleo es

$$R_c = \frac{120^2}{144} = 100 \ \Omega$$

La potencia de entrada aparente (por fase) es

$$S_{oc} = V_{oc}I_{oc} = 120 \times 1.562 = 187.44 \text{ VA}$$

Luego, el factor de potencia es

$$\cos \theta_{oc} = \frac{W_{oc}}{S_{oc}} = \frac{150}{187.44} = 0.8$$

$$\text{sen } \theta_{oc} = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$$

La corriente de magnetización es: $I_m = I_{oc} \text{ sen } \theta_{oc} = 1.562 \times 0.6 = 0.937 \text{ A}$

$$X_m = \frac{V_{oc}}{I_m} = \frac{120}{0.937} \approx 128 \ \Omega$$

Prueba con rotor fijo: $V_{br} = \dfrac{27}{\sqrt{3}} = 15.588 \text{ V}$

$$P_{br} = \frac{59.4}{3} = 19.8 \text{ W}$$

$$I_{br} = 2.77 \text{ A}$$

$$R_e = \frac{19.8}{2.77^2} = 2.58 \ \Omega$$

$$R_2 = R_e - R_1 = 2.58 - 1.2 = 1.38 \ \Omega$$

$$Z_e = \frac{15.588}{2.77} = 5.627\ \Omega$$

$$X_e = \sqrt{5.627^2 - 2.58^2} = 5\ \Omega$$

Por tanto,

$$X_1 = X_2 = 2.5\ \Omega$$

■

Ejercicios

9.16. Utilizando los parámetros del circuito equivalente del ejemplo 9.8, determine el par en el eje y la eficiencia del motor a su velocidad especificada.

9.17. Se obtuvieron los datos siguientes para un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 230 V y 60 Hz conectado en Y:
Prueba sin carga: potencia de entrada = 130 W, corriente de línea = 0.45 A al voltaje especificado.
Prueba de rotor fijo: potencia de entrada = 65 W, corriente de línea = 1.2 A a voltaje reducido de 47 V.
La pérdida por fricción y viento es de 15 W y la resistencia del devanado del estator entre dos líneas cualesquiera es de 4.1 Ω. Calcule los parámetros del circuito equivalente del motor.

9.11. Arranque de motores de inducción

En el momento del arranque, la velocidad del rotor es igual a cero y el deslizamiento por unidad es igual a uno. Por tanto, a partir del circuito equivalente aproximado que se ilustra en la figura 9.7, la corriente de arranque es

$$\tilde{I}_{2s} = \frac{V_1}{R_e + jX_e} \qquad (9.53)$$

donde $R_e = R_1 + R_2$ y $X_e = X_1 + X_2$. El valor correspondiente del par de arranque es

$$T_{ds} = \frac{3V_1^2 R_2}{\omega_s\left[R_e^2 + X_e^2\right]} \qquad (9.54)$$

Puesto que la resistencia efectiva del rotor, R_2, es muy pequeña en el momento del arranque en comparación con su valor al alcanzar el deslizamiento especificado, R_2/s, la corriente en el arranque puede llegar a ser de 400 a 800% de la corriente a plena carga. Por otro lado, el par de arranque puede ser de sólo 200 a 350% del par

a plena carga. Una corriente de arranque tan alta generalmente resulta inaceptable porque ocasiona una caída de voltaje excesiva en la línea, la cual puede afectar la operación de las máquinas alimentadas por la misma fuente de energía.

Como la corriente de arranque es directamente proporcional al voltaje aplicado, la ecuación 9.53 indica que esa corriente puede reducirse si se imprime un voltaje bajo en las terminales del motor en el momento del arranque. Sin embargo, de la ecuación 9.54 resulta evidente que una disminución del voltaje aplicado ocasiona que el par de arranque también disminuya. En consecuencia, puede utilizarse el arranque a bajo voltaje solamente para aplicaciones que no requieren pares de arranque elevados. Por ejemplo, la carga de un ventilador casi no necesita par excepto por la pérdida debida a la fricción. El motor de inducción que impulsa la carga de un ventilador puede ponerse en marcha utilizando el arranque a voltaje reducido.

La corriente de arranque también puede reducirse si se incrementa la resistencia del motor. Como ya se mencionó, un aumento de la resistencia del rotor también ocasiona un incremento del par de arranque, el cual, naturalmente, es deseable para las cargas que necesitan pares de arranque elevados. No obstante, una resistencia elevada del rotor *a*) reduce el par que se desarrolla a plena carga, *b*) produce una pérdida grande en el cobre del rotor y *c*) ocasiona la reducción en la eficiencia del motor a plena carga. Sin embargo, estas desventajas no representan un problema para motores de rotor devanado, ya que se les puede incorporar con facilidad una resistencia grande externa conectada en serie con los devanados del rotor en el momento del arranque y retirarla cuando el motor trabaje a plena carga.

Para rotores que usan devanados de jaula de ardilla (rotores fabricados por fundición a presión), el cambio en la resistencia de un valor elevado en el arranque a un valor bajo a plena carga se lleva a cabo utilizando algunos diseños diversos, como se muestra en la figura 9.12. En cada uno de ellos, el principio esencial es lograr una resistencia alta del rotor en el arranque y baja resistencia del rotor a la velocidad especificada. En el arranque, la frecuencia del rotor es la misma que la frecuencia de la fuente aplicada. Sin embargo, a plena carga la frecuencia del rotor es muy baja (generalmente menos de 10 Hz). Luego, el efecto superficial es más pronunciado en el

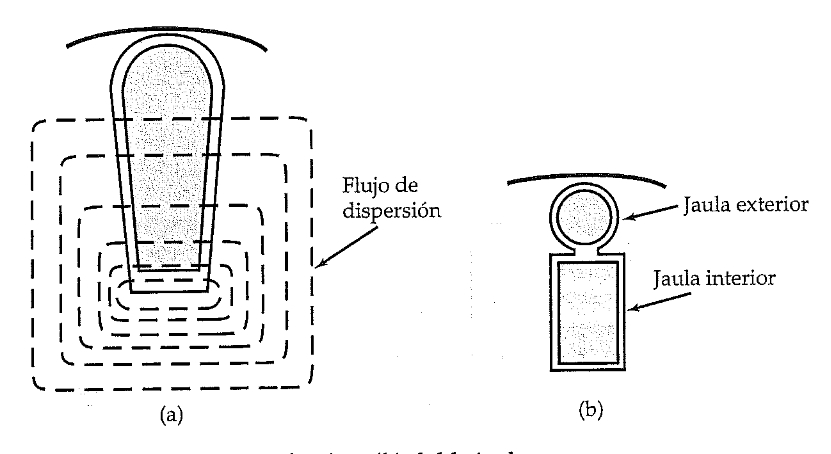


Figura 9.12. Rotores de **(a)** barra profunda y **(b)** doble jaula.

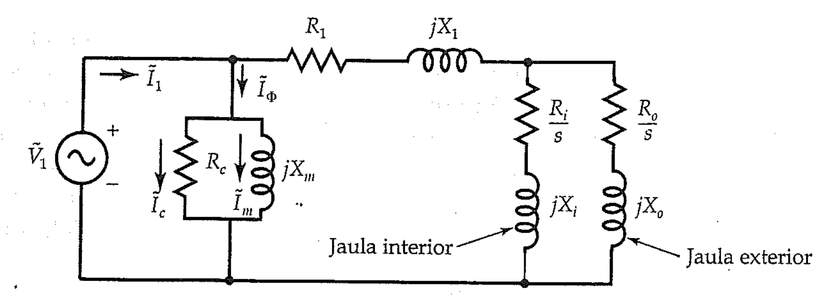


Figura 9.13. Circuito equivalente por fase de un motor de inducción de doble jaula.

arranque que a plena carga. Por tanto, la resistencia del rotor es mayor en el arranque que a plena carga debido al efecto superficial. Por otra parte, a medida que se inducen las corrientes en las barras del rotor, producen un campo magnético secundario. Parte de este campo enlaza solamente al conductor del rotor y se manifiesta en el flujo de dispersión. El flujo de dispersión se incrementa al desplazarse radialmente desde el entrehierro hacia el eje, y se vuelve significativamente alto durante el arranque. Así, en un rotor de jaula múltiple que arranca, la jaula interior presenta una reactancia de dispersión elevada en comparación con la jaula exterior. Debido a la elevada reactancia de dispersión de la jaula interior, la corriente del rotor tiende a confinarse en la jaula exterior. Si el área de la sección transversal de la jaula exterior es más pequeña que el área de la interior, al arrancar presenta una resistencia comparativamente alta. Cuando el motor opera a plena carga, la frecuencia del rotor es baja. Por ello, el flujo de dispersión es bajo. En este caso, la corriente tiende a distribuirse por igual entre todas las jaulas. Como resultado, la resistencia del rotor es baja.

En la figura 9.13 se muestra el circuito equivalente aproximado de un motor de inducción de *jaula doble*. En la figura 9.12*b*, los subíndices *o* e *i* corresponden a las jaulas exterior e interior, respectivamente, de un rotor de doble jaula. En la figura 9.14 se ilustra el cambio en la curva velocidad-par de un rotor de jaula única respecto de un rotor de doble jaula.

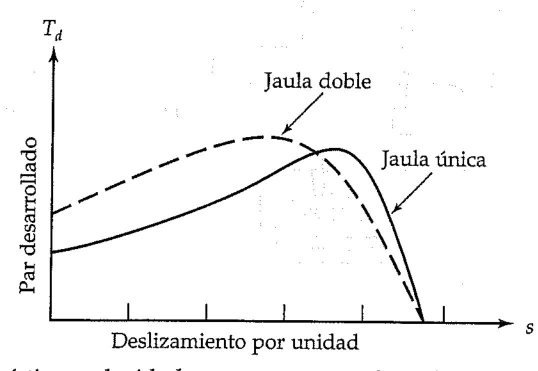


Figura 9.14. Características velocidad-par para rotores de jaula única y doble.

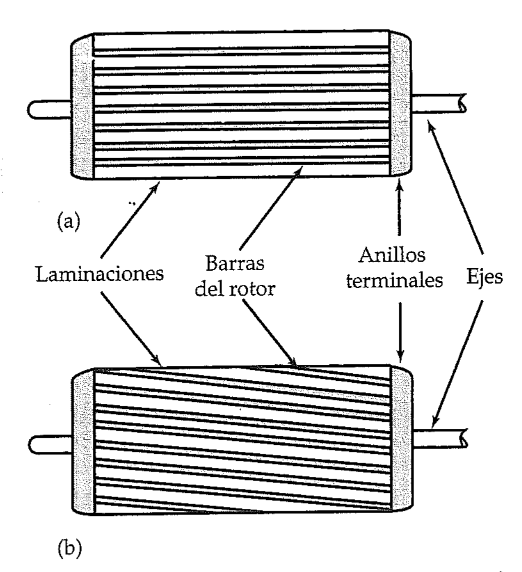


Figura 9.15. Barras de rotores **(a)** no sesgadas y **(b)** sesgadas.

Otra técnica que se usa comúnmente para aumentar la resistencia del rotor y disminuir los efectos de armónicas en un motor de inducción es la llamada *sesgo*. En este caso, las barras del rotor se desvían (sesgan) respecto del eje del rotor, como se aprecia en la figura 9.15. El sesgo generalmente se proporciona en términos de barras. El sesgo mínimo debe ser de una barra a fin de evitar la vibración. Es común que se usen sesgos de más de una barra.

Ejemplo 9.9

La impedancia de los rotores de las jaulas interior y exterior de un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de jaula doble son $0.2 + j0.8$ Ω/fase y $0.6 + j0.2$ Ω/fase, respectivamente. Determine la razón de los pares que desarrollan las dos jaulas *a*) en reposo, y *b*) con un deslizamiento de 2%.

• Solución

Como no se proporcionan la impedancia del devanado del estator, la resistencia de la pérdida en el núcleo y la reactancia de magnetización, se emplea el circuito aproximado que ignora dichas impedancias y que aparece en la figura 9.16. Las corrientes en el rotor en las jaulas interior y exterior son

$$\tilde{I}_i = \frac{\tilde{V}_1}{0.2/s + j0.8}$$

e

$$\tilde{I}_o = \frac{\tilde{V}_1}{0.6/s + j0.2}$$

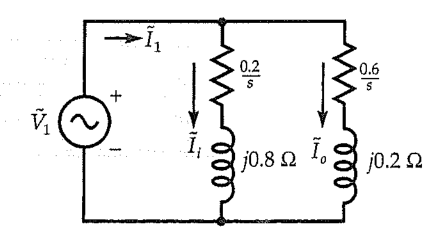


Figura 9.16. Circuito equivalente para el ejemplo 9.9.

El par desarrollado por un motor de inducción trifásico es

$$T_d = \frac{3I_2^2R_2}{s\omega_s}$$

Por tanto, la razón de los pares que desarrollan las jaulas exterior e interior es

$$\frac{T_o}{T_i} = \frac{I_o^2R_o}{I_i^2R_i} = \frac{(0.2/s)^2 + 0.8^2}{(0.6/s)^2 + 0.2^2} \times \frac{0.6}{0.2} \tag{9.55}$$

Al sustituir $s = 1$ en la ecuación 9.55 se obtiene T_o en términos de T_i como sigue:

$$T_o = 5.1\ T_i$$

Luego, el par desarrollado por la jaula exterior es cinco veces el que desarrolla la interior.

Sin embargo, al sustituir $s = 0.02$ en la ecuación 9.55 se obtiene

$$T_o = 0.34T_i$$

o

$$T_i = 2.98T_o$$

La jaula interior es más efectiva con un deslizamiento de 2% porque desarrolla casi tres veces más par que la jaula exterior.

■

Ejercicios

9.18. La resistencia del devanado del estator del motor de inducción de doble jaula del ejemplo 9.9 es $2.1 + j8.3\ \Omega$/fase. Encuentre el par de arranque desarrollado por el motor si el voltaje de fase es 110 V, 60 Hz.

9.19. Un motor de inducción de doble jaula, trifásico, hexapolar conectado en Y tiene una impedancia en la jaula interior de $0.1 + j0.6\ \Omega$/fase y una impedancia en la jaula exterior de $0.4 + j0.1\ \Omega$/fase. Determine la razón del par desarrollado por ambas jaulas *a*) en reposo y *b*) con 5% de deslizamiento. ¿Cuál es el deslizamiento necesario para que las dos jaulas desarrollen el mismo par?

9.20. Si el motor del ejercicio 9.19 se conecta a una fuente de potencia de 230 V y tiene una impedancia del estator de $1.5 + j2.5\ \Omega$/fase, obtenga el par que desarrolla el motor en reposo.

9.12. Transformación de la impedancia del rotor

Hasta el momento se ha supuesto tácitamente que tanto para los rotores de jaula de ardilla como para los rotores devanados la impedancia del circuito del rotor puede transformarse al lado del estator en términos de una relación a. La relación a se definió por fase como la razón de las vueltas efectivas en el devanado del estator a las vueltas efectivas en el devanado del rotor. Es decir,

$$a = \frac{k_{w1}N_1}{k_{w2}N_2} = \frac{E_1}{E_b} \tag{9.56}$$

Para un rotor devanado que tenga el mismo número de polos y de fases que el devanado del estator, las vueltas totales por fase N_2 y el factor del devanado k_{w2} pueden calcularse de la misma manera que para el devanado del estator. Sin embargo, el problema es un tanto más complejo para el rotor de jaula de ardilla (fabricado por fundición a presión). Suponga que hay P polos en el estator y Q barras en el rotor, y asimismo que una de las barras está bajo la mitad del polo norte del estator en cualquier momento. También hay otra barra que se encuentra en la mitad del polo sur adyacente. La fem inducida en ambas barras es máxima pero de polaridad opuesta. Por tanto, estas dos barras conducen la corriente máxima y pueden visualizarse como si formaran una sola vuelta. Luego, el número total de vueltas en el rotor es $Q/2$. Las fem también se inducen en otras barras. Si el flujo está distribuido en forma senoidal, las fem inducidas —y con ellas también las corrientes inducidas— siguen el mismo patrón. Sin embargo, el valor medio cuadrático (rms) de la fem inducida en cada vuelta es el mismo. Como cada vuelta está desplazada una ranura en el rotor, la fem inducida en cada barra está desplazada en ese ángulo. Por tanto, se considera que cada vuelta es equivalente a un grupo de fase, y hay $Q/2$ grupos de fase en total.

Como hay Q barras y P polos, el número de barras por polo es Q/P. Como cada barra identifica un grupo de fase diferente, se tiene que el número de barras por polo es equivalente al número de fases m_2 en el rotor. Es decir,

$$m_2 = \frac{Q}{P} \tag{9.57}$$

Esto pone de relieve el hecho de que el número de barras por polo y por fase es igual a 1. Dicho de otro modo, el número de vueltas por polo y por fase es 1/2. Luego puede determinarse el número total de vueltas por fase multiplicando el número de vueltas por polo y por fase por el número de polos. Es decir,

$$N_2 = \frac{P}{2} \tag{9.58}$$

Puesto que las dos barras que están desplazadas en 180° eléctricos forman una vuelta, el factor del devanado es igual a la unidad porque *a*) el factor de paso es la unidad, ya que cada vuelta es de paso completo, y *b*) el factor de distribución es unitario porque sólo hay una vuelta en cada grupo de fase.

Como se está tratando de transformar los elementos del circuito del rotor al lado del estator, sea m_1 el número de fases en el lado del estator, E_2 la fem inducida e I_2 la corriente equivalente en el rotor. Para que la representación equivalente sea válida, la potencia aparente asociada con el circuito del rotor en el lado del rotor debe ser la misma que para el circuito equivalente del rotor referido al lado del estator. Por tanto,

$$m_1 E_2 I_2 = m_2 E_{\text{bar}} I_{\text{bar}} \tag{9.59}$$

donde E_{bar} es la fem inducida en la barra del rotor e I_{bar} es la corriente inducida.

Puesto que la fem inducida en el lado del estator es E_1, E_2 debe ser igual a E_1. Por tanto,

$$I_2 = \frac{m_2 k_{w2} N_2}{m_1 k_{w1} N_1} I_{\text{bar}} \tag{9.60}$$

También la pérdida en el cobre del rotor antes y después de la transformación debe ser igual. Es decir,

$$m_1 I_2^2 R_2 = m_2 I_{\text{bar}}^2 R_{\text{bar}} \tag{9.61}$$

$$R_2 = \frac{m_1}{m_2}\left[\frac{k_{w1} N_1}{k_{w2} N_2}\right]^2 R_{\text{bar}} \tag{9.62}$$

donde R_{bar} es la resistencia de una barra del rotor.

Finalmente, la energía magnética almacenada en la inductancia de dispersión del rotor antes y después de la transformación también debe ser la misma. Por ende,

$$\frac{1}{2} m_1 I_2^2 \frac{X_2}{2\pi f} = \frac{1}{2} m_2 I_{\text{bar}}^2 \frac{X_{\text{bar}}}{2\pi f}$$

$$X_2 = \frac{m_1}{m_2} \left[\frac{k_{w1} N_1}{k_{w2} N_2} \right]^2 X_{\text{bar}} \tag{9.63}$$

donde X_{bar} es la reactancia de dispersión de cada barra del rotor.

En las ecuaciones 9.62 y 9.63 se ilustra cómo pueden transformarse los parámetros reales de un rotor de jaula de ardilla en los parámetros equivalentes de un rotor en el lado del estator. R_2 y X_2 son la resistencia del rotor y la reactancia de dispersión que se han utilizado en el circuito equivalente de un motor de inducción. A partir de las ecuaciones anteriores es evidente que la relación a es

$$a = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \left[\frac{k_{w1} N_1}{k_{w2} N_2} \right] \tag{9.64}$$

Observe que para un rotor devanado, $m_1 = m_2$.

Ejemplo 9.10

Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 36 ranuras y devanado de doble capa tiene 10 vueltas por bobina en el devanado del estator, y un rotor de jaula de ardilla con 48 barras. La resistencia y reactancia de cada barra son 20 μΩ y 2 mΩ, respectivamente. Determine la impedancia equivalente del rotor referida al estator por fase.

- Solución

El número de bobinas para un estator devanado en doble capa es 36. Las bobinas por polo y por fase son $n = 3$ [36/(4 × 3)]. El alcance polar es 36/4 = 9 ranuras. El alcance de ranura es 180/9 = 20° eléctricos. El paso de bobina es siete ranuras, 140° eléctricos y puede determinarse a partir del diagrama desarrollado. El factor de paso es k_{p1} = sen(140/2) = 0.94. El factor de distribución es

$$k_{d1} = \frac{\text{sen}\left[3 \times \frac{20}{2}\right]}{3 \text{ sen}\left(\frac{20}{2}\right)} = 0.96$$

El factor del devanado para el estator es $k_{w1} = 0.94 \times 0.96 = 0.9$. Las vueltas totales por fase son $10 \times 36/3 = 120$. Se supone que todas las bobinas en una fase están conectadas en serie.

Para el rotor, $k_{w2} = 1$. El número de fases $m_2 = Q/P = 12$. Las vueltas por fase son $N_2 = P/2 = 2$. Según la ecuación 9.64, la relación a es

$$a = \sqrt{\frac{3}{12}} \cdot \left[\frac{0.9 \times 120}{1 \times 2}\right] = 27$$

Por consiguiente, los parámetros del rotor referidos al estator son

$$R_2 = 27^2 \times 20 \times 10^{-6} = 14.58 \text{ m}\Omega$$

y

$$X_2 = 27^2 \times 2 \times 10^{-3} = 1.458\ \Omega$$

■

Ejercicios

9.21. En un motor de inducción de rotor devanado, el devanado del estator tiene el doble de vueltas que el devanador del rotor. El factor de distribución del devanado del estator es de 0.85 y para el rotor, 0.8. La impedancia real del rotor en el lado del rotor, en reposo, es de $0.18 + j0.25\ \Omega/\text{fase}$. ¿Cuál es la impedancia del rotor referida al lado del estator?

9.22. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 36 ranuras, de doble capa, tiene 20 vueltas por bobina y un rotor de jaula de ardilla con 48 barras. Cada barra tiene una resistencia de 15 $\mu\Omega$ y una reactancia de 1.2 mΩ. Determine los parámetros del circuito equivalente del rotor referidos al lado del estator.

9.13. Control de la velocidad en los motores de inducción

En las secciones previas se señaló que la velocidad de un motor de inducción para obtener una operación estable debe ser mayor que la velocidad a la que desarrolla el par máximo. En otras palabras, el deslizamiento a plena carga debe ser menor que el deslizamiento crítico. Para un motor de inducción con rotor de baja resistencia, el deslizamiento crítico generalmente es menor de 10%. Para este motor, la regulación de la velocidad puede encontrarse dentro de 5%. Para todo fin práctico, es posible referirse a un motor de inducción de resistencia baja como un *motor de velocidad constante*. Por tanto, se deben proyectar algunos métodos a fin de variar su velocidad de operación.

Se sabe que la velocidad síncrona es directamente proporcional a la frecuencia de la fuente de potencia aplicada, e inversamente proporcional al número de polos; la velocidad del motor con cualquier deslizamiento es

$$N_m = \frac{120f}{P}(1 - s) \tag{9.65}$$

De esta ecuación resulta evidente que la velocidad de operación de un motor de inducción puede controlarse cambiando la frecuencia del suministro de voltaje aplicado, cambiando el número de polos o con ambos métodos. La velocidad también puede controlarse cambiando el voltaje aplicado, la resistencia de la armadura o introduciendo una fem externa en el circuito del rotor. En seguida se analizan algunos de estos métodos.

Control de la frecuencia

La velocidad de operación de un motor de inducción puede incrementarse o disminuirse aumentando o reduciendo la frecuencia de la fuente del voltaje aplicado. Este método permite obtener una amplia variación en la velocidad de trabajo de un motor de inducción. La única exigencia es que debe disponerse de un suministro con frecuencia variable. Para mantener constante la densidad del flujo y de ese modo desarrollar el par máximo, el voltaje aplicado debe variar en proporción directa a la frecuencia. Esto se debe a que la fem inducida en el devanado del estator es directamente proporcional a la frecuencia. En la figura 9.17 se presentan las características velocidad-par de un motor de inducción a cuatro frecuencias. También se muestra en esa figura una curva típica de carga. En cada frecuencia, el motor opera a una velocidad en la que la línea de carga interseca la característica velocidad-par para esa frecuencia.

Cambio de los polos del estator

Este método es muy apropiado para un motor de inducción con rotor de jaula de ardilla. En este caso, el estator puede devanarse con dos o más devanados totalmente

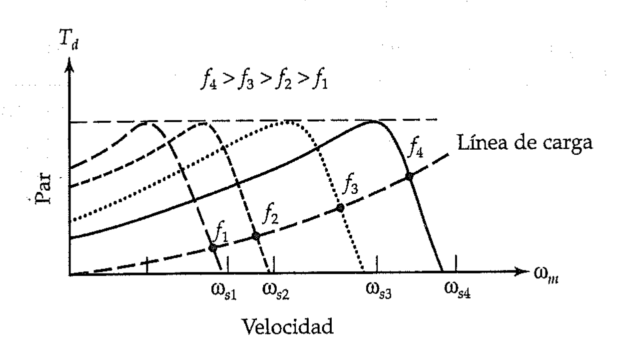


Figura 9.17. Característica velocidad-par para distintas frecuencias y valores ajustados de voltaje.

independientes. Cada devanado corresponde a un número diferente de polos y, por tanto, distinta velocidad síncrona. En todo momento, sólo un devanado está en operación. Todos los demás están desconectados. Por ejemplo, un motor de inducción devanado para cuatro y seis polos a una frecuencia de 60 Hz puede operar con velocidad síncrona de 1 800 rpm (operación tetrapolar) o a 1 200 rpm (operación hexapolar). Aunque un tanto limitado, este método de control de la velocidad es muy sencillo, proporciona buena regulación de la velocidad y garantiza eficiencia alta a cualquier velocidad. Este método se ha utilizado en el diseño de motores de tracción, motores de ascensores y motores pequeños para impulsar máquinas-herramienta.

Generalmente, un motor de inducción se devana de manera que la corriente en cada devanado de fase produzca polos alternados. Así, las cuatro bobinas para cada fase de un motor de inducción tetrapolar produce dos polos norte y dos polos sur, con un polo sur ubicado entre los dos norte y viceversa. Sin embargo, si se reconectan las bobinas de fase para producir cuatro polos norte o cuatro sur, se dice que el devanado constituye un *devanado con polos consecuentes*. Entre dos polos iguales cualesquiera, se induce un polo distinto mediante la continuidad de líneas del campo magnético. Por ende, cuando se reconecta un motor tetrapolar como motor con polos consecuentes se comporta como un motor de ocho polos (octapolar). En consecuencia, con la simple reconexión de los devanados de fase de un motor de inducción es posible alcanzar una velocidad a razón de 2:1 por medio de un solo devanado.

Control de la resistencia del rotor

Se ha estudiado el efecto de los cambios en la resistencia del rotor sobre la característica velocidad-par de un motor de inducción. Este método de control de velocidad es apropiado únicamente para motores de inducción de rotor devanado. La velocidad de operación del motor puede reducirse agregando una resistencia externa en el circuito del rotor. Sin embargo, el aumento en la resistencia del rotor ocasiona *a*) aumento en la pérdida en el cobre del rotor, *b*) aumento en la temperatura de operación del motor, y *c*) reducción en la eficiencia del motor. Debido a las desventajas indicadas, este método de control de la velocidad sólo puede usarse durante periodos breves.

Control del voltaje del estator

El par desarrollado por el motor es proporcional al cuadrado del voltaje aplicado; luego, la reducción o el aumento en la velocidad de operación de un motor de inducción se logra por medio de la disminución o incremento en el voltaje aplicado. Las características velocidad-par de dos valores del voltaje aplicado se describen en la figura 9.18. Este método es muy práctico, pero su alcance es limitado, ya que para lograr un cambio apreciable en la velocidad se requiere un cambio relativamente grande en el voltaje aplicado.

Introducción de una fem en el circuito del rotor

La velocidad de un motor de inducción con rotor devanado también puede cambiarse introduciendo una fem en el circuito del rotor, como se muestra en la figura

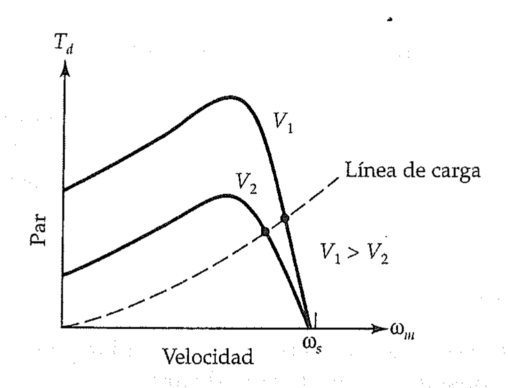


Figura 9.18. Característica velocidad-par como función del voltaje de suministro.

9.19. Para que opere en forma adecuada, la frecuencia de la fem que se introduce debe ser igual a la frecuencia del rotor. No obstante, no hay ninguna restricción en la fase de la fem introducida. Si la fem que se introduce está en fase con la fem inducida en el rotor, la corriente de este último aumenta. En tal caso, el circuito del rotor se manifiesta como si tuviera resistencia baja. Por otro lado, si la fem introducida está en fase opuesta con la fem inducida en el circuito del rotor, la corriente de éste disminuye. La disminución de la corriente en el rotor es análoga al aumento de su resistencia. Así, el cambio de la fase del voltaje que se introduce va acompañado del cambio en la velocidad de operación del motor. También se puede lograr un control adicional de la velocidad variando la magnitud de la fem introducida.

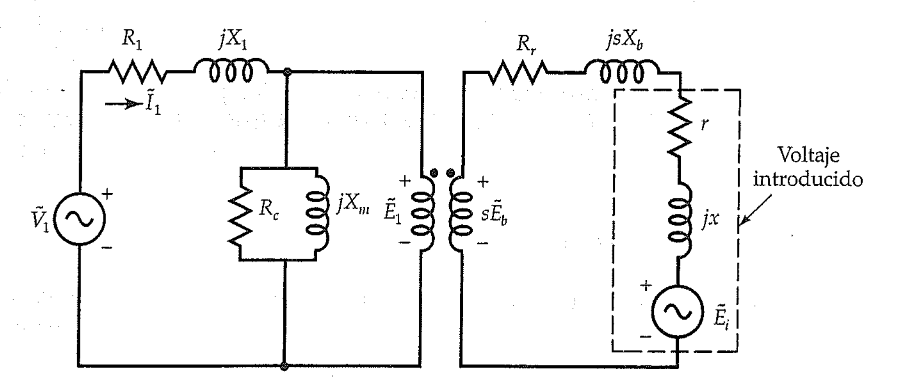


Figura 9.19. Circuito equivalente de un motor de inducción con alimentación externa al circuito del rotor.

9.14. Tipos de motores de inducción

La National Electrical Manufacturers Association (NEMA) ha clasificado los motores de inducción de jaula de ardilla en seis clases identificadas con letras *A* a *F*. La denominación de cada letra está encaminada a satisfacer las exigencias de cierta aplicación.

Motores clase *A*

Un motor clase *A* se considera estándar y es apropiado para aplicaciones de velocidad constante. El motor puede arrancar aplicando el voltaje especificado. Desarrolla un par de arranque de 125 a 175% del par a plena carga. La corriente de arranque al voltaje especificado es de cinco a siete veces la corriente especificada. El deslizamiento a plena carga es casi siempre menor de 5% debido a que la resistencia del rotor es relativamente baja. La regulación de la velocidad es de 2 a 4%. Las barras del rotor están colocadas cerca de la superficie de las laminaciones del rotor con objeto de reducir la reactancia de dispersión. Estos motores impulsan cargas de inercia baja y poseen aceleraciones altas. Se emplean en aplicaciones como ventiladores, sopladores, bombas centrífugas y máquinas-herramienta.

Motores clase *B*

Un motor clase *B* se considera de propósito general y puede arrancar aplicando el voltaje especificado. La resistencia del rotor para un motor clase *B* es un tanto más elevada que la de uno clase *A*. Los conductores del rotor están colocados con mayor profundidad en las ranuras que los de un motor clase *A*. Por tanto, la reactancia del rotor de un motor clase *B* es mayor que la de otro clase *A*. El incremento en la reactancia del rotor reduce el par de arranque, en tanto que un incremento de la resistencia del rotor aumenta el par de arranque. Por ende, el rango de par de arranque para un motor clase *B* es casi el mismo que para uno clase *A*. Debido al aumento de la reactancia, la corriente de arranque es aproximadamente de 4.5 a 5.5 veces la corriente a plena carga. La baja corriente de arranque y el par de arranque casi igual hacen que los motores clase *B* también sean apropiados para aplicaciones de clase *A*. En consecuencia, los motores clase *B* pueden sustituir a los de clase *A* en todas las aplicaciones. La regulación de la velocidad para los motores clase *B* es de 3 a 5%.

Motores clase *C*

Generalmente, un motor clase *C* tiene un rotor de doble jaula y está diseñado para arrancar con voltaje pleno. La resistencia elevada del rotor limita la corriente de arranque entre 3.5 y 5 veces la corriente a plena carga. El par de arranque es de 200 a 275% del par a plena carga. La regulación de velocidad es de 4 a 5%. Los motores clase *C* se emplean en aplicaciones que requieren pares de arranque elevados,

como bombas de compresión, trituradores, horadadoras, bandas transportadoras, maquinaria textil y equipos para trabajar madera.

Motores clase *D*

Un motor clase *D* se caracteriza por su alta resistencia, capaz de desarrollar un par de arranque de 250 a 300% del par especificado. La alta resistencia del rotor se crea utilizando aleaciones de alta resistencia para construir las barras del rotor y reduciendo el área transversal de la barra. Según el diseño, la corriente de arranque puede ser de tres a ocho veces la corriente especificada. La eficiencia de un motor clase *D* es menor que la eficiencia de los motores clases *A*, *B* y *C*. La regulación de la velocidad puede ser tan alta como 10%. Estos motores se usan en aplicaciones como excavadoras, máquinas cizalladoras, troqueladoras, estampadoras, equipo de lavandería y montacargas.

Motores clase *E*

En general, los motores clase *E* tienen un par de arranque bajo y operan con bajo deslizamiento con la carga especificada. La corriente de arranque es relativamente baja para motores de menos de 7.5 caballos de fuerza. Estos motores pueden arrancar con el voltaje nominal (o especificado). Sin embargo, para motores de más de 7.5 caballos de fuerza, la corriente de arranque puede ser suficientemente alta para exigir un circuito de arranque a voltaje reducido.

Motores clase *F*

Un motor clase *F* generalmente es de doble jaula. Es un motor de par bajo y de todos los motores, es el que necesita la corriente de arranque más baja. El par de arranque suele ser 1.25 veces el par especificado, en tanto que la corriente de arranque es de dos a cuatro veces la corriente nominal. La regulación de velocidad es superior a 5%. Estos motores pueden arrancar aplicando el voltaje especificado. Están diseñados para reemplazar a los motores clase *B* y se construyen en tamaños mayores de 25 caballos de fuerza.

Resumen

En este capítulo se presentarán los motores de inducción trifásicos, que constan, esencialmente, de un estator y un rotor. El estator se construye utilizando devanados de doble capa exactamente como el estator de una máquina síncrona. Hay dos tipos de rotores: el de jaula de ardilla y el devanado. Aunque caro, un rotor devanado se devana para el mismo número de polos que el estator. Proporciona medios para agregar una resistencia externa en serie con el circuito del rotor. Un rotor de jaula de ardilla usa barras en las ranuras que están en cortocircuito en cada extremo por me-

dio de anillos terminales. Para un motor de escasos caballos de fuerza, las barras y los anillos terminales se forman mediante un proceso de fundición a presión.

Cuando el devanado de un estator trifásico se conecta a una fuente trifásica equilibrada, establece un campo rotatorio que gira alrededor de la periferia del rotor con la velocidad síncrona que resulta de la ecuación siguiente:

$$N_s = \frac{120f}{P}$$

donde f es la frecuencia del suministro de voltaje aplicado y P es el número de polos en el estator.

El campo rotatorio uniforme induce una fem en los conductores del rotor. Como el devanado del rotor forma un circuito cerrado, la fem inducida da origen a una corriente en los conductores del rotor. La interacción de la corriente en los conductores del rotor con el campo magnético del motor crea un par de acuerdo con la ecuación de fuerza de Lorentz. Por tanto, el rotor comienza a girar y adquiere una velocidad ligeramente menor que la síncrona. Por tal razón, a un motor de inducción también se le llama *motor asíncrono*. La diferencia entre la velocidad síncrona y la velocidad del motor se llama *velocidad de deslizamiento*. El deslizamiento por unidad se define como

$$s = \frac{N_s - N_m}{N_s}$$

Utilizando la analogía con un transformador se desarrolló un circuito equivalente para un motor de inducción referido al lado del estator. Los parámetros del circuito del rotor se transformaron al lado del estator utilizando la relación a, expresada por

$$a = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\left[\frac{k_{w1}N_1}{k_{w2}N_2}\right]$$

donde m_1 y m_2 son el número de fases, k_{w1} y k_{w2} son los factores del devanado y N_1 y N_2 son los números de vueltas en cada fase del estator y del rotor. Para un rotor de jaula de ardilla, $k_{w2} = 1$, $m_2 = Q/P$ y $N_2 = P/2$, donde Q es el número de barras en el rotor. Para un motor de inducción de rotor devanado, $m_1 = m_2$.

Se ha definido $R_2\ (1 - s)/s$ como la resistencia dinámica (o efectiva) porque la potencia desarrollada es proporcional a ella. Observe que R_2 es la resistencia del rotor. A partir del circuito equivalente por fase es posible calcular la potencia de entrada como sigue:

$$P_{in} = 3V_1I_1 \cos\theta$$

donde V_1 e I_1 son el voltaje aplicado por fase y la corriente de entrada, respectivamente. θ es el ángulo del factor de potencia entre los dos conceptos anteriores.

La pérdida en el cobre del estator puede calcularse como sigue:

$$P_{scl} = 3I_1^2R_1$$

Si I_c es la corriente por la pérdida en el núcleo a través de R_c, la pérdida en el núcleo es

$$P_m = 3I_c^2R_c$$

La potencia en el entrehierro es

$$P_{ag} = P_{in} - P_{scl} - P_m = \frac{3I_2^2R_2}{s}$$

La pérdida en el cobre del rotor es

$$P_{rcl} = 3I_2^2R_2$$

Luego, la potencia desarrollada es

$$P_d = P_{ag} - P_{rcl} = (1 - s)P_{ag} = \frac{3I_2^2R_2(1 - s)}{s}$$

El par desarrollado es

$$T_d = \frac{P_d}{\omega_m} = \frac{P_{ag}}{\omega_s} = \frac{3I_2^2R_2}{(s\omega_s)}$$

Utilizando el circuito equivalente aproximado, se concluye que la eficiencia de un motor de inducción es máxima cuando

$$3I_2^2[R_1 + R_2] = P_r$$

El motor desarrolla su par máximo con un deslizamiento conocido como *deslizamiento crítico* tal que

$$s_b = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + X_e^2}}$$

donde $X_e = X_1 + X_2$. La expresión para el par máximo desarrollado es

$$T_{dm} = \frac{3V_1^2}{2\omega_s}\left[\frac{1}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_e^2}}\right]$$

Cuando la impedancia del devanado del estator es despreciable, las expresiones aproximadas para el deslizamiento crítico y el par crítico son

$$s_b = \frac{R_2}{X_2}$$

$$T_{dm} = \frac{3V_1^2}{2\omega_s}\frac{1}{X_2}$$

Si T_d es el par desarrollado con el deslizamiento s, se tiene que

$$\frac{T_d}{T_{dm}} = \frac{2ss_b}{s^2 + s_b^2}$$

La potencia desarrollada por un motor de inducción es máxima cuando

$$s_p = \frac{R_2}{R_2 + Z_e}$$

donde $Z_e = |R_e + jX_e|$ y $R_e = R_1 + R_2$.

La potencia máxima desarrollada por el motor es

$$P_{dm} = \frac{3V_1^2}{2[R_e + Z_e]}$$

Los parámetros del circuito del motor pueden determinarse efectuando la prueba de rotor fijo, la prueba sin carga y la prueba de resistencia del estator. De la prueba de rotor fijo resulta que

$$R_e = \frac{P_{br}}{I_{br}^2}$$

donde P_{br} e I_{br} son la potencia de entrada por fase y la corriente. La prueba se efectúa cuando el rotor se mantiene estacionario y el motor forma la corriente especifi-

cada a partir de un voltaje bajo aplicado cuidadosamente, V_{br}. La magnitud de la impedancia del estator y el rotor es

$$Z_e = \frac{V_{br}}{I_{br}}$$

Luego,

$$X_e = \sqrt{Z_e^2 - R_e^2}$$

Los valores individuales de las reactancias de dispersión son

$$X_1 = X_2 = 0.5X_e$$

y la resistencia del rotor es $R_2 = R_e - R_1$.
La prueba sin carga se efectúa con el voltaje especificado y con el rotor libre para girar sin carga. Si W_{oc}, I_{oc} y V_{oc} son la potencia de entrada, la corriente y el voltaje aplicado por fase resulta que

$$P_{oc} = W_{oc} - P_{fw\phi}$$

donde $P_{fw\phi}$ es la fricción por fase y la pérdida por el viento.
La resistencia de la pérdida en el núcleo es

$$R_c = \frac{V_{oc}^2}{P_{oc}}$$

La reactancia de magnetización es

$$X_m = \frac{V_{oc}^2}{Q_{oc}}$$

donde

$$Q_{oc} = \sqrt{S_{oc}^2 - W_{oc}^2} \qquad \text{y} \qquad S_{oc} = V_{oc}I_{oc}$$

También se examinó el efecto de los cambios en la resistencia del rotor sobre la característica velocidad-par de un motor de inducción. Un incremento en la resistencia del rotor aumenta el par de arranque, reduce la corriente de arranque y permite la operación del motor a una velocidad ligeramente menor. En un rotor devanado, la resistencia del rotor se incrementa agregando una resistencia externa al circuito del rotor por medio de anillos de rozamiento. En un motor de inducción de jaula de ardilla, el cambio en la resistencia del rotor se efectúa utilizando un rotor de jaula múltiple.

También se estudiaron varios métodos que permiten controlar la velocidad de un motor de inducción. Algunos de ellos son el control de la frecuencia, el cambio de polos del estator, el control de la resistencia del rotor, el control del voltaje del estator y la introducción de una fem en el circuito del rotor.

Preguntas de repaso

9.1. Explique el principio de funcionamiento de un motor de inducción.
9.2. Describa la construcción de un motor de inducción de jaula de ardilla.
9.3. Explique la construcción de un motor de inducción de rotor devanado.
9.4. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de un motor de inducción de rotor devanado?
9.5. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de un motor de inducción de jaula de ardilla?
9.6. ¿A qué velocidad gira el campo rotatorio en un motor de inducción? ¿Cómo puede determinarse?
9.7. Explique por qué un motor de inducción no puede operar a su velocidad síncrona.
9.8. Explique qué son la velocidad de deslizamiento, la velocidad por unidad, el deslizamiento por unidad y el deslizamiento porcentual.
9.9. ¿Cuál es la frecuencia del rotor cuando *a*) está fijo y *b*) gira con un deslizamiento de 5%?
9.10. Defina el par de arranque, el par crítico, el deslizamiento crítico, el par especificado, el par desarrollado y el par en el eje.
9.11. ¿Cómo puede minimizarse la reactancia del rotor?
9.12. Describa la prueba sin carga, la prueba de rotor fijo y la prueba de resistencia del estator.
9.13. Defina la pérdida en el cobre del estator, la pérdida en el cobre del rotor, la potencia en el entrehierro, la resistencia dinámica y la resistencia efectiva del rotor.
9.14. ¿Cuáles son las pérdidas que se miden con *a*) la prueba sin carga y *b*) la prueba de rotor fijo?
9.15. ¿Cuáles son las distintas técnicas empleadas para controlar la velocidad de los motores de inducción?
9.16. ¿Cuáles son las diversas clases de motores de inducción de jaula de ardilla?
9.17. Enumere varias aplicaciones para cada clase de motor de inducción de jaula de ardilla.
9.18. ¿Cómo puede controlarse la corriente de arranque en un motor con rotor devanado?
9.19. Mencione las posibles razones de falla en el arranque de un motor de inducción trifásico.
9.20. ¿Por qué se llama *motor asíncrono* a un motor de inducción?
9.21. ¿Cómo puede invertirse el sentido de giro de un motor de inducción trifásico?
9.22. ¿Qué sucede a la velocidad de un motor de inducción si la carga se incrementa?
9.23. ¿Qué es un devanado de polos consecuentes?
9.24. ¿Qué sucede cuando un motor de inducción hexapolar se reconecta como motor de polos consecuentes?
9.25. ¿Cuál es el efecto que tiene el aumento de la reactancia del rotor sobre la corriente de arranque? ¿Y sobre el par máximo?

9.26. Explique la naturaleza de la característica velocidad-par de un motor de inducción.

9.27. ¿Qué pasa a la característica velocidad-par de un motor de inducción si se aumenta la resistencia del rotor?

9.28. ¿Cómo afecta el incremento de la resistencia del rotor al deslizamiento crítico? ¿Cómo al par de arranque? ¿Y al par crítico?

9.29. ¿Es posible poner en marcha siempre un motor de inducción aplicando el voltaje especificado?

9.30. ¿Es posible que un motor de inducción opere como generador de inducción? Si así fuere, ¿cómo puede lograrse?

Problemas

9.1. La frecuencia de la fem inducida en el devanado secundario de un motor de inducción trifásico, octapolar, es de 10 Hz. ¿A qué velocidad gira la fuerza magnetomotriz (fmm) del secundario con respecto al devanado primario?

9.2. Un motor de inducción trifásico, bipolar, de 230 V y 50 Hz trabaja a una velocidad de 2 800 rpm. Determine *a*) el deslizamiento por unidad y *b*) la frecuencia de la fem inducida en el rotor.

9.3. Un motor de inducción trifásico de 12 polos, 440 V y 400 Hz está diseñado para trabajar con un deslizamiento de 5% a plena carga. Determine *a*) la velocidad especificada, *b*) la frecuencia del rotor y *c*) la velocidad del campo rotatorio del rotor con relación al rotor.

9.4. Un motor de inducción trifásico opera con un deslizamiento de 3% y tiene una pérdida en el cobre de 300 W. La pérdida por rotación es de 1 500 W. Determine *a*) la potencia en el entrehierro y *b*) la potencia de salida. Si la impedancia del rotor es de $0.2 + j0.8\ \Omega$/fase, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida por fase en el rotor?

9.5. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 10 hp, 440 V y 60 Hz conectado en Δ está diseñado para operar con un deslizamiento de 3% a plena carga. La pérdida por rotación es de 4% de la potencia de salida. Cuando el motor trabaja a plena carga, determine *a*) la pérdida en el cobre del rotor, *b*) la potencia en el entrehierro, *c*) la potencia desarrollada y *d*) el par en el eje.

9.6. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 4 hp, 230 V, 60 Hz y conectado en Y trabaja 1 050 rpm con plena carga. La pérdida por rotación es de 300 W. Determine la resistencia por fase del rotor si la corriente en éste no debe exceder los 100 A.

9.7. Los parámetros del circuito equivalente de un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 208 V y 60 Hz conectado en Y son $R_1 = 0.4\ \Omega$, $X_1 = 0.8\ \Omega$, $R_2 = 0.3\ \Omega$, $X_2 = 0.9\ \Omega$ y $X_m = 40\ \Omega$. La pérdida en el cobre es de 45 W y la pérdida por fricción y viento es de 160 W. Cuando el motor opera con un deslizamiento de 5%, determine *a*) la corriente de entrada, *b*) la potencia de entrada, *c*) la potencia en el entrehierro, *d*) la potencia desarrollada, *e*) la potencia de salida, *f*) el par en el eje y *g*) la eficiencia del motor. Trace el diagrama de flujo de potencia correspondiente.

9.8. Calcule el par de arranque desarrollado por el motor del problema 9.7.

9.9. Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 230 V y 60 Hz conectado en Y tiene los parámetros siguientes por fase: $R_1 = 10.12\ \Omega$, $X_1 = 38.61\ \Omega$, $R_2 = 21.97\ \Omega$, $X_2 = 11.56\ \Omega$ y $X_m = 432.28\ \Omega$. La pérdida en el cobre es de 10.72 W y la pérdida por fricción y viento es de 5.9 W. Cuando el motor trabaja a su velocidad nominal de 1 550 rpm, determine *a*) la corriente en el estator, *b*) la corriente de magnetización, *c*) la corriente en el rotor, *d*) la potencia de entrada, *e*) la pérdida en el cobre del estator, *f*) la pérdida en el cobre del rotor, *g*) la potencia de salida, *h*) el par en el eje e *i*) la eficiencia.

9.10. Grafique las curvas características velocidad-par, potencia de entrada-velocidad y potencia desarrollada-velocidad del motor de inducción del problema 9.9. ¿Cuál es el par de arranque? También determine la potencia de entrada y la potencia desarrollada en el momento del arranque.

9.11. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 230 V y 60 Hz conectado en Y tiene los parámetros siguientes en Ω/fase referidos al estator: $R_1 = 12.5$, $X_1 = 21.3$, $R_2 = 28.6$, $X_2 = 13.6$, $R_c = 4\,200$ y $X_m = 1\,800$. La pérdida por fricción y viento es 3% de la potencia desarrollada. Si la velocidad del motor es de 1 125 rpm, determine *a*) la potencia de entrada, *b*) la pérdida en el cobre del estator, *c*) la pérdida en el cobre del rotor, *d*) la potencia en el entrehierro, *e*) la potencia desarrollada, *f*) el par en el eje y *g*) su eficiencia.

9.12. Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 440 V y 60 Hz conectado en Δ tiene los parámetros siguientes en Ω/fase: $R_1 = 0.3$, $X_1 = 0.9$, $R_2 = 0.6$, $X_2 = 0.9$, $R_c = 150$ y $X_m = 60$. Si la pérdida por rotación es 4% de la potencia desarrollada, determine la eficiencia del motor cuando gira con un deslizamiento de 4%.

9.13. Con los datos del problema 9.7, calcule *a*) el deslizamiento con el que el motor desarrolla su potencia máxima, *b*) la potencia máxima desarrollada por el motor y *c*) el par desarrollado correspondiente.

9.14. Calcule el deslizamiento con el que el motor del problema 9.9 desarrolla la potencia máxima. ¿Cuál es la potencia máxima desarrollada por el motor? ¿Cuál es el par desarrollado por el motor con ese deslizamiento?

9.15. Con los datos del problema 9.11, calcule *a*) el deslizamiento con el que el motor desarrolla su potencia máxima, *b*) la potencia máxima desarrollada y *c*) el par asociado desarrollado por el motor.

9.16. Calcule la potencia máxima desarrollada por el motor del problema 9.12. ¿Cuál es el par desarrollado por el motor con ese deslizamiento?

9.17. Con los datos del problema 9.7, calcule *a*) el deslizamiento con el que el motor desarrolla el par máximo, *b*) el par máximo desarrollado por el motor y *c*) la potencia desarrollada correspondiente.

9.18. Calcule el deslizamiento con el que el motor del problema 9.9 desarrolla el par máximo. ¿Cuál es el par máximo desarrollado por el motor? ¿Cuál es la potencia desarrollada por el motor con ese deslizamiento?

9.19. Con los datos del problema 9.11, calcule *a*) el deslizamiento con el que el motor desarrolla su par máximo, *b*) el par máximo desarrollado y *c*) la potencia asociada desarrollada por el motor.

9.20. Calcule el par máximo desarrollado por el motor del problema 9.12. ¿Cuál es la potencia desarrollada por el motor con ese deslizamiento?

9.21. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 60 Hz y conectado en Y desarrolla un par máximo de 250 N • m con una velocidad de 720 rpm. La resistencia del rotor es de 0.4 Ω/fase y la impedancia del devanado del estator es despreciable. Determine el par desarrollado por el motor cuando trabaja a una velocidad de 1 125 rpm.

9.22. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 50 Hz conectado en Δ tiene una impedancia en el rotor de 0.05 + j0.5 Ω/fase. La impedancia del devanado del estator es despreciable. Determine la resistencia adicional que se requiere en el circuito del rotor de modo que desarrolle su par máximo en el arranque.

9.23. Un motor de inducción trifásico, octapolar, de 230 V y 60 Hz conectado en Δ tiene una impedancia en el rotor de 0.025 + j0.1 Ω/fase. La impedancia del devanado del estator es despreciable. Determine *a*) la velocidad a la que el motor desarrolla el par máximo, *b*) el par máximo del motor y *c*) el par de arranque como porcentaje del par máximo. ¿Qué resistencia adicional debe insertarse en el circuito del rotor para hacer que el par de arranque sea igual a 75% del par máximo?

9.24. Un motor de inducción trifásico, hexapolar, de 120 V y 60 Hz opera a una velocidad de 1 050 rpm a plena carga y desarrolla 5 hp. Con carga reducida, la velocidad se incrementa a 1 125 rpm. Determine el par y la potencia desarrollada por el motor con carga reducida.

9.25. Un motor de inducción trifásico, octapolar, de 50 Hz y 208 V conectado en Δ desarrolla 20 hp a plena carga y deslizamiento de 5%. Determine el par y la potencia desarrollados con el mismo deslizamiento cuando se aplica un voltaje reducido de 120 V. ¿Cuál debe ser el nuevo deslizamiento para que el motor desarrolle el mismo par?

9.26. La corriente de arranque de un motor de inducción, trifásica, de 208 V conectado en Δ es de 120 A cuando se aplica el voltaje especificado a los devanados del estator. Determine la corriente de arranque cuando el voltaje aplicado se reduce a 120 V. Si la corriente de arranque no debe exceder 50 A, ¿cuál debe ser el voltaje aplicado?

9.27. Se obtuvieron los datos siguientes de la prueba de un motor de inducción trifásico de 460 V, 60 Hz y conectado en Δ:

Prueba sin carga: potencia de entrada = 380 W, corriente en la línea = 1.15 A con el voltaje especificado.

Prueba de motor fijo: potencia de entrada = 14.7 W, corriente en la línea = 2.1 A con voltaje de línea de 21 V.

La pérdida por fricción y viento es de 21 W, y la resistencia del devanado entre dos líneas cualesquiera es de 1.2 Ω. Determine *a*) los parámetros del circuito equivalente del motor y *b*) su eficiencia con un deslizamiento del 5%.

9.28. Los datos de prueba siguientes se aplican a un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 208 V y conectado en Y: al operar sin carga a su voltaje especificado, la corriente en la línea y la potencia de salida son 2 A y 360 W. Con el

rotor fijo, la corriente es de 20 A y la potencia de entrada es de 600 W cuando el voltaje aplicado es de 30 V. La pérdida por fricción y viento es de 36 W. La resistencia entre dos líneas cualesquiera es de 0.2 W. Obtenga los parámetros del circuito equivalente del motor.

9.29. Un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 440 V y conectado en Y arrojó las lecturas siguientes cuando fue probado:
Sin carga: 440 V, 6.2 A, factor de potencia = 0.1 en atraso.
Prueba de rotor fijo: 100 V, 12.5 A, 750 W.
Resistencia del devanado entre dos líneas cualesquiera = 1.2 Ω. La pérdida por fricción y viento es de 30 W. Determine los parámetros del circuito equivalente del motor.

9.30. Los siguientes son los resultados de un motor de inducción trifásico, de 440 V, 50 Hz, con anillo terminal, y conectado en Y:
Sin carga: 440 V, 7.5 A, 1 350 W (incluida una pérdida por fricción y viento de 650 W)
Prueba de rotor fijo: 100 V, 32 A, 1 800 W. Las pérdidas en el cobre del estator y del rotor son iguales en la condición de rotor fijo.
Determine los parámetros del circuito equivalente del motor.

9.31. Las impedancias equivalentes de las jaulas interior y exterior de un motor de inducción trifásico, tetrapolar, de 60 Hz y conectado en Y son $0.5 + j2$ Ω/fase y $2 + j0.5$ Ω/fase, en reposo. Calcule la razón de pares desarrollados por las dos jaulas *a*) al arrancar y *b*) con 4% de deslizamiento.

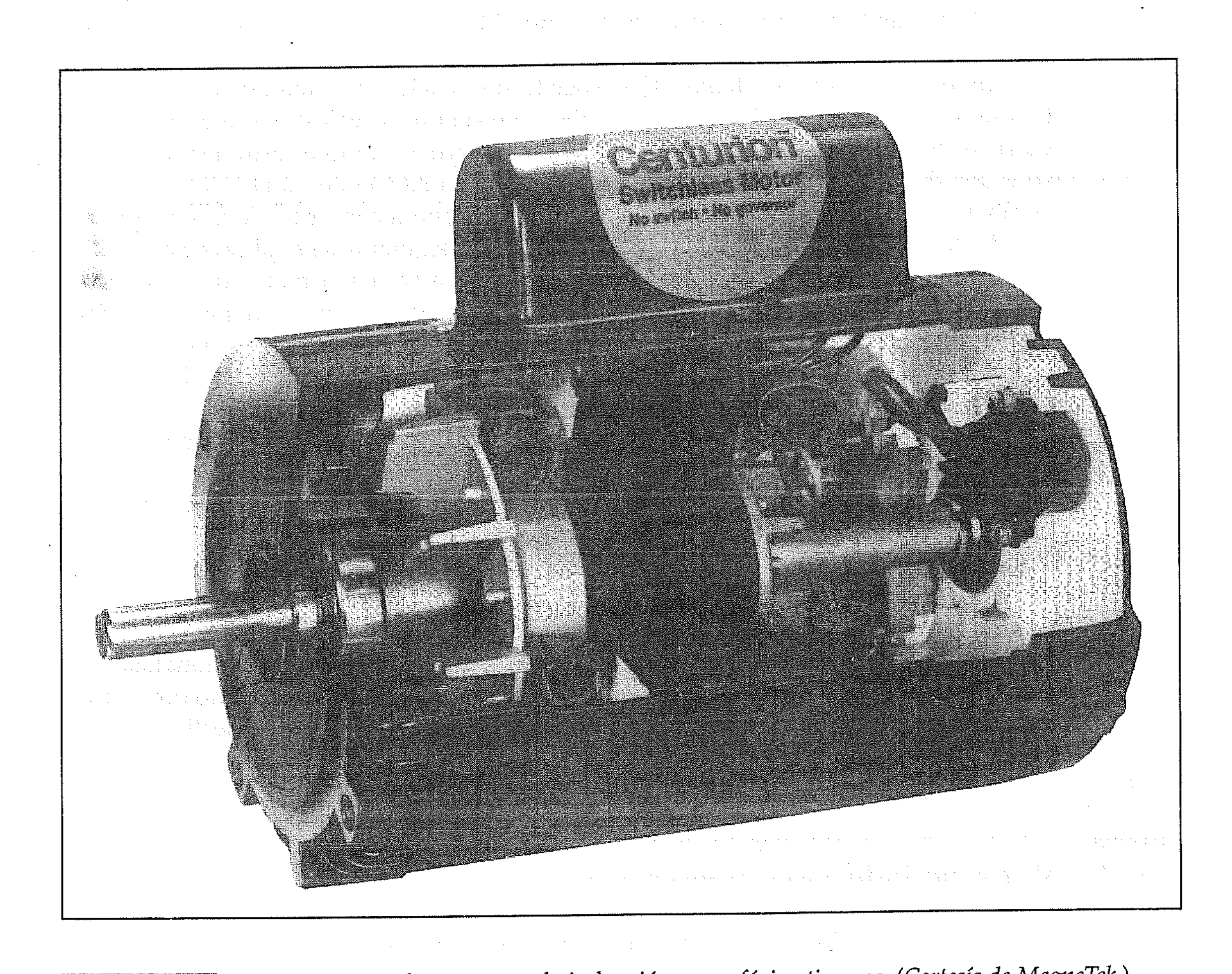
9.32. Si la impedancia del devanado del estator del motor del problema 9.31 es de $1 + j3$ Ω/fase y el voltaje aplicado es de 208 V, determine el par desarrollado *a*) al arrancar y *b*) con un deslizamiento de 4%.

9.33. Las jaulas interna y externa de un rotor en reposo tienen impedancias de $0.5 + j4$ Ω/fase y $2.6 + j1.2$ Ω/fase. Encuentre la razón de los pares desarrollados por las dos jaulas *a*) al arrancar y *b*) con un deslizamiento de 0.05.

9.34. Las jaulas interior y exterior de un motor de inducción de doble jaula, en reposo, tienen impedancias de $2.6 + j2$ Ω/fase y $1.8 + j3$ Ω. Si el deslizamiento a plena carga es de 5%, determine la razón del par de arranque al par a plena carga.

10

Motores monofásicos



Vista en corte de un motor de inducción monofásico tipo PSC. (*Cortesía de MagneTek.*)

10.1. Introducción

En el capítulo anterior estudiamos la operación del motor de inducción trifásico, el cual emplea un esquema ingenioso de colocación de tres devanados de fase idénticos, espaciados 120° eléctricos entre sí. Cuando estos devanados se excitan por medio de un suministro trifásico equilibrado, establecen un campo magnético uniforme que gira alrededor de la periferia del rotor a velocidad síncrona. La acción de corte del flujo induce una fuerza electromotriz (fem) y con ello una corriente en los conductores del rotor. La interacción de la corriente del rotor y el campo magnético rotatorio hace que el rotor gire a una velocidad algo menor que la velocidad síncrona del motor.

¿Qué sucede cuando una de las tres fases del suministro no está conectada al motor? ¿Puede arrancar el rotor desde su posición de reposo e impulsar alguna carga mecánica? En realidad, ya respondimos a esta pregunta en el capítulo 3. El motor se comporta más como un motor bifásico y produce un campo rotatorio que induce una fem y la corriente en los conductores del rotor. El motor desarrolla un par de arranque y obliga al rotor a girar.

Ahondaremos en este tema. ¿Qué sucede si se excita sólo una de las tres fases? En este momento tal vez le sorprenda saber que si el rotor ya estuviera girando, seguiría haciéndolo en la misma dirección. Sin embargo, si el motor estuviera en reposo y una de las tres fases se excitara por medio de una fuente monofásica, el rotor zumbaría, pero no giraría. Por tanto, un motor que opera con una sola fase no es capaz de desarrollar el par de arranque. En la sección siguiente se explicará por qué.

Un motor que opera con una fuente monofásica se llama motor de inducción monofásico, y sólo requiere un devanado monofásico para mantener al motor en movimiento. No obstante, un motor con esas características no arranca por sí mismo, por ende, debe proveérsele algún medio externo para que lo haga. La mayor parte de los motores monofásicos se construyen en el rango de potencia fraccionaria (menos de un caballo de fuerza) y se usan en sistemas de calefacción, enfriamiento y ventilación.

Un motor serie de corriente continua (cc) bien diseñado se puede hacer operar tanto con fuentes de corriente continua (cc) como alterna (ca). Por esta razón, se le llama con propiedad motor universal. Estos motores operan a velocidades relativamente altas y forman parte íntegra de unidades como aspiradoras, licuadoras y herramientas eléctricas portátiles (sierras y rebajadoras, por ejemplo).

En este capítulo estudiaremos varios tipos de motores de inducción monofásicos. También explicaremos la operación del motor universal. Hemos reservado otro capítulo para el estudio de motores especiales. Ahora empezaremos por la explicación de cómo funciona un motor monofásico.

10.2. Motor de inducción monofásico

En el capítulo 3 se explicó que para que un motor arranque por sí mismo son necesarios por lo menos dos devanados de fase situados en cuadratura espacial y excita-

dos por medio de una fuente bifásica. Este hecho tiene gran importancia en el diseño de motores de inducción monofásicos, como veremos posteriormente.

En la figura 10.1 se muestra una vista en corte transversal de un motor de inducción monofásico bipolar con rotor de jaula de ardilla. Por claridad, los conductores del rotor se colocaron en la periferia exterior de éste. En el motor real, esos conductores están incrustados en las ranuras del rotor.

Supongamos que el voltaje que se suministra está aumentando en la dirección positiva y origina una corriente en los devanados del estator (campo), como se indica en la figura 10.1, mientras que el rotor se encuentra en reposo. La corriente en cada devanado produce un campo magnético que también está en aumento hacia arriba. Como dos conductores del rotor separados 180° eléctricos forman un lazo cerrado, los conductores del rotor pueden ponerse en pareja, como se muestra. Examinemos uno de los lazos cerrados, el que forman los conductores 2 y 2′. El flujo que pasa a través de este lazo induce una fem y, por tanto, una corriente en el mismo lazo. La dirección de esa corriente es tal que produce un flujo magnético que tiende a oponerse al incremento del flujo magnético establecido en los devanados. Para que esto ocurra, la corriente debe fluir fuera del conductor 2 hacia el conductor 2′, como lo indican los puntos y las cruces, respectivamente. Del mismo modo, es posible determinar las corrientes en los demás conductores. Cada conductor portador de corriente debe experimentar una fuerza de acuerdo con la ecuación de fuerza de Lorentz. En la figura 10.1 también se indica la dirección de la fuerza que actúa sobre cada conductor. Las fuerzas que experimentan los conductores 1, 2, 3 y 4 al unísono con los conductores 1′, 2′, 3′ y 4′ tienden a hacer girar al rotor en sentido contrario al

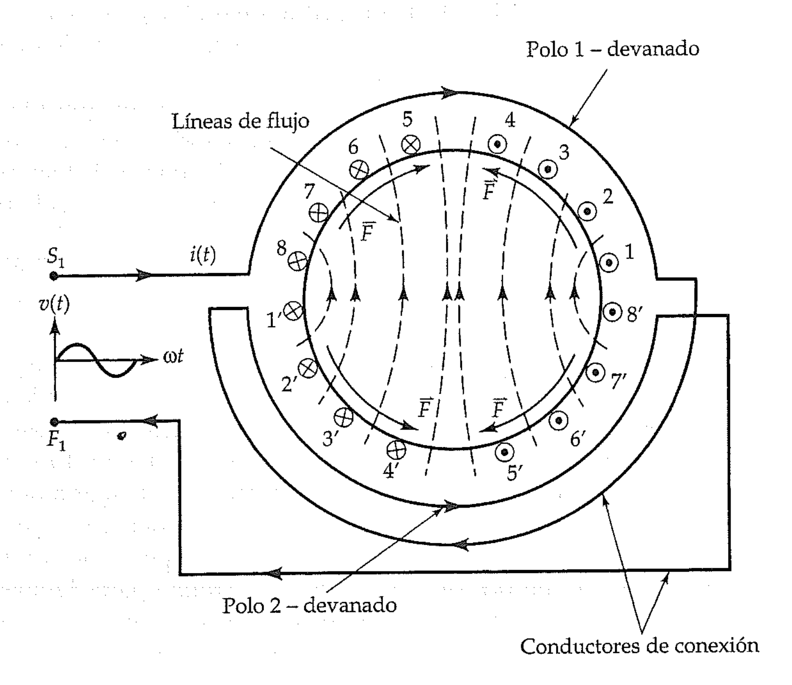


Figura 10.1. Motor de inducción monofásico bipolar.

de las manecillas del reloj. Sin embargo, a la rotación se oponen las fuerzas que actúan sobre los conductores restantes. La colocación simétrica de los conductores del rotor asegura que el motor desarrolle un par igual en ambas direcciones y que el par neto desarrollado por él sea igual a cero. Por tanto, el rotor permanece en la posición de reposo.

Como se explicó anteriormente, si se hace girar el rotor en cualquier dirección mientras el devanado monofásico esté excitado, el motor desarrolla un par en esa dirección. Se han enunciado dos teorías para explicar este hecho experimental: la teoría del doble campo rotatorio y la teoría del campo cruzado. En esta obra limitaremos el análisis a la teoría del doble campo rotatorio.

Teoría del doble campo rotatorio

Según esta teoría, un campo magnético que varía en el tiempo pero se encuentra estacionario en el espacio, puede descomponerse en dos campos magnéticos rotatorios iguales en magnitud pero que giran en direcciones opuestas. Consideremos de nuevo la condición del rotor en reposo. El campo magnético que produce el motor pulsa hacia arriba y abajo con el tiempo, y en cualquier momento su magnitud está dada por

$$B = B_m \cos \omega t \tag{10.1}$$

donde B_m es la densidad de flujo máximo en el motor.

La densidad de flujo B puede separarse en dos componentes B_1 y B_2 tales que la magnitud de B_1 es igual a la magnitud de B_2. Luego $B_1 = B_2 = 0.5\ B$. Si suponemos que B_1 gira en el sentido de las manecillas del reloj, el sentido de giro de B_2 será el inverso, como se ilustra en la figura 10.2.

Por tanto, se tienen dos campos rotatorios de magnitud constante e igual que giran síncronamente en sentidos opuestos. Se induce entonces una fem en el circuito del rotor debido a cada campo rotatorio. La polaridad de la fem inducida en el rotor debido a un campo rotatorio se encuentra en oposición a la del otro. Luego las corrientes del rotor inducidas por los dos campos rotatorios circulan en direcciones opuestas. Sin embargo, en el reposo, el deslizamiento en cualquier dirección es el mismo ($s = 1$) al igual que la impedancia del rotor. En consecuencia, las corrientes de arranque en los conductores del rotor son iguales y opuestas. En otras palabras, el par de arranque desarrollado por cada campo rotatorio es igual. Como la dirección del par de arranque desarrollado por un campo rotatorio se opone a la del otro, el par neto que desarrolla el motor es igual a cero. Ésta es la misma conclusión a la que llegamos antes. Sin embargo, hemos obtenido una visión más profunda de la operación de un motor de inducción monofásico de acuerdo con la teoría del doble campo rotatorio. Podemos visualizar un motor de inducción monofásico como si consistiera en dos motores con un devanado del estator en común pero con rotores girando en sentidos opuestos. En reposo, los dos rotores desarrollan pares iguales en direcciones opuestas, y el par neto desarrollado es de cero. Tras entender esto es posible desarrollar un circuito equivalente de un motor de inducción monofásico en reposo, como se muestra en la figura 10.3. Observe que la reactancia de magnetización y la impedancia del

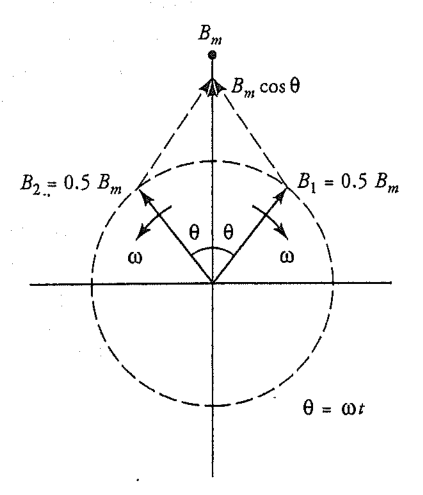


Figura 10.2. Descomposición de un vector pulsante en dos vectores giratorios iguales y opuestos.

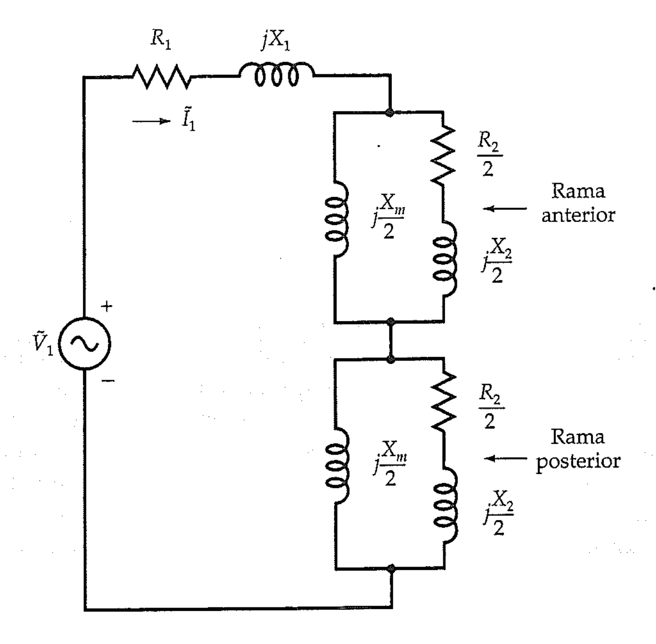


Figura 10.3. Circuito equivalente de un motor de inducción monofásico en reposo.

rotor en reposo se han separado en dos secciones para el efecto de dos rotores acoplados. En aras de la simplificación hemos tratado la pérdida en el núcleo como parte de la pérdida por rotación. La resistencia de la pérdida en el núcleo, por ende, se omite en el circuito equivalente. Si se conoce la resistencia de la pérdida en el núcleo es posible colocarlo en las terminales de la fuente de potencia, como sucedió para el circuito equivalente aproximado de un transformador o para un motor de inducción trifásico.

Una sección del circuito del rotor generalmente se llama rama anterior y a la otra rama posterior. Cuando el motor gira, digamos en el sentido de las manecillas del reloj, la rama anterior representa el efecto del campo rotatorio en esa dirección. En este caso, la rama posterior corresponde al circuito del rotor asociado con el campo que gira en sentido opuesto al de las manecillas del reloj. En el reposo, ambas ramas tienen la misma impedancia. También las corrientes en el circuito del rotor son las mismas, al igual que los pares desarrollados. Entonces, cuando el rotor está en reposo, el par neto desarrollado por el rotor es igual a cero. Generalmente se habla del par desarrollado por una rama, pero a lo que en realidad se hace referencia es al par desarrollado por la resistencia del rotor en esa rama específica.

Supongamos en seguida que el rotor está girando en sentido de las manecillas del reloj con velocidad N_m. El campo magnético que gira en sentido de las manecillas del reloj tiene velocidad síncrona de N_s ($N_s = 120f/P$). Por consiguiente, la velocidad síncrona del campo rotatorio en sentido contrario a las manecillas del reloj es $-N_s$. El deslizamiento por unidad en sentido anterior (sentido de las manecillas del reloj) es

$$s = \frac{N_s - N_m}{N_s} = 1 - \frac{N_m}{N_s} \tag{10.2}$$

El deslizamiento por unidad en sentido posterior (contrario al de las manecillas del reloj) es

$$s_b = \frac{-N_s - N_m}{-N_s} = 1 + \frac{N_m}{N_s} = 2 - s \tag{10.3}$$

Advierta que, en reposo, $N_m = 0$ y $s = s_b = 1$.

En seguida puede incorporarse el efecto de los deslizamientos en las ramas anterior y posterior del rotor, como se hizo para los motores de inducción trifásicos. El circuito modificado equivalente se aprecia en la figura 10.4.

En el análisis de los motores de inducción trifásicos determinamos que el par desarrollado es proporcional a la resistencia efectiva en la rama del rotor. En reposo, $s = s_b = 1$, la resistencia efectiva de ambas ramas de la figura 10.4 es la misma. Por ende, el par desarrollado por los dos rotores tiene igual magnitud pero dirección opuesta. Eso explica por qué no hay par de arranque en un motor de inducción monofásico. Por otro lado, supongamos que el rotor está girando con un deslizamiento s tal que $s < 1$. La resistencia efectiva del rotor, R_2/s, en la rama anterior es mayor que la de la rama posterior, $R_2/(2 - s)$. Luego, el par desarrollado por la rama anterior es mayor

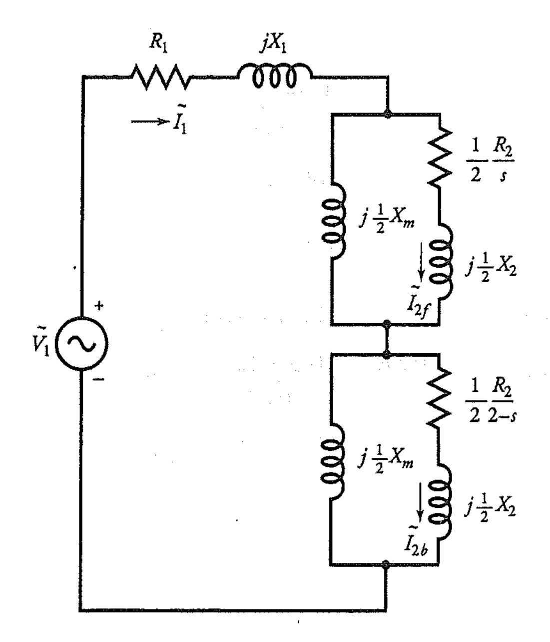


Figura 10.4. Circuito equivalente de un motor de inducción monofásico con deslizamiento s cualquiera.

que el desarrollado por la posterior. El par resultante es en el sentido anterior, y tiende a mantener la rotación en tal sentido. Así, una vez que un motor de inducción monofásico comienza a girar en cualquier sentido por la aplicación de un par externo, continúa girando en esa dirección mientras que el par de la carga sea menor que el par neto máximo que desarrolle.

Ejemplo 10.1

Un motor de inducción monofásico, tetrapolar, de 115 V y 60 Hz está girando en sentido de las manecillas del reloj con velocidad de 1 710 rpm. Determine su deslizamiento por unidad *a*) en el sentido de la rotación y *b*) en el sentido opuesto. Si la resistencia del rotor en reposo es de 12.5 Ω, determine la resistencia efectiva del rotor en cada rama.

- Solución

$$N_s = \frac{120 \times 60}{4} = 1\,800 \text{ rpm}$$

a) El deslizamiento en el sentido anterior es

$$s = \frac{1\,800 - 1710}{1\,800} = 0.05 \qquad \text{o} \qquad 5\%$$

b) El deslizamiento en el sentido posterior es

$$s_b = 2 - 0.05 = 1.95 \qquad \text{o} \qquad 195\%$$

Las resistencias efectivas del rotor son

Rama anterior: $\dfrac{0.5R_2}{s} = \dfrac{0.5 \times 12.5}{0.05} = 125\ \Omega$

Rama anterior: $\dfrac{0.5R_2}{s_b} = \dfrac{0.5 \times 12.5}{1.95} = 3.205\ \Omega$

■

Ejercicios

10.1. Un motor de inducción monofásico, bipolar, de 230 V y 50 Hz está diseñado para operar con un deslizamiento de 3%. Determine el deslizamiento en el otro sentido. ¿Cuál es la velocidad del motor en el sentido de giro? Si la resistencia del rotor en reposo es de 2.1 Ω, ¿cuál es la resistencia efectiva con el deslizamiento nominal en cualquier sentido de giro?

10.2. La resistencia del rotor de un motor de inducción monofásico, hexapolar, de 208 V y 50 Hz cuando está en reposo es de 1.6 Ω. Si el motor gira con un deslizamiento de 5%, determine *a*) su velocidad, *b*) la resistencia efectiva del rotor en la rama anterior y *c*) la resistencia efectiva del rotor en la rama posterior.

10.3. Análisis de un motor de inducción monofásico

A partir del circuito equivalente de un motor de inducción monofásico (fig. 10.4) se obtiene

$$\hat{Z}_f = R_f + jX_f = 0.5\,\frac{jX_m[R_2/s + jX_2]}{R_2/s + j(X_2 + X_m)} \tag{10.4}$$

como la impedancia efectiva de la rama anterior, y

$$\hat{Z}_b = R_b + jX_b = 0.5\,\frac{jX_m[R_2/(2-s) + jX_2]}{R_2/(2-s) + j(X_2 + X_m)} \tag{10.5}$$

como la impedancia efectiva de la rama posterior. En la figura 10.5 se ilustra el circuito equivalente simplificado en términos de $\hat{Z}_f$ y $\hat{Z}_b$.

Si $\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1$ es la impedancia del devanado del estator, la impedancia de entrada es

$$\hat{Z}_{in} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_f + \hat{Z}_b \tag{10.6}$$

La corriente del devanado del estator es

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_1}{\hat{Z}_{in}} \tag{10.7}$$

La potencia de entrada es

$$P_{in} = \text{Re}[\tilde{V}_1 \tilde{I}_1^*] = V_1 I_1 \cos\theta \tag{10.8}$$

donde θ es el ángulo del factor de potencia por el que la corriente $\tilde{I}_1$ está en atraso respecto del voltaje aplicado $\tilde{V}_1$. La pérdida en el cobre del estator es

$$P_{sc\ell} = I_1^2 R_1 \tag{10.9}$$

Al restar la pérdida en el cobre del estator de la potencia total de entrada queda la potencia en el entrehierro. Sin embargo, la potencia en el entrehierro se distribuye entre las dos potencias en el entrehierro: una debida al campo rotatorio anterior y la

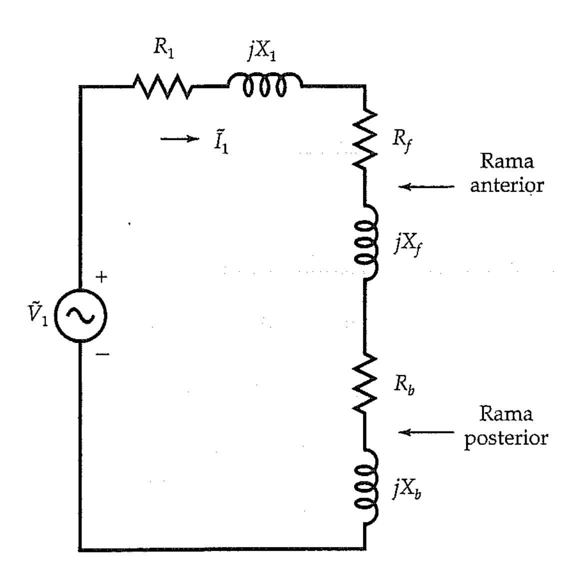


Figura 10.5. Circuito equivalente simplificado de un motor de inducción monofásico.

otra al campo rotatorio posterior. A fin de determinar la potencia en el entrehierro asociada con cada campo rotatorio, deben calcularse las corrientes en el rotor en ambas ramas. Si $\tilde{I}_{2f}$ es la corriente en el rotor en la rama anterior, entonces

$$\tilde{I}_{2f} = \tilde{I}_1 \frac{jX_m}{\frac{R_2}{s} + j(X_2 + X_m)} \tag{10.10}$$

En forma semejante, la corriente del rotor en la rama posterior $\tilde{I}_{2b}$ es

$$\tilde{I}_{2b} = \tilde{I}_1 \frac{jX_m}{R_2/(2 - s) + j(X_2 + X_m)} \tag{10.11}$$

Por tanto, las potencias debido a los campos rotatorios anterior y posterior son

$$P_{agf} = I_{2f}^2 R_2 \frac{0.5}{s} \tag{10.12a}$$

$$P_{agb} = I_{2b}^2 R_2 \frac{0.5}{2 - s} \tag{10.13a}$$

Como R_f y R_b son las resistencias equivalentes en las ramas anterior y posterior del circuito del rotor, la potencia transferida al rotor también debe ser consumida por esas resistencias. En otras palabras, las potencias en el entrehierro también pueden calcularse como sigue:

$$P_{agf} = I_1^2 R_f \tag{10.12b}$$

para la rama anterior y

$$P_{agb} = I_1^2 R_b \tag{10.13b}$$

para la rama posterior.

La potencia neta en el entrehierro es

$$P_{ag} = P_{agf} - P_{agb} \tag{10.14}$$

La potencia mecánica desarrollada por el motor es

$$P_d = (1 - s)P_{ag} = T_d\omega_m = T_d(1 - s)\omega_s \tag{10.15}$$

Por tanto, el par desarrollado por el motor monofásico es

$$T_d = \frac{P_{ag}}{\omega_s} \tag{10.16}$$

La potencia disponible en el eje es

$$P_o = P_d - P_r \tag{10.17}$$

donde P_r es la pérdida por rotación del motor. En este caso, la pérdida consiste en la pérdida por fricción y viento, la pérdida en el núcleo y la pérdida por carga parásita.

El par de carga (en el eje) del motor es

$$T_s = \frac{P_o}{\omega_m} \tag{10.18}$$

Finalmente, la eficiencia del motor es la razón de la potencia disponible en el eje P_o a la potencia total de entrada P_{in}.

También se podría calcular el par desarrollado por los campos rotatorios anterior y posterior, como sigue:

$$T_{df} = \frac{P_{agf}}{\omega_s} \tag{10.19}$$

$$T_{db} = \frac{P_{agb}}{\omega_s} \tag{10.20}$$

El par neto desarrollado por el motor es

$$T_d = T_{df} - T_{db} \tag{10.21}$$

Las dos expresiones del par desarrollado (ecuaciones 10.16 y 10.21) son idénticas. Para calcular T_d puede usarse cualquiera de ellas.

En la figura 10.6 se muestra la gráfica de los pares desarrollados, T_{df} y T_{db}. Esas curvas también se extienden hacia la región de velocidad negativa. Esto se hace ge-

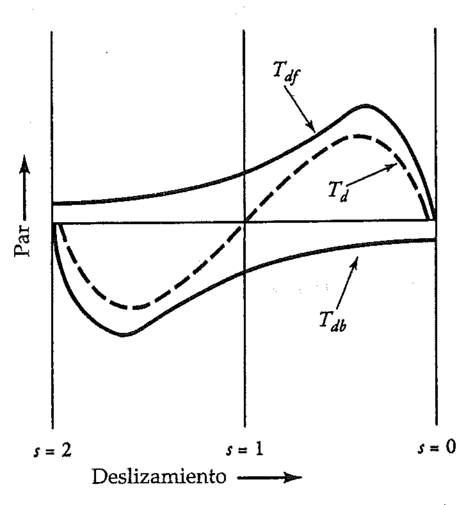


Figura 10.6. Característica velocidad-par de un motor de inducción monofásico.

neralmente para mostrar el par que debe superarse cuando el motor se impele por un impulsor primario en sentido de giro posterior (inverso).

En el ejemplo siguiente se ilustra cómo usar las ecuaciones anteriores para determinar el rendimiento de un motor de inducción monofásico.

Ejemplo 10.2

Un motor de inducción monofásico, tetrapolar, de 120 V, 60 Hz y 1/3 hp tiene los parámetros de circuito siguientes: $R_1 = 2.5\ \Omega$, $X_1 = 1.25\ \Omega$, $R_2 = 3.75\ \Omega$, $X_2 = 1.25\ \Omega$ y $X_m = 65\ \Omega$. El motor funciona con una velocidad de 1 710 rpm y tiene una pérdida en el núcleo de 25 W. La pérdida por fricción y viento es de 2 W. Determine el par en el eje y la eficiencia del motor.

- Solución

$$N_s = \frac{120 \times 60}{4} = 1\,800 \text{ rpm}$$

$$s = \frac{1\,800 - 1\,710}{1\,800} = 0.05$$

$$\hat{Z}_f = \frac{j65[(3.75/0.05) + j1.25]0.5}{(3.75/0.05) + j(1.25 + 65)} = 15.822 + j18.524\ \Omega$$

$$\hat{Z}_b = \frac{j65[(3.75/1.95) + j1.25]0.5}{(3.75/1.95) + j(1.25 + 65)} = 0.925 + j0.64\ \Omega$$

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{in} &= 2.5 + j1.25 + 15.822 + j18.524 + 0.925 + j0.64 \\ &= 19.247 + j20.414\ \Omega\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_1 = \frac{120}{19.247 + j20.414} = 4.277\underline{/-46.69^\circ} \text{ A}$$

$$P_{in} = \text{Re}[120 \times 4.277\underline{/46.69^\circ}] = 352.1 \text{ W}$$

$$\tilde{I}_{2f} = \frac{j65}{(3.75/0.05) + j(1.25 + 65)} 4.277\underline{/-46.69^\circ} = 2.778\underline{/1.86^\circ} \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{2b} = \frac{j65}{(3.75/1.95) + j(1.25 + 65)} 4.277\underline{/-46.69^\circ} = 4.195\underline{/-45.02^\circ} \text{ A}$$

Las potencias en el entrehierro pueden calcularse usando las corrientes en el rotor, como sigue:

$$P_{agf} = 2.778^2 \times 0.5 \times \frac{3.75}{0.05} = 289.4 \text{ W} .$$

$$P_{agb} = 4.195^2 \times 0.5 \times \frac{3.75}{1.95} = 16.9 \text{ W}$$

Las potencias en el entrehierro también pueden determinarse con las ecuaciones 10.12*b* y 10.13*b*, como sigue:

$$P_{agf} = 4.277^2 \times 15.822 = 289.4 \text{ W}$$

y

$$P_{agb} = 4.277^2 \times 0.925 = 16.9 \text{ W}$$

Luego, la potencia neta en el entrehierro es

$$P_{ag} = 289.4 - 16.9 = 272.5\text{W}$$

La potencia bruta desarrollada es

$$P_d = (1 - 0.05) \times 272.5 = 258.9 \text{ W}$$

La potencia neta de salida es

$$P_o = 258.9 - 25 - 2 = 231.9 \text{ W}$$

La eficiencia es: $\eta = \frac{231.9}{352.1} = 0.6586$ o 65.86%

$$\omega_m = \frac{2\pi \times 1710}{60} = 179.071 \text{ rad/s}$$

$$T_s = \frac{231.9}{179.071} = 1.295 \text{ N} \cdot \text{m}$$

■

Ejercicios

10.3. Un motor de inducción monofásico, hexapolar, de 120 V y 60 Hz tiene R_1 = 2.4 Ω, X_1 = 3.6 Ω, R_2 = 1.6 Ω, X_2 = 3.6 Ω y X_m = 75 Ω. Si el deslizamiento del motor a plena carga es de 5%, determine *a)* la velocidad del motor, *b)* la resistencia efectiva del rotor en la rama anterior, *c)* la resistencia efectiva del rotor en la rama posterior, *d)* la impedancia anterior $\hat{Z}_f$, *e)* la impedancia posterior $\hat{Z}_b$, *f)* el par en el eje, y *g)* la eficiencia del motor. Suponga que la pérdida por rotación es de 5% de la potencia desarrollada.

10.4. Un motor de inducción monofásico, tetrapolar, de 110 V y 50 Hz tiene R_1 = 2 Ω, X_1 = 2.8 Ω, R_2 = 3.8 Ω, X_2 = 2.8 Ω y X_m = 60 Ω. La pérdida por rotación es de 20 W. Determine el par en el eje y la eficiencia del motor cuando el deslizamiento es de 4%.

10.4. Tipos de motores de inducción monofásicos

Todo motor de inducción monofásico recibe este nombre por el método que se emplea para permitirle que arranque por sí mismo. Algunos de los motores que analizaremos en esta sección son el *motor de fase dividida*, el de *arranque por condensador*, el de *arranque por condensador y marcha por condensador* y el *motor de condensador con fase dividida permanente*. Otro motor de inducción que se estudia posteriormente en este capítulo es el de *polos sombreados*.

Para que un motor de inducción arranque por sí mismo debe tener al menos dos devanados de fase espaciados en cuadratura y debe excitarse mediante una fuente bifásica, como se detalló en el capítulo 3. Las corrientes en los dos devanados de fase están a 90° eléctricos fuera de fase una respecto de la otra. En un motor monofásico, la colocación de los dos devanados de fase espaciados en cuadratura no representa ningún problema. Sin embargo, la creación artificial de una segunda fase requiere cierta comprensión básica de las redes resistivas, inductivas y capacitivas. A continuación examinaremos cómo se crea la segunda fase en cada tipo de motor de inducción.

Motor de fase dividida

Éste es uno de los motores de inducción más ampliamente utilizado para aplicaciones mecánicas que requieren potencias en fracciones de caballo de fuerza. El motor emplea dos devanados separados que se sitúan espaciados en cuadratura y están conectados en paralelo a una fuente monofásica. Un devanado, que se conoce como *devanado principal*, tiene resistencia baja e inductancia alta. Este devanado conduce corriente y establece el flujo necesario a la velocidad especificada. El segundo devanado, llamado *devanado auxiliar*, tiene resistencia alta e inductancia baja. Este devanado se desconecta del suministro cuando el motor alcanza una velocidad cercana a 75% de su velocidad síncrona. Comúnmente se usa un interruptor centrífugo para desconectar el devanado auxiliar de su suministro a una velocidad predeterminada. La desconexión es necesaria para evitar la pérdida excesiva de potencia en el devanado auxiliar a plena carga.

En el momento del arranque, los dos devanados toman corrientes del suministro. La corriente del devanado principal está en atraso respecto del voltaje aplicado en casi 90° debido a su elevada inductancia (gran número de vueltas) y baja resistencia (gran diámetro del conductor). La corriente en el devanado auxiliar se encuentra esencialmente en fase con el voltaje aplicado debido a su alta resistencia (diámetro pequeño del conductor) y baja inductancia (número reducido de vueltas).

Como puede conjeturarse, la corriente en el devanado principal no está en un atraso exacto de 90°, ni tampoco la corriente en el devanado auxiliar está precisamente en fase con el voltaje aplicado. Además, también las dos corrientes en los devanados de fase podrían no ser iguales en magnitud. En un motor de fase dividida bien diseñado la diferencia de fase entre las dos corrientes podría llegar a ser de 60°. Es de esta acción de *división de fase* que el *motor de fase dividida* recibe su nombre.

Puesto que los dos devanados de fase están arrollados con espaciamiento en cuadratura y conducen corrientes fuera de fase, establecen un campo rotatorio no equilibrado. Es este campo rotatorio, aunque no equilibrado, el que permite que el motor arranque.

El par de arranque desarrollado por un motor de fase dividida es, en general, de 150 a 200% del par a plena carga. La corriente de arranque es aproximadamente de seis a ocho veces la corriente a plena carga. En la figura 10.7 se describe la representación esquemática de un motor de fase dividida, así como su característica típica velocidad-par. Observe la caída del par en el momento en que el devanado auxiliar se desconecta del suministro.

Motor de arranque por condensador

En un motor de arranque por condensador se incluye un condensador en serie con el devanado auxiliar. Si el valor del condensador se elige apropiadamente, es posible diseñar un motor de arranque por condensador de manera que la corriente en el de-

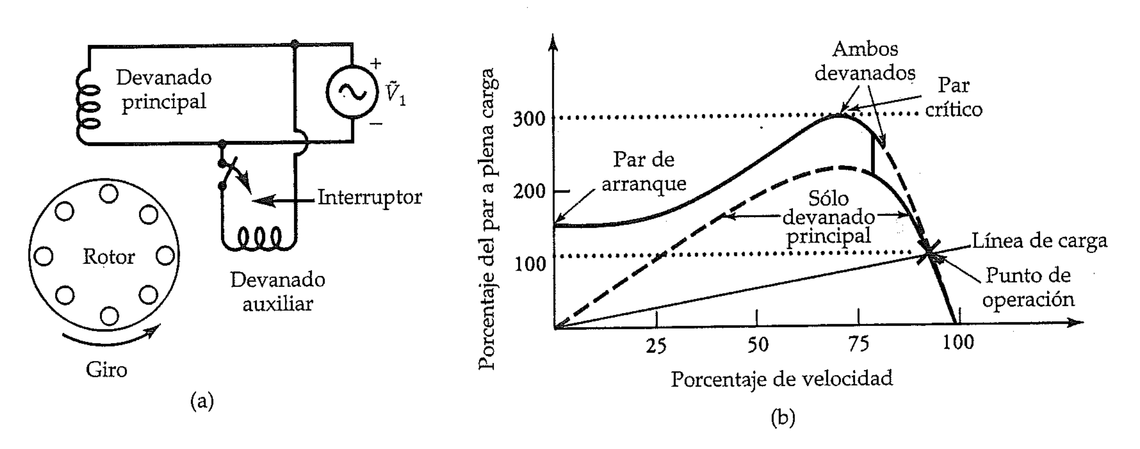


Figura 10.7. (**a**) Representación esquemática y (**b**) característica velocidad-par de un motor de fase dividida.

vanado principal se encuentre en atraso respecto de la corriente en el devanado auxiliar exactamente en 90°. Por tanto, el par de arranque desarrollado por un motor con condensador puede ser tan alto como el de un motor polifásico.

Una vez más, el devanado auxiliar y el condensador se desconectan a 75%, aproximadamente, de la velocidad síncrona. En consecuencia, a la velocidad especificada el motor de arranque por condensador funciona solamente con el devanado principal como un motor de inducción de fase dividida. La necesidad de un condensador externo hace que el motor de inducción de arranque por condensador sea un tanto más caro que un motor de fase dividida. Sin embargo, el motor de arranque por condensador se utiliza cuando los requerimientos de par de arranque son de cuatro a cinco veces el par especificado. Un par de arranque tan elevado queda fuera de las posibilidades de un motor de fase dividida. Como el condensador sólo se usa durante el arranque, su ciclo de servicio es muy intermitente. Por tanto, puede usarse un condensador de tipo electrolítico barato y relativamente pequeño en todos los motores de arranque por condensador. En la figura 10.8 se muestra la representación esquemática de un motor de arranque por condensador y su característica velocidad-par.

Motor de arranque por condensador y marcha por condensador

Aunque los motores de fase dividida y de arranque por condensador están diseñados para satisfacer los requerimientos de la carga especificada, tienen un factor de potencia bajo a la velocidad nominal (especificada). Cuanto más bajo es el factor de potencia, más alta es la potencia de entrada para la misma potencia de salida. Por ende, la eficiencia de un motor monofásico es más baja que la de un motor de inducción polifásico del mismo tamaño. Por ejemplo, la eficiencia de un motor monofásico de arranque por condensador o de uno de fase dividida generalmente es de 50 a 60%, en el rango de potencia en fracciones de caballo de fuerza. Por otro lado, para la misma aplicación, un motor de inducción trifásico puede tener una eficiencia de 70 a 80%.

La eficiencia de un motor de inducción monofásico puede mejorarse con el empleo de otro condensador cuando el motor funciona a la velocidad especificada. Es-

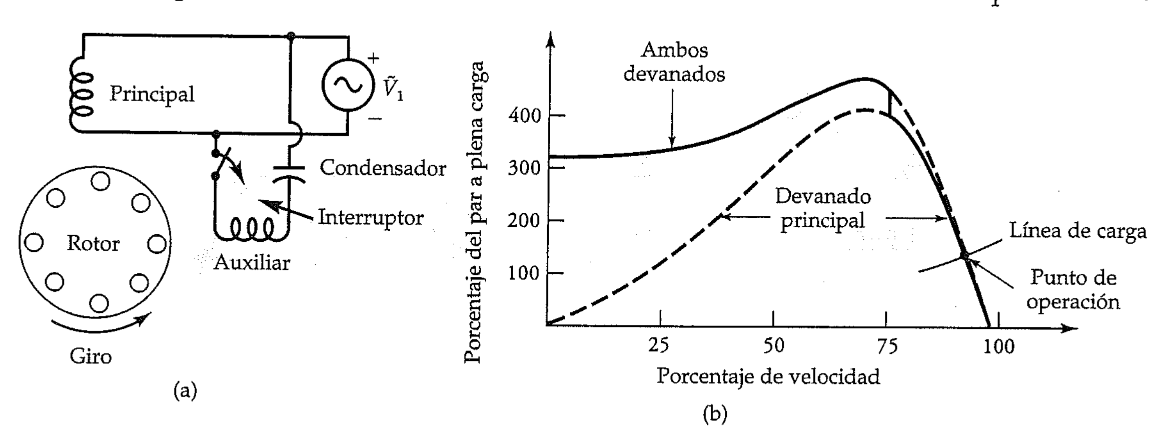


Figura 10.8. (**a**) Representación esquemática y (**b**) característica velocidad-par de un motor de arranque por condensador.

to lleva al desarrollo del motor de arranque por condensador y marcha por condensador (CSCR, *capacitor-start capacitor-run*). Como este motor requiere dos condensadores, también se conoce como motor con condensador de dos valores. Un condensador se selecciona sobre la base de los requerimientos del par de arranque (el condensador de arranque), mientras que el otro se elige para desempeño en funcionamiento (el condensador de marcha). El devanado auxiliar permanece en el circuito siempre, pero el interruptor centrífugo lleva a cabo la conmutación del condensador de arranque al de marcha cuando la velocidad es aproximadamente 75% de la velocidad síncrona. El condensador de arranque es del tipo electrolítico, en tanto que el de marcha es del tipo en aceite para ca y operación continua. Como ambos devanados están activos a la velocidad especificada, el condensador de marcha puede seleccionarse para hacer que las corrientes en los devanados estén realmente en cuadratura una respecto de otra. Por tanto, un motor CSCR funciona como motor bifásico tanto durante el arranque como a su velocidad nominal. Aun cuando un motor CSCR es más caro porque utiliza dos condensadores, tiene una eficiencia relativamente alta a plena carga en comparación con un motor de fase dividida o de arranque por condensador. En la figura 10.9 se muestra la representación esquemática de un motor CSCR y su característica velocidad-par.

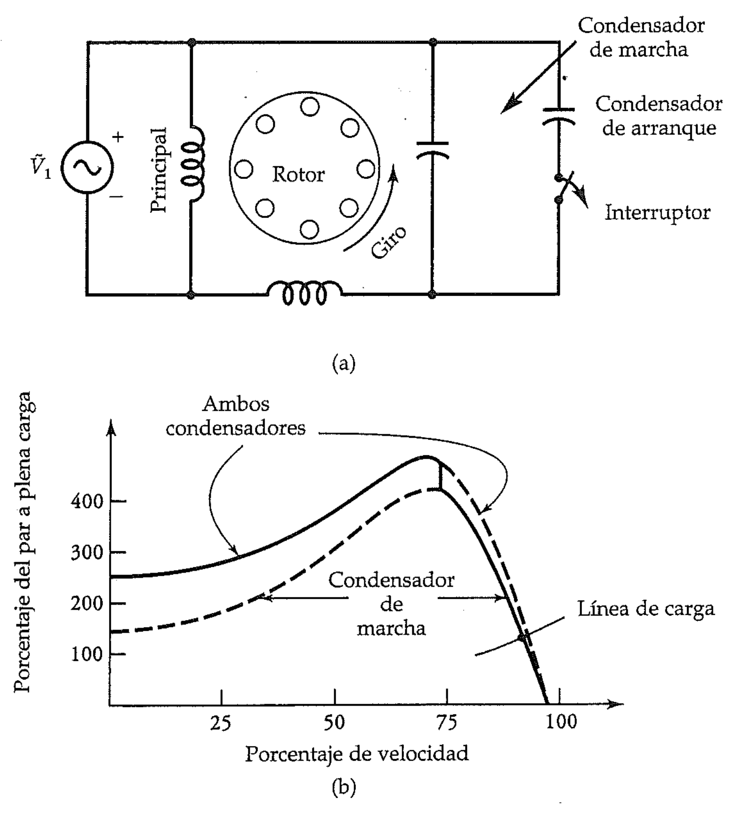


Figura 10.9. (**a**) Representación esquemática y (**b**) característica velocidad-par de un motor de arranque por condensador y marcha por condensador.

Motor de condensador con fase dividida permanente

Una versión menos cara de motor CSCR se llama *motor de condensador con fase dividida permanente* (PSC, *permanent split-capacitor*). Un motor PSC usa el mismo condensador para ambas cargas, de arranque y plena. Puesto que el devanado auxiliar y el condensador permanecen en el circuito en tanto el motor opere, no es necesario un interruptor centrífugo. Por ello, la longitud del motor es menor que en los casos anteriores. El condensador generalmente se elige para obtener eficiencia alta a la velocidad especificada. Como el condensador no está previsto adecuadamente para desarrollar un par de arranque óptimo, el par de arranque de un motor PSC es más pequeño que el de un motor CSCR. Por tanto, los motores PSC son adecuados para utilizarse con ventiladores, con requerimientos mínimos de par de arranque. Estos motores también son buenos para aplicaciones que requieren arranques frecuentes. Otros tipos de motores que se analizaron previamente tienden a sobrecalentarse cuando arrancan con frecuencia, lo cual puede afectar en forma negativa la confiabilidad del sistema. Un motor PSC, al tener

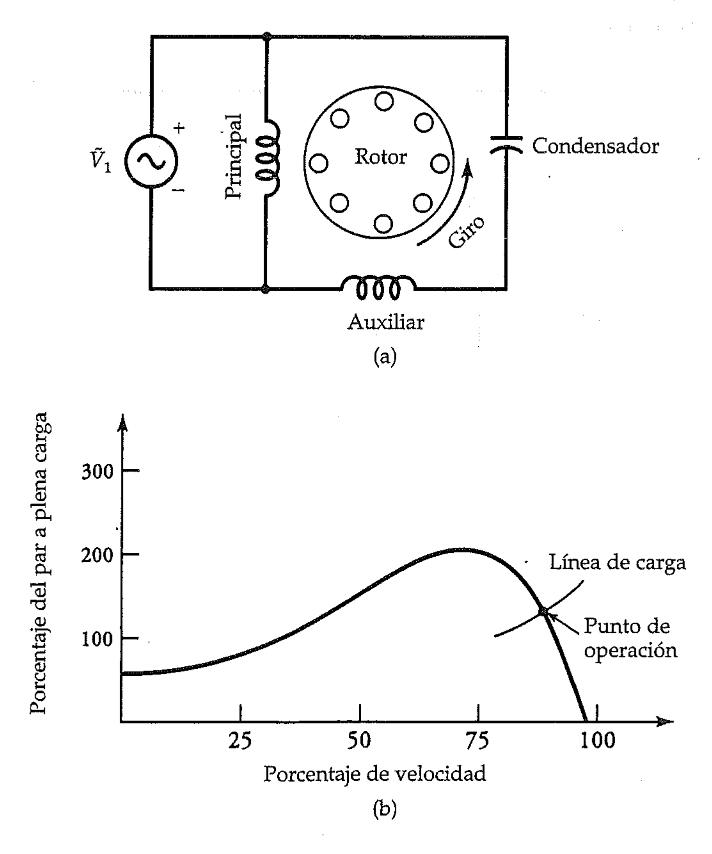


Figura 10.10. (**a**) Representación esquemática y (**b**) característica velocidad-par de un motor de condensador con fase dividida permanente.

menos piezas giratorias, generalmente es más silencioso y tiene alta eficiencia a plena carga. En la figura 10.10 se ilustra la representación esquemática de un motor PSC y su característica velocidad-par.

10.5. Análisis de un motor monofásico utilizando ambos devanados

Ya sabemos cómo determinar el rendimiento de un motor monofásico que sólo funciona con el devanado permanente. Este análisis puede aplicarse para determinar el rendimiento de un motor de inducción de fase dividida o de arranque por condensador a plena carga. Sin embargo, el análisis de un motor monofásico queda incompleto sin conocer su par de arranque. Las preguntas que siguen sin respuesta son las siguientes:

a) ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por un motor de fase dividida o de arranque por condensador?
b) ¿Cuál es la caída de voltaje a través del condensador durante el arranque? ¿Está dentro de los límites permisibles?
c) ¿Cuál es el pico de corriente en el momento que arranca el motor? ¿Ocasiona fluctuaciones severas en la línea?
d) ¿Cómo puede determinarse el rendimiento de un motor que usa ambos devanados en todo momento?
e) ¿Cómo afecta al rendimiento de un motor la conmutación de un condensador de uno a otro valor, antes e inmediatamente después?

Debe ser evidente que estas respuestas no pueden contestarse con base en la información que se obtiene del análisis del devanado único. Por tanto, nuestro estudio debe incluir ambos devanados.

Antes de proseguir, estableceremos algunos supuestos comúnmente aceptados en este campo:

1. Los devanados principal y auxiliar están espaciados entre sí en cuadratura. Este supuesto implica que el flujo que produce un devanado no induce una fem en el otro. En otras palabras, no existe una acción de transformador entre los dos devanados.
2. Si se define la relación a como la razón del número efectivo de vueltas en el devanado auxiliar al número efectivo de vueltas en el devanado principal, resulta que la reactancia de dispersión, la reactancia de magnetización y la resistencia del rotor para el devanado auxiliar pueden definirse en términos de los parámetros del devanado principal y la relación a.
3. Cuando ambos devanados, el principal y el auxiliar, se excitan, producen sus propios campos rotatorios anterior y posterior. En consecuencia, existen cuatro campos rotatorios en un motor monofásico con dos devanados.
4. Cada devanado puede representarse con un circuito equivalente con dos ramas paralelas, una para la rama anterior y la otra para la rama posterior.
5. Un campo rotatorio induce una fem en ambos devanados. En realidad no importa cuál devanado establece el campo rotatorio. En otras palabras, los campos ro-

tatorios anterior y posterior del devanado auxiliar inducen fem en el devanado principal y viceversa. Es común referirse a estas fem inducidas como *voltajes por velocidad*.

6. Se supone que el devanado principal está desplazado hacia delante en el espacio 90° eléctricos respecto al devanado auxiliar. El campo anterior creado por el devanado auxiliar induce una fem en el devanado principal que se atrasa en 90° respecto de la fem inducida por el mismo campo en el devanado auxiliar. Éste es un concepto de suma importancia y debe entenderse con claridad a fin de considerar en forma apropiada las fem inducidas en un devanado por los campos rotatorios del otro devanado.

Los supuestos anteriores permiten representar un motor monofásico de dos devanados con un circuito equivalente como en la figura 10.11, donde

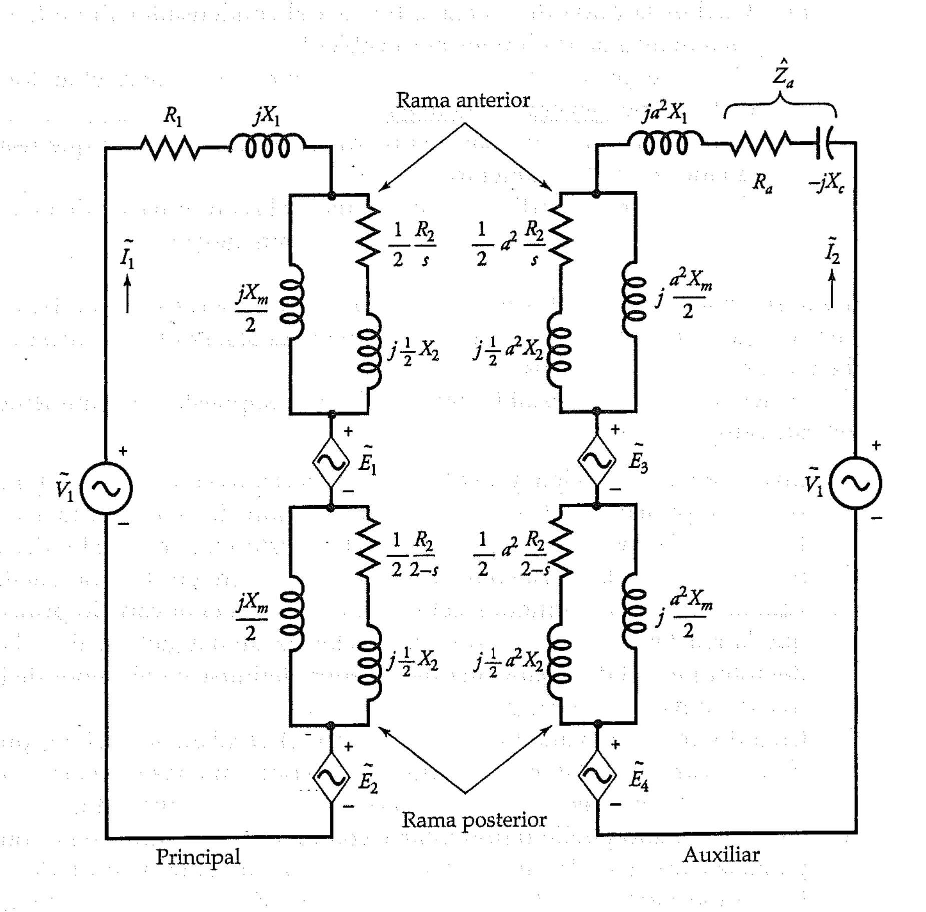


Figura 10.11. Circuito equivalente de un motor PSC.

R_1 = resistencia del devanado principal
X_1 = reactancia de dispersión del devanado principal
a = relación de vueltas efectivas en el devanado auxiliar a las vueltas efectivas en el devanado principal
R_2 = resistencia del rotor referida al devanado principal en reposo
X_2 = reactancia de dispersión del rotor referida al devañado principal
X_m = reactancia de magnetización del motor referida al devanado principal
R_a = resistencia del devanado auxiliar
$\tilde{E}_1$ = fem inducida en la rama anterior del devanado principal por el campo rotatorio anterior del devanado auxiliar
$\tilde{E}_2$ = fem inducida en la rama posterior del devanado principal por el campo rotatorio posterior del devanado auxiliar
$\tilde{E}_3$ = fem inducida en la rama anterior del devanado auxiliar por el campo rotatorio anterior del devanado principal
$\tilde{E}_4$ = fem inducida en la rama posterior del devanado auxiliar por el campo rotatorio posterior del devanado principal

Los demás parámetros del devanado principal se han definido en términos de la relación a. El circuito equivalente mostrado se aplica estrictamente a un motor PSC. Si se desea analizar un motor de fase dividida, sustitúyase la impedancia del condensador, $-jX_c$, por un cortocircuito. Para un motor CSCR, $-jX_c$ tiene dos valores, uno para el condensador de arranque y otro para el condensador de marcha. En resumen,

a) Para un motor de fase dividida

$$\hat{Z}_a = R_a \tag{10.22a}$$

y el devanado auxiliar está en circuito para velocidades por debajo de la velocidad de operación del interruptor centrífugo. Posteriormente el motor opera sólo con el devanado principal.

b) Para un motor de arranque por condensador

$$\hat{Z}_a = R_a - jX_{cs} \tag{10.22b}$$

donde X_{cs} es la reactancia del condensador de arranque. El devanado auxiliar se incluye en el análisis en tanto la velocidad sea inferior a la velocidad de operación del interruptor centrífugo. Después, el motor opera solamente con el devanado principal.

c) Para un motor CSCR,

$$\hat{Z}_a = R_a - jX_{cs} \tag{10.22c}$$

mientras la velocidad del motor esté por debajo de la velocidad de operación del interruptor centrífugo. Posteriormente,

$$\hat{Z}_a = R_a - jX_{cr} \tag{10.22d}$$

donde X_{cr} es la reactancia del condensador de marcha.

d) Para un motor PSC,

$$\hat{Z}_a = R_a - jX_c \tag{10.22e}$$

donde X_c es la reactancia del condensador en el circuito auxiliar. En este caso, ambos devanados están en circuito en todo momento.

Las impedancias anterior y posterior del devanado principal son

$$\hat{Z}_f = R_f + jX_f = 0.5 \frac{jX_m[R_2/s + jX_2]}{R_2/s + j(X_2 + X_m)} \tag{10.23}$$

$$\hat{Z}_b = R_b + jX_b = 0.5 \frac{jX_m[R_2/(2-s) + jX_2]}{R_2/(2-s) + j(X_2 + X_m)} \tag{10.24}$$

En la figura 10.12 se ilustra un circuito equivalente simplificado en términos de $\hat{Z}_f$ y $\hat{Z}_b$ para un motor de inducción monofásico de dos devanados.

Las fem inducidas en el devanado principal por sus campos rotatorios anterior y posterior son

$$\tilde{E}_{fm} = \tilde{I}_1\hat{Z}_f \tag{10.25}$$

$$\tilde{E}_{bm} = \tilde{I}_1\hat{Z}_b \tag{10.26}$$

La fem inducida en el devanado auxiliar por sus campos rotatorios anterior y posterior son

$$\tilde{E}_{fa} = \tilde{I}_2 a^2\hat{Z}_f \tag{10.27}$$

$$\tilde{E}_{ba} = \tilde{I}_2 a^2\hat{Z}_b \tag{10.28}$$

Puesto que el devanado principal está desplazado 90° eléctricos adelante del devanado auxiliar, la fem inducida en el devanado principal por el campo rotatorio anterior del devanado auxiliar debe estar 90° en atraso respecto de la fem inducida en el auxiliar. Además, la fem inducida en el devanado principal debe ser $1/a$ veces la fem inducida en el auxiliar. Es decir,

$$\tilde{E}_1 = -j\frac{1}{a}\tilde{E}_{fa} = -ja\tilde{I}_2\hat{Z}_f \tag{10.29}$$

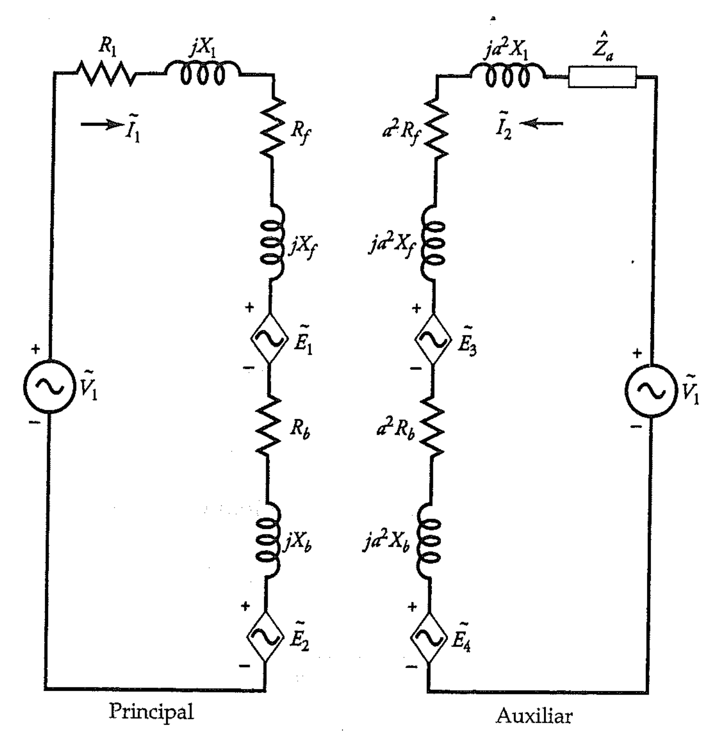


Figura 10.12. Versión simplificada de la figura 10.11.

Por la misma razón, la fem inducida en el devanado principal por el campo rotatorio posterior establecido por el devanado auxiliar debe estar 90° en adelanto respecto de la fem que induce en el devanado auxiliar. Por tanto,

$$\tilde{E}_2 = j\frac{1}{a}\tilde{E}_{ba} = ja\tilde{I}_2\hat{Z}_b \qquad (10.30)$$

De manera semejante, las fem inducidas en las ramas anterior y posterior del devanado auxiliar por los campos rotatorios anterior y posterior del devanado principal son

$$\tilde{E}_3 = ja\tilde{I}_1\hat{Z}_f \qquad (10.31)$$

$$\tilde{E}_4 = -ja\tilde{I}_1\hat{Z}_b \qquad (10.32)$$

Puesto que ya se conocen todas las fem inducidas, al aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff al circuito acoplado se obtiene

$$\tilde{I}_1(R_1 + jX_1) + \tilde{E}_{fm} + \tilde{E}_{bm} + \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = \tilde{V}_1 \qquad (10.33)$$

$$\tilde{I}_2(\hat{Z}_a + ja^2X_1) + \tilde{E}_{fa} + \tilde{E}_{ba} + \tilde{E}_3 + \tilde{E}_4 = \tilde{V}_1 \qquad (10.34)$$

Tras sustituir las fem inducidas es posible expresar las ecuaciones anteriores en forma abreviada como sigue:

$$\tilde{I}_1\hat{Z}_{11} + \tilde{I}_2\hat{Z}_{12} = \tilde{V}_1 \quad (10.35)$$

$$\tilde{I}_1\hat{Z}_{21} + \tilde{I}_2\hat{Z}_{22} = \tilde{V}_1 \quad (10.36)$$

donde

$$\hat{Z}_{11} = R_1 + \hat{Z}_f + \hat{Z}_b + jX_1 \quad (10.37a)$$

$$\hat{Z}_{12} = -ja[\hat{Z}_f - \hat{Z}_b] \quad (10.37b)$$

$$\hat{Z}_{21} = ja[\hat{Z}_f - \hat{Z}_b] \quad (10.37c)$$

$$\hat{Z}_{22} = \hat{Z}_a + a^2[\hat{Z}_f + \hat{Z}_b + jX_1] \quad (10.37d)$$

Las corrientes en los devanados principal y auxiliar son

$$\tilde{I}_1 = \frac{V_1[\hat{Z}_{22} - \hat{Z}_{12}]}{\hat{Z}_{11}\hat{Z}_{22} - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}} \quad (10.38)$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{V_1[\hat{Z}_{11} - \hat{Z}_{21}]}{\hat{Z}_{11}\hat{Z}_{22} - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}} \quad (10.39)$$

La corriente de línea es

$$\tilde{I}_L = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \quad (10.40)$$

La potencia suministrada al motor es

$$P_{in} = \mathrm{Re}[\tilde{V}_1\tilde{I}_L^*] = V_1 I_L \cos\theta \quad (10.41)$$

donde θ es el ángulo del factor de potencia por el cual la corriente de línea está en atraso respecto del voltaje aplicado.

Las pérdidas en el cobre del estator para ambos devanados son

$$P_{scl} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_a \quad (10.42)$$

Al restar las pérdidas en el cobre del estator de la potencia suministrada al motor se obtiene la potencia en el entrehierro, la cual se distribuye entre los cuatro campos rotatorios del motor. También puede obtenerse una expresión para la potencia en el entrehierro del mismo modo que se obtuvo para el motor funcionando solamente con el devanado principal. Sin embargo, ha de tenerse en cuenta la presencia de los voltajes por velocidad y la potencia a ellos asociada. Sobre esta base, la

potencia en el entrehierro desarrollada por el campo rotatorio anterior del devanado principal es

$$P_{agfm} = \text{Re}[(\tilde{E}_{fm} + \tilde{E}_1)\tilde{I}_1^*]$$
$$= \text{Re}[(I_1^2 - ja\tilde{I}_1^*\tilde{I}_2)\hat{Z}_f] \quad (10.43)$$

En forma semejante, la potencia en el entrehierro producida por el campo rotatorio anterior del devanado auxiliar es

$$P_{agfa} = \text{Re}[(\tilde{E}_{fa} + \tilde{E}_3)\tilde{I}_2^*]$$
$$= \text{Re}[(I_2^2 a^2 + ja\tilde{I}_1\tilde{I}_2^*)\hat{Z}_f] \quad (10.44)$$

La potencia neta en el entrehierro debida a ambos campos rotatorios anteriores es

$$P_{agf} = P_{agfm} + P_{agfa}$$
$$= (I_1^2 + a^2 I_2^2)R_f + 2aI_1I_2R_f \text{ sen } \theta \quad (10.45)$$

donde $\tilde{I}_1 = I_1\underline{/\theta_1}$, $\tilde{I}_2 = I_2\underline{/\theta_2}$, y $\theta = \theta_2 - \theta_1$ (10.46)

Por la misma razón la potencia en el entrehierro desarrollada por los campos rotatorios posteriores es

$$P_{agb} = \text{Re}[(\tilde{E}_{bm} + \tilde{E}_2)\tilde{I}_1^* + (\tilde{E}_{ba} + \tilde{E}_4)I_2^*]$$
$$= (I_1^2 + a^2 I_2^2)R_b - 2aI_1I_2R_b \text{ sen } \theta \quad (10.47)$$

Por consiguiente, la potencia neta en el entrehierro desarrollada por el motor es

$$P_{ag} = P_{agf} - P_{agb}$$
$$= (I_1^2 + a^2 I_2^2)(R_f - R_b) + 2a(R_f + R_b)I_2I_2 \text{ sen } \theta \quad (10.48)$$

En reposo (es decir, condición de rotor fijo, o en el momento del arranque) el deslizamiento por unidad del motor es igual a 1. La impedancia del rotor en las ramas anterior y posterior es la misma. La potencia neta en el entrehierro desarrollada por el motor, según la ecuación anterior cuando $R_f = R_b$, es

$$P_{ags} = 4aI_1I_2R_f \text{ sen } \theta \quad (10.49)$$

Observe que la potencia neta desarrollada en el momento del arranque es proporcional al seno del ángulo entre las corrientes en los dos devanados. La potencia

desarrollada es máxima cuando θ es 90°. Para motores de fase dividida, θ puede ser tan pequeño como 30° y tan grande como 60°. Para motores de condensador, θ generalmente se acerca a 90°. Por tal razón, un motor de condensador puede desarrollar un par de arranque mayor que el de un motor de fase dividida del mismo tamaño.

Ejemplo 10.3

Un motor PSC monofásico, hexapolar, de 230 V y 50 Hz tiene velocidad especificada de 940 rpm. Los parámetros del circuito equivalente del motor son $R_1 = 34.14\ \Omega$, $X_1 = 35.9\ \Omega$, $R_a = 149.78\ \Omega$, $X_2 = 29.32\ \Omega$, $X_m = 248.59\ \Omega$, $R_2 = 23.25\ \Omega$, $a = 1.73$ y $c = 4\ \mu F$, especificados a 440 V. La pérdida en el núcleo es de 19.88 W y la pérdida por fricción y viento es de 1.9 W. Determine *a)* la corriente de línea, *b)* la potencia de entrada, *c)* la eficiencia, *d)* el par en el eje, *e)* la caída de voltaje a través del condensador y *f)* el par de arranque.

- **Solución**

$$N_s = \frac{120 \times 50}{6} = 1\,000 \text{ rpm}$$

$$s = \frac{1\,000 - 940}{1\,000} = 0.06 \quad \text{y} \quad s_b = 2 - 0.06 = 1.94$$

$$\omega_m = \frac{2\pi \times 940}{60} = 98.437 \text{ rad/s}$$

$$X_c = \frac{10^6}{2\pi \times 50 \times 4} = 795.78\ \Omega$$

$$\hat{Z}_f = 0.5 \times \frac{j248.59[23.25/0.06 + j29.32]}{23.25/0.06 + j(29.32 + 248.59)} = 52.655 + j86.532\ \Omega$$

$$\hat{Z}_b = 0.5 \times \frac{j248.59[23.25/1.94 + j29.32]}{23.25/1.94 + j(29.32 + 248.59)} = 4.786 + j13.32\ \Omega$$

$$\hat{Z}_{11} = R_1 + jX_1 + \hat{Z}_f + \hat{Z}_b = 91.58 + j135.751\ \Omega$$

$$\hat{Z}_{12} = -ja(\hat{Z}_f - \hat{Z}_b) = 126.657 - j82.813\ \Omega$$

$$\hat{Z}_{21} = -\hat{Z}_{12} = 126.657 - j82.813\ \Omega$$

$$\hat{Z}_{22} = a^2[\hat{Z}_f + \hat{Z}_b + jX_1] + R_a - jX_c = 321.693 - j389.49\ \Omega$$

Al sustituir $\tilde{V}_1 = 230\underline{/0^\circ}$ en las ecuaciones 10.38 y 10.39 se obtiene

$$\tilde{I}_1 = 0.904\underline{/-49.47^\circ} \text{ A}$$

$$\tilde{I}_2 = 0.559\underline{/21.71^\circ} \text{ A}$$

a) Luego, la corriente de línea es: $\tilde{I}_L = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = 1.207\underline{/-23.48°}$ A

b) La potencia de entrada es: $P_{in} = 230 \times 1.207 \times \cos(23.48°) = 254.561$ W

Se calculan las potencias en el entrehierro desarrolladas por los campos anterior y posterior como sigue:

$$P_{agf} = \text{Re}[(\tilde{I}_1\hat{Z}_f - ja\tilde{I}_2\hat{Z}_f)\tilde{I}_1^* + (\tilde{I}_2 a^2\hat{Z}_f + ja\tilde{I}_1\hat{Z}_f)\tilde{I}_2^*] = 179.408 \text{ W}$$

$$P_{agb} = \text{Re}[(\tilde{I}_1\hat{Z}_b + ja\tilde{I}_2\hat{Z}_b)\tilde{I}_1^* + (\tilde{I}_2 a^2\hat{Z}_b - ja\tilde{I}_1\hat{Z}_b)\tilde{I}_2^*] = 0.466 \text{ W}$$

$$P_{ag} = P_{agf} - P_{agb} = 178.942 \text{ W}$$

La potencia desarrollada es: $P_d = (1 - s)P_{ag} = (1 - 0.06)178.942 = 168.206$ W

La potencia de salida es: $P_o = 168.206 - 19.88 - 1.9 = 146.426$ W

c) La eficiencia es: $\eta = \dfrac{146.426}{254.561} = 0.575$ o 57.5% .

d) El par en el eje es: $T_s = \dfrac{P_o}{\omega_m} = \dfrac{146.426}{98.437} = 1.488$ N • m

e) El voltaje en el condensador es: $\tilde{V}_c = -j\tilde{I}_2 X_c = -j(0.559\underline{/21.71°})\, 795.78$

$$= 444.666\underline{/-68.30°} \text{ V}$$

Puesto que la caída de voltaje a través del condensador es mayor que el voltaje nominal normal de 440 V, para operación continua debe utilizarse un condensador con voltaje nominal más alto, o bien rediseñar los devanados.

f) Para el par de arranque, $s = 1$ y $s_b = 1$. Al usar estos valores y seguir los pasos anteriores, se obtiene

$$\hat{Z}_f = \hat{Z}_b = 9.237 + j13.886 \ \Omega$$

$$\hat{Z}_{11} = 52.614 + j63.672 \ \Omega$$

$$\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21} = 0 \ \Omega$$

$$\hat{Z}_{22} = 205.07 - j605.215 \ \Omega$$

De las ecuaciones 10.38 y 10.39, las corrientes en los devanados principal y auxiliar en reposo son

$$\tilde{I}_{1s} = \frac{\tilde{V}_1}{\hat{Z}_{11}} = 2.785\underline{/-50.43°}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_{2s} = \frac{\tilde{V}_1}{\hat{Z}_{22}} = 0.36\underline{/71.28°}\text{ A}$$

$$\tilde{I}_{Ls} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = 2.613\underline{/-43.70°}\text{ A}$$

$$P_{in} = 434.529\text{ W} \qquad P_{agf} = 102.452\text{ W} \qquad P_{agb} = 47.952\text{ W}$$

$$P_{ag} \doteq 54.497\text{ W} \qquad \omega_s = \frac{2\pi \times 1\,000}{60} = 104.72\text{ rad/s}$$

Por tanto, el par de arranque desarrollado es: $T_s = \dfrac{54.497}{104.72} = 0.52\text{ N} \cdot \text{m}$

Observe que el par de arranque es de sólo 1/3 del par a plena carga. Por esta razón, un motor PSC se emplea generalmente en impulsión de ventiladores.

■

Ejercicios

10.5. Un motor monofásico, tetrapolar, de arranque por condensador de 120 V y 60 Hz tiene una impedancia en el devanado principal de $6 + j50\ \Omega$ y una impedancia en el devanado auxiliar de $5 + j25\ \Omega$. La impedancia del rotor en reposo es de $8 + j5\ \Omega$. La reactancia de magnetización es de 150 Ω. Si el condensador de arranque es de 100 μF, determine el par de arranque desarrollado por el motor.

10.6. ¿Cuál es el par desarrollado por el motor del ejercicio 10.5 cuando opera a plena carga con velocidad de 1 575 rpm? Calcule su eficiencia si la pérdida por rotación es de 10 W. Observe que el motor funciona con el devanado principal únicamente a su velocidad especificada.

10.6. Prueba de motores monofásicos

Los métodos para calcular las resistencias de los devanados principal R_1 y auxiliar, R_a, no se explican en esta sección porque puede usarse cualquier método capaz de determinar con exactitud las resistencias de esos devanados. Los demás parámetros del circuito equivalente de un motor de inducción monofásico pueden determinarse llevando a cabo la prueba de rotor fijo y la prueba sin carga.

Prueba de rotor fijo

La prueba de rotor fijo se efectúa con el rotor sostenido en reposo y excitando un devanado a la vez mientras el otro se deja abierto. En la figura 10.13 se muestra la disposición para la prueba con el devanado auxiliar abierto. La prueba se lleva a cabo ajustando el voltaje aplicado hasta que el devanado principal conduzca la corriente especificada. Como el deslizamiento en estado de reposo y en una u otra dirección es igual a la unidad, la impedancia del circuito del rotor generalmente es mucho más pequeña que la reactancia de magnetización. Por tanto, para la prueba de rotor fijo puede usarse el circuito equivalente aproximado del devanado principal sin la reactancia de magnetización, como se ilustra en la figura 10.14.

a) Devanado auxiliar abierto
Sean V_{bm}, I_{bm} y P_{bm} los valores medidos del voltaje aplicado, la corriente en el devanado principal y la potencia suministrada al motor en condición de rotor fijo. La magnitud de la impedancia de entrada es

$$Z_{bm} = \frac{V_{bm}}{I_{bm}} \tag{10.50}$$

La resistencia total del circuito es

$$R_{bm} = \frac{P_{bm}}{I_{bm}^2} \tag{10.51}$$

Luego, la reactancia total es

$$X_{bm} = \sqrt{Z_{bm}^2 - R_{bm}^2} \tag{10.52}$$

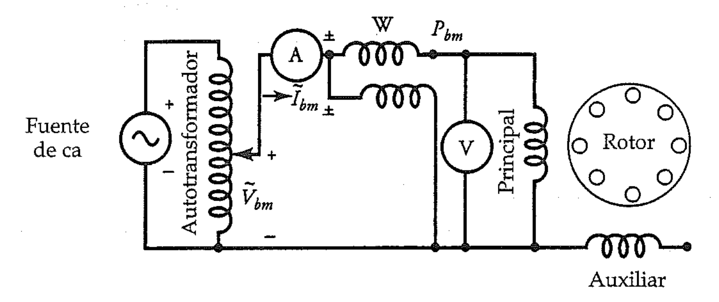


Figura 10.13. Montaje experimental para la prueba de rotor fijo con el devanado auxiliar abierto.

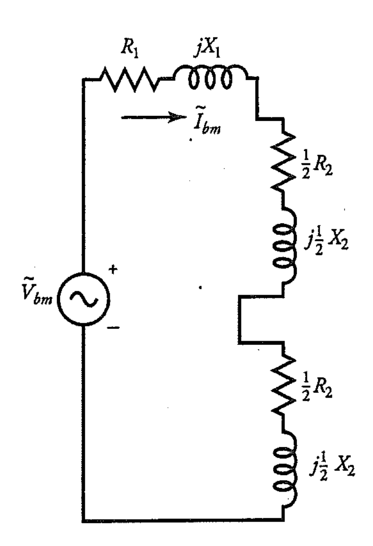


Figura 10.14. Circuito equivalente aproximado visto desde el devanado principal en condición de rotor fijo.

Del circuito equivalente aproximado (fig. 10.14) se tiene que

$$R_{bm} = R_1 + R_2 \tag{10.53}$$

y

$$X_{bm} = X_1 + X_2 \tag{10.54}$$

Puesto que la resistencia del devanado principal es conocida, según la ecuación 10.53 la resistencia del rotor en reposo es

$$R_2 = R_{bm} - R_1 \tag{10.55}$$

Para separar las reactancias de dispersión del devanado principal y del rotor, nuevamente se presupone que son iguales. Es decir,

$$X_1 = X_2 = 0.5X_{bm} \tag{10.56}$$

b) Devanado principal abierto

También puede efectuarse la prueba de rotor fijo excitando el devanado auxiliar con el devanado principal abierto. Sean P_{ba}, V_{ba} e I_{ba} la potencia de entrada, el voltaje aplicado y la corriente en el devanado auxiliar cuando el rotor

está en reposo. La resistencia total del devanado auxiliar puede calcularse como sigue:

$$R_{ba} = \frac{P_{ba}}{I_{ba}^2} \tag{10.57}$$

Puesto que la resistencia del devanado del rotor ya se conoce, es posible calcular la resistencia del rotor referida al devanado auxiliar como sigue:

$$R_{2a} = R_{ba} - R_a \tag{10.58}$$

En seguida se determina la relación a de vueltas efectivas en el devanado auxiliar al devanado principal mediante la raíz cuadrada de la razón de la resistencia del rotor visto desde el devanado auxiliar al valor de la resistencia del rotor visto desde el devanado principal. Por tanto,

$$a = \sqrt{\frac{R_{2a}}{R_2}} \tag{10.59}$$

Prueba sin carga con el devanado auxiliar abierto

En el motor de inducción trifásico que opera sin carga, se desprecia la pérdida en el cobre en el circuito del rotor porque se presupuso muy pequeña. En realidad, se consideró la rama del rotor como un circuito abierto debido a su muy bajo deslizamiento al trabajar sin carga. En un motor monofásico que trabaja solamente con el devanado principal, el deslizamiento sin carga es considerablemente mayor que el de un motor trifásico. Si aún así se supusiera que el deslizamiento sin carga es casi igual a cero y se reemplazara el circuito del rotor de la rama anterior por un circuito abierto sin carga, el error producido en los cálculos de los parámetros del rotor con base en esta prueba sería un tanto mayor que el cometido para un motor trifásico. Sin embargo, hacer tal supuesto simplifica el circuito equivalente del devanado principal en condición sin carga, con el devanado auxiliar abierto. En la figura 10.15 se ilustra un circuito equivalente de esta naturaleza.

Sean V_{nL}, I_{nL} y P_{nL} los valores medidos del voltaje aplicado, la corriente y la potencia de entrada del motor en condición sin carga. Por tanto, la impedancia sin carga es

$$Z_{nL} = \frac{V_{nL}}{I_{nL}} \tag{10.60}$$

La resistencia equivalente sin carga es

$$R_{nL} = \frac{P_{nL}}{I_{nL}^2} \tag{10.61}$$

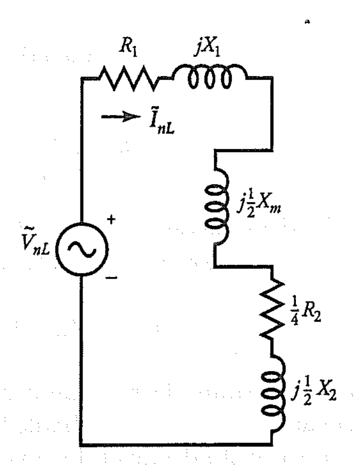


Figura 10.15. Circuito equivalente aproximado referido al devanado principal en condición sin carga ($s = 0$).

Luego, la reactancia sin carga es

$$X_{nL} = \sqrt{Z_{nL}^2 - R_{nL}^2} \tag{10.62}$$

Sin embargo, con base en el circuito equivalente (fig. 10.15) se tiene que

$$X_{nL} = X_1 + 0.5X_m + 0.5X_2$$

Puesto que

$$X_1 = X_2 = 0.5X_{bm}$$

$$X_1 + 0.5X_2 = 0.75X_{bm}$$

Así, con base en la ecuación 10.62, la reactancia de magnetización es

$$X_m = 2X_{nL} - 1.5X_{bm} \tag{10.63}$$

Finalmente, la pérdida por rotación es

$$P_r = P_{nL} - I_{nL}^2(R_1 + 0.25R_2) \tag{10.64}$$

Ahora se conocen todos los parámetros de un motor de inducción monofásico. Utilizándolos puede calcularse el par desarrollado, la potencia de entrada, la potencia de salida, las corrientes en los devanados, la corriente de línea y la eficiencia del motor con cualquier deslizamiento.

Ejemplo 10.4

Se prueba un motor de inducción monofásico, de fase dividida, que trabaja a 115 V y 60 Hz, y se obtienen los datos siguientes.

	Voltaje (V)	*Corriente (A)*	*Potencia (W)*
Con el devanado auxiliar abierto			
Prueba sin carga	115	3.2	55.17
Prueba de rotor fijo	25	3.72	86.23
Con el devanado principal abierto			
Prueba de rotor fijo	121	1.21	145.35

La resistencia del devanado principal es de 2.5 Ω y la del devanado auxiliar de 100 Ω. Calcule los parámetros del circuito equivalente del motor.

- **Solución**

De la prueba de rotor fijo en el devanado principal y con el devanado auxiliar abierto se obtiene

$$Z_{bm} = \frac{25}{3.72} = 6.72\ \Omega$$

$$R_{bm} = \frac{86.23}{3.72^2} = 6.23\ \Omega$$

$$X_{bm} = \sqrt{6.72^2 - 6.23^2} = 2.52\ \Omega$$

Por tanto,

$$X_1 = X_2 = 0.5 \times 2.52 = 1.26\ \Omega$$

y

$$R_2 = 6.23 - 2.5 = 3.73\ \Omega$$

De los datos de la prueba sin carga en el devanado principal y con el devanado auxiliar abierto se tiene que

$$Z_{nL} = \frac{115}{3.2} = 35.94\ \Omega$$

$$R_{nL} = \frac{55.17}{3.2^2} = 5.39\ \Omega$$

$$X_{nL} = \sqrt{35.94^2 - 5.39^2} = 35.53\ \Omega$$

Por tanto,

$$X_m = 2 \times 35.53 - 0.75 \times 2.52 = 69.17\ \Omega$$

y

$$P_r = 55.17 - 3.2^2(2.5 + 0.25 \times 3.73) \approx 20\ \text{W}$$

De la prueba de rotor fijo en el devanado auxiliar con el devanado principal abierto se obtiene

$$Z_{ba} = \frac{121}{1.2} = 100.83\ \Omega$$

$$R_{ba} = \frac{145.35}{1.2^2} = 100.94\ \Omega$$

$$R_{2a} = 100.94 - 100 = 0.94\ \Omega$$

Finalmente, la relación a es

$$a = \sqrt{\frac{0.94}{3.73}} = 0.5$$

■

Ejercicios

10.7. Se prueba un motor CSCR monofásico, de 230 V y 60 Hz, y se obtienen los datos siguientes.

	Voltaje (V)	*Corriente (A)*	*Potencia (W)*
Con el devanado auxiliar abierto			
Prueba sin carga	230	2.2	63.1
Prueba de rotor fijo	120	8.22	743.1
Con el devanado principal abierto			
Prueba de rotor fijo	201	2.08	309.7

La resistencia del devanado principal es de 6 Ω y la del auxiliar de 38 Ω. Calcule los parámetros del circuito equivalente del motor.

10.8. Se prueba un motor PSC de la puerta de una cochera; el motor es de 230 V, 60 Hz, reversible, con el devanado auxiliar abierto, como se describe a continuación:
Prueba de rotor fijo: 230 V, 2.16 A, 406.84 W
Prueba sin carga: 230 V, 1.45 A, 138.52 W
Puesto que para un motor reversible los dos devanados son idénticos, la relación a es igual a 1 y la resistencia de cada devanado es de 42.4 Ω. Determine los parámetros del circuito equivalente del motor.

10.7. Motor de polos sombreados

Cuando el devanado auxiliar de un motor de inducción monofásico toma la forma de anillo de cobre se llama *motor de polos sombreados*. Es muy frecuente que un motor

de polos sombreados tenga una construcción de polos salientes, similar al estator de una máquina de cc. Sin embargo, el polo siempre está laminado para minimizar la pérdida en el cobre; además, está dividido físicamente en dos secciones. Un anillo de cobre, pesado, en cortocircuito, llamado *bobina de sombreado,* se coloca alrededor de la sección más pequeña, como se muestra en la figura 10.16. Generalmente, esta sección cubre un tercio del arco polar y se llama *parte sombreada* del polo. La sección más grande recibe el nombre, lógicamente, de *parte no sombreada.* El devanado principal rodea por completo al polo, como se muestra en la figura. El rotor se fabrica por fundición a presión, igual que el rotor de cualquier otro motor de inducción monofásico.

Tal como el lector puede haber interpretado, un motor de polos sombreados es de construcción muy sencilla y es el menos caro para aplicaciones que requieren fracciones de caballo de fuerza. Como no necesita un interruptor centrífugo, no sólo es silencioso sino también de operación muy confiable. Para mantener bajo su costo, el motor de polos sombreados opera generalmente en la región de saturación magnética. Ésta es una de las razones por las que su eficiencia es baja en comparación con la de otros tipos de motores de inducción. Estos motores desarrollan un par de arranque bajo y son apropiados para impulsión de ventiladores. Los motores de polos sombreados generalmente se construyen para satisfacer requerimientos de carga de hasta 1/3 de caballo de fuerza.

Principio de operación

Ahora examinaremos cómo la bobina de sombreado ayuda al motor de polos sombreados a establecer el campo rotatorio. Para hacerlo, se consideran cambios en el flujo que produce el devanado principal en tres intervalos de tiempo:

a) Cuando el flujo se incrementa desde cero hasta el máximo
b) Cuando el flujo casi alcanza su máximo
c) Cuando el flujo disminuye de su máximo hasta cero

Cualquier cambio en el flujo en cada polo del motor es responsable de una fem inducida en la bobina de sombreado, de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. Como la bobina de sombreado forma un lazo cerrado que tiene una resistencia muy

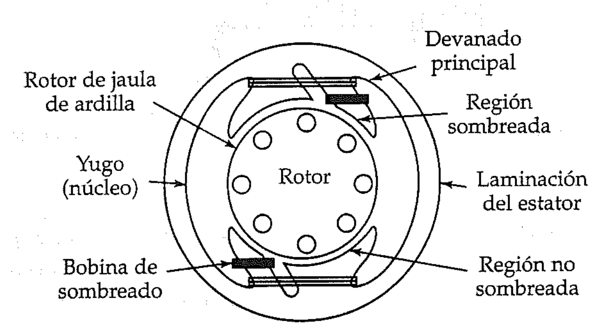


Figura 10.16. Motor de polos sombreados.

pequeña, se induce una corriente grande en la bobina de sombreado. La dirección de la corriente es tal que siempre crea un campo magnético que se opone al cambio del flujo en la región sombreada del polo. Con esto en mente, analicemos el efecto de las bobinas de sombreado durante los intervalos de tiempo mencionados con anterioridad.

Intervalo a. En este intervalo de tiempo el flujo en el polo se está incrementando y, por tanto, también la corriente en la bobina de sombreado. La bobina de sombreado produce un flujo que se opone al aumento al flujo que enlaza la bobina. Como resultado, la mayor parte del flujo fluye —valga la expresión— a través de la parte no sombreada del polo, como se muestra en la figura 10.17. El eje magnético del flujo es, por ende, el centro de la sección no sombreada del polo.

Intervalo b. Durante este intervalo de tiempo el flujo magnético en el polo está cerca de su valor máximo. Por tanto, la tasa de cambio del flujo es casi cero. En consecuencia, la fem inducida y la corriente en la bobina de sombreado son iguales a cero. Como resultado, el flujo se distribuye de manera uniforme a través de todo el polo. Por ende, el eje magnético se mueve hacia el centro del polo. Este cambio en el eje magnético tiene el mismo efecto que el movimiento físico (giro) del polo.

Intervalo c. Durante este lapso el flujo magnético producido por el devanado principal comienza a disminuir. La corriente inducida en la bobina de sombreado invierte su dirección a fin de oponerse a la disminución del flujo. En otras palabras, la bobina de sombreado produce el flujo que tiende a impedir la disminución del flujo producido por el devanado principal. Como resultado, la mayor parte del flujo queda confinado en la región sombreada del polo. El eje magnético del flujo ahora se ha movido hacia el centro de la región sombreada.

Observe que sin la bobina de sombreado, el centro del eje magnético siempre estaría en el centro del polo. La presencia de la bobina de sombreado obliga al flujo a desplazar su eje magnético de la región no sombreada a la sombreada. El desplazamiento es gradual y tiene el efecto de polos magnéticos rotatorios. En otras palabras, el campo magnético gira de la parte no sombreada del motor hacia la parte sombreada.

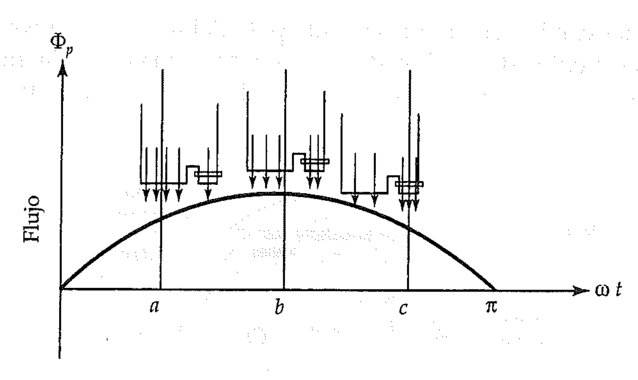


Figura 10.17. Acción de sombreado del polo durante la mitad positiva del ciclo de una onda del flujo. *a*, $\omega t < \pi/2$: casi todo el flujo pasa a través de la región no sombreada; *b*, $\omega t = \pi/2$: no hay acción de sombreado, el flujo está distribuido uniformemente en todo el polo; *c*, $\omega t > \pi/2$: la mayor parte del flujo pasa a través de la región sombreada.

Sin embargo, el campo rotatorio no es continuo ni uniforme. En consecuencia, el par desarrollado por el motor no es uniforme pero varía de un instante a otro.

Como el rotor sigue al campo rotatorio, el sentido de giro de un motor de polos sombreados no puede invertirse una vez que el motor se ha construido. Para tener un motor reversible deben colocarse dos bobinas de sombreado en ambos lados del polo y *cortocircuitar* selectivamente una de ellas.

Para incrementar el par de arranque, la arista en adelanto en el polo del motor de polos sombreados puede tener un entrehierro más amplio que el resto del polo. Se ha detectado que si parte de la cara polar tiene un entrehierro más amplio que el resto del polo, el motor desarrolla cierto par de arranque sin el devanado auxiliar. Un motor así se llama *motor de arranque por reluctancia*. El hecho de agregar la característica de reluctancia a un motor de polos sombreados incrementa su par de arranque. Esta característica se emplea comúnmente en el diseño de motores de polos sombreados.

En la figura 10.18 se ilustra la característica típica velocidad-par de un motor de polos sombreados. Veamos con atención esa curva. Muestra claramente una de las desventajas importantes de un motor de polos sombreados: la caída por tercera armónica. Para cancelar parte del efecto de la tercera armónica puede usarse un rotor de resistencia relativamente alta. Sin embargo, cualquier aumento en la resistencia del rotor va acompañado no sólo de una disminución en la velocidad de operación del motor, sino también de una disminución de su eficiencia.

El análisis de un motor de polos sombreados es muy profundo y rebasa el objetivo del libro. Sin embargo, los lectores interesados en conocer más pueden consultar el artículo "Revolving-Field Analysis of a Shaded-Pole Motor", de Bhag S. Guru, publicado por el IEEE en *Power Apparatus and Systems* (vol. 102, núm. 4, págs. 918-927, abril de 1983). Ese artículo proporciona *a*) el desarrollo teórico completo que incluye el análisis de armónicas y la colocación fuera de cuadratura de la bobina de sombreado respecto al devanado principal, *b*) todas las ecuaciones de diseño necesarias, *c*) un procedimiento paso a paso para desarrollar un programa de cómputo que analice o diseñe un motor de polos sombreados, y *d*) una amplia lista de las publicaciones principales sobre el tema.

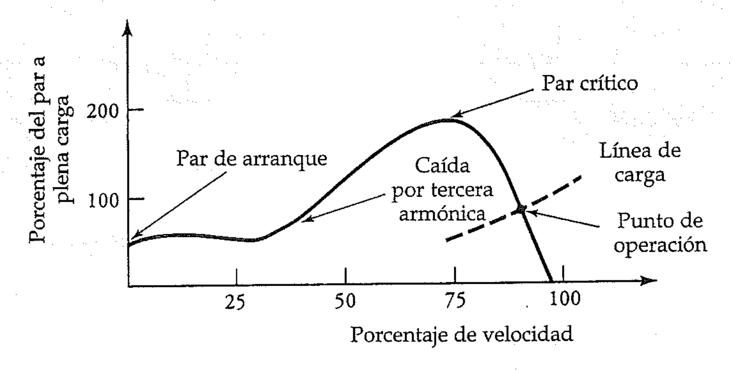


Figura 10.18. Característica velocidad-par de un motor de polos sombreados.

10.8. El motor universal

Un motor serie de cc diseñado específicamente para la operación con ca se conoce como *motor universal.* Un motor universal se devana y conecta exactamente igual que un motor serie de cc. Es decir, el devanado de campo se conecta en serie con el devanado de la armadura. Sin embargo, es necesario hacer algunas modificaciones para transformar un motor serie de cc en un motor universal. Estas modificaciones se estudian más adelante. Primero se explorará cómo puede operar un motor serie de cc con una fuente de ca.

Principio de operación

Cuando un motor serie se opera con una fuente de cc, la corriente es unidireccional en ambos devanados, el del campo y el de la armadura. Por tanto, el flujo producido por cada polo y la dirección de la corriente en los conductores de la armadura bajo ese polo permanecen siempre en la misma dirección. Luego, el par desarrollado por el motor es constante.

Cuando un motor serie se conecta a una fuente de ca, la corriente en el campo y en los devanados de la armadura invierte su dirección cada medio ciclo, como se muestra en la figura 10.19 para un motor serie bipolar.

Durante la mitad positiva del ciclo (fig. 10.19*a*), el flujo producido por el devanado del campo va de derecha a izquierda. Para la dirección marcada de la corriente en los conductores de la armadura, el motor desarrolla un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Durante la mitad negativa del ciclo (fig. 10.19*b*), el voltaje aplicado ha invertido su polaridad. En consecuencia, la corriente ha invertido su dirección. Como resultado, el flujo producido por los polos está dirigido ahora de iz-

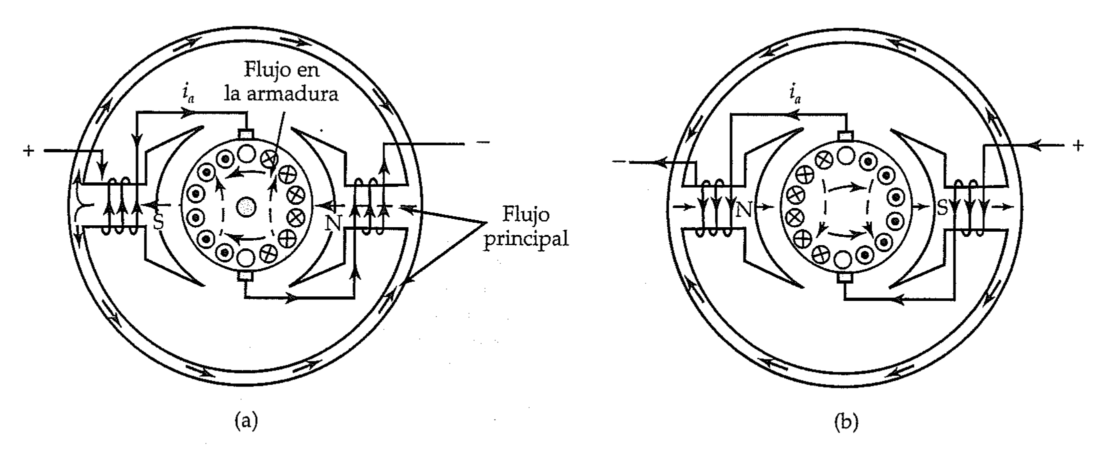


Figura 10.19. Direcciones de corriente y de flujo en un motor universal durante las mitades (**a**) positiva y (**b**) negativa de los ciclos.

quierda a derecha. Como la inversión de la corriente en los conductores de la armadura también está acompañado por la inversión de la dirección del flujo en el motor, la dirección del par desarrollado por el motor permanece sin cambio. Así, el motor continúa su giro en el sentido de las manecillas del reloj.

Si K_a es la constante de la máquina, i_a es la corriente a través de los devanados del campo y la armadura en cualquier instante, y Φ_p es el flujo por polo en ese instante, el par instantáneo desarrollado por el motor es $K_a i_a \Phi_p$. Cuando el motor funciona en la región lineal (por debajo del punto de inflexión de la curva de magnetización), el flujo Φ_p debe ser proporcional a la corriente del campo i_a. Cuando la permeabilidad del núcleo magnético es relativamente alta, la presencia de entrehierros asegura que para todo fin práctico el flujo Φ_p está en fase con la corriente i_a. Por tanto, el par instantáneo desarrollado por el motor es proporcional al cuadrado de la corriente de la armadura, como se muestra en la figura 10.20. En otras palabras, el valor promedio del par desarrollado es proporcional al valor medio cuadrático (rms) de la corriente. De la figura 10.20 resulta obvio que el par desarrollado por el motor universal varía con el doble de la frecuencia de la fuente de ca. Tales pulsaciones en el par ocasionan vibraciones y hacen que el motor sea ruidoso.

En la figura 10.21 se muestra el circuito equivalente, el diagrama fasorial y las características velocidad-par de un motor universal. La fuerza contraelectromotriz E_a, la corriente en el devanado I_a y el flujo por polo Φ_p, están en fase uno con otro, como se ilustra. R_s y X_s son la resistencia y la reactancia del devanado del campo en serie. R_a y X_a son la resistencia y la reactancia del devanado de la armadura.

Consideraciones de diseño

1. Cuando un motor serie va a diseñarse como motor universal, sus polos y yugo deben laminarse con objeto de minimizar la pérdida en el núcleo producida en ellos por el flujo alterno. Si se conecta un motor serie con estator no laminado a un suministro de ca, se sobrecalienta rápidamente debido a la pérdida excesiva en el núcleo.

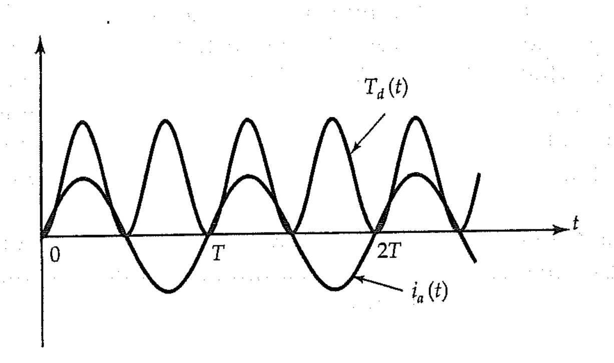


Figura 10.20. Corriente y par desarrollados por un motor universal.

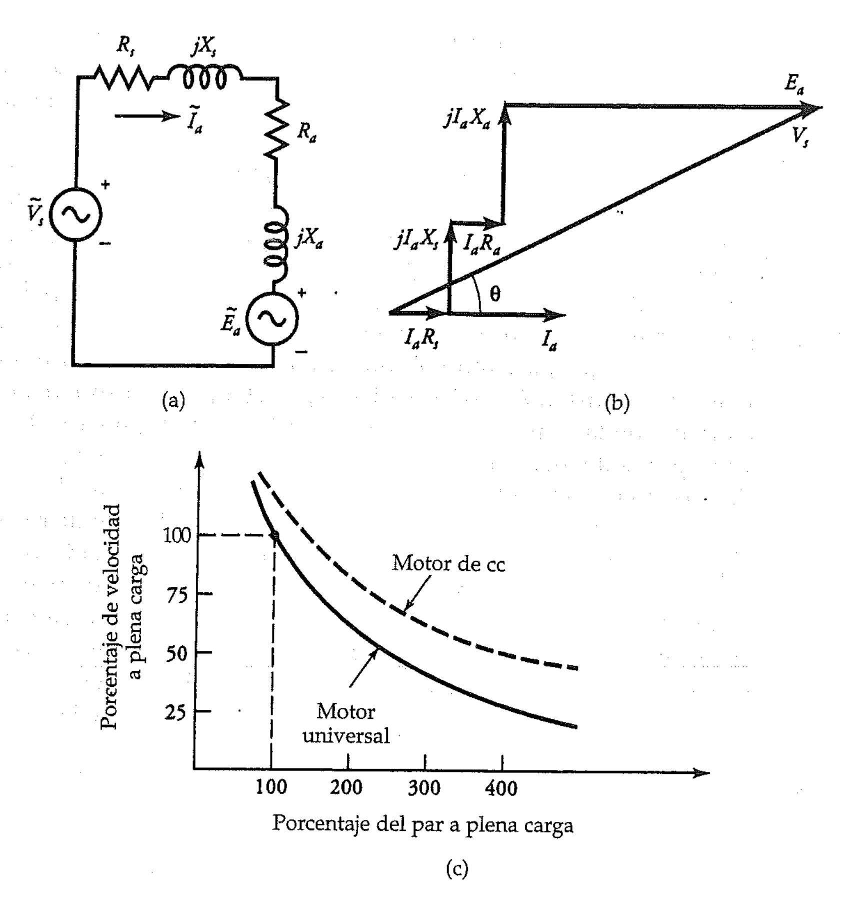


Figura 10.21. (a) Circuito equivalente de un motor universal, **(b)** diagrama fasorial, y **(c)** característica velocidad-par típica.

2. En un motor serie de cc en condiciones estables de operación, las inductancias de los devanados del campo en serie y de la armadura tienen poco efecto en su rendimiento. Sin embargo, el motor exhibe caídas de voltaje reactivo a través de estas inductancias cuando se conecta a una fuente de ca. Las altas caídas de voltaje reactivo tienen un efecto doble: *a*) reducen la corriente en el circuito para el mismo voltaje aplicado y *b*) disminuyen el factor de potencia del motor. La caída de voltaje reactivo a través del devanado del campo en serie se hace pequeña si se usa escaso número de vueltas en el campo en serie.
3. La disminución del número de vueltas en el devanado del campo en serie reduce el flujo en el motor. Esta pérdida en el flujo se compensa por el incremento en el número de conductores de la armadura.
4. El incremento en los conductores de la armadura ocasiona un aumento en la reacción de la armadura. Sin embargo, tal reacción puede reducirse agregando deva-

nados compensadores en el motor. En la figura 10.22*a* se muestra un motor universal con devanado compensador acoplado conductivamente. En el diagrama fasorial correspondiente (fig. 10.22*b*) se observa la mejoría en el factor de potencia.

5. En operación con ca, se induce una fem por la acción del transformador en las bobinas que entran en conmutación. Esta fem inducida *a*) ocasiona chispas adicionales en las escobillas, *b*) reduce la vida de las escobillas, y *c*) provoca más desgaste y destrucción del conmutador. Para reducir estos efectos dañinos, en los motores universales se incrementa el número de segmentos del conmutador y se utilizan escobillas de alta resistencia.

Surge una pregunta lógica: con todas estas desventajas, ¿por qué usar un motor universal? A continuación se enuncian algunas razones:

1. Es necesario un motor universal cuando se requiere operar con satisfacción total con suministro de cc y ca.
2. El motor universal satisface los requerimientos cuando se necesita operar en un suministro de ca a una velocidad superior a 3 600 rpm (motor de inducción bipolar operando a 60 Hz). Como la potencia desarrollada es proporcional a la velocidad del motor, un motor de alta velocidad desarrolla más potencia para el mismo tamaño que un motor de baja velocidad.
3. El motor universal es el apropiado cuando se necesita un motor que ajuste su velocidad en forma automática en condiciones de carga. Su velocidad es alta cuando la carga es ligera y baja cuando la carga es pesada.

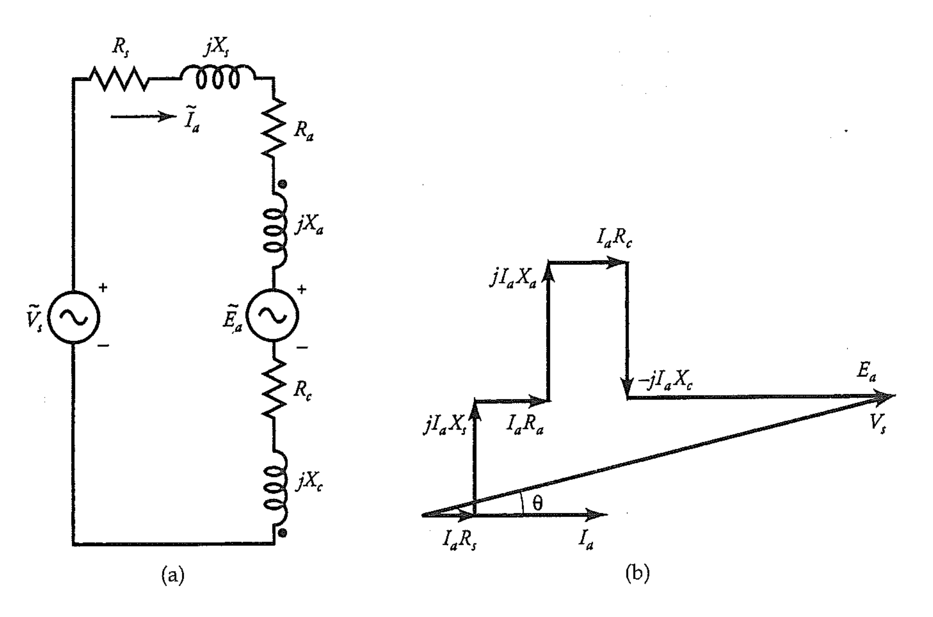


Figura 10.22. (a) Circuito equivalente y **(b)** diagrama fasorial para un motor universal compensado conductivamente.

A la luz de las razones anteriores, un motor universal se usa con mucha frecuencia en el rango de fracciones de caballo de fuerza. Algunas aplicaciones que requieren variación en la velocidad con carga son sierras y rebajadoras, máquinas de coser, máquinas-herramienta portátiles y aspiradoras.

Ejemplo 10.5

Un motor universal, bipolar, de 120 V y 60 Hz opera a una velocidad de 8 000 rpm a plena carga y toma una corriente de 17.58 A con un factor de potencia de 0.912 en atraso. La impedancia del devanado del campo en serie es de 0.65 + *j*1.2 Ω. La impedancia del devanado de la armadura es 1.36 + *j*1.6 Ω. Determine *a*) la fem inducida en la armadura, *b*) la potencia de salida, *c*) el par en el eje, y *d*) la eficiencia, si la pérdida por rotación es de 80 W.

- **Solución**

a) Con base en el circuito equivalente del motor (fig. 10.21*b*), se tiene que

$$\tilde{E}_a = \tilde{V}_s - \tilde{I}_a(R_s + R_a + jX_s + jX_a)$$
$$= 120 - 17.58\underline{/-24.22^\circ}\,[0.65 + 1.36 + j(1.2 + 1.6)]$$
$$= 74.1\underline{/-24.22^\circ}\text{V}$$

Como cabía esperar, la fem inducida está en fase con la corriente de la armadura.

b) La potencia desarrollada por el motor es

$$P_d = \text{Re}[\tilde{E}_a\tilde{I}_a^*] = 74.1 \times 17.58 = 1\,302.68 \text{ W}$$

La potencia de salida es: $P_o = P_d - P_{rot} = 1\,302.68 - 80 = 1\,222.68$ W

c) Con base en la velocidad especificada del motor se obtiene

$$\omega_m = \frac{2\pi \times 8\,000}{60} = 837.76 \text{ rad/s}$$

Luego, el par en el eje es $T_s = 1\,222.68/837.76 = 1.46$ N • m

d) La potencia de entrada es

$$P_{in} = 120 \times 17.58 \times 0.912 = 1\,923.96 \text{ W}$$

La eficiencia es: $\eta = 1\,222.68/1\,923.96 = 0.636$ o 63.6%

■

Ejercicios

10.9. Un motor universal bipolar de 240 V y 50 Hz opera a una velocidad de 12 000 rpm a plena carga y toma una corriente de 6.5 A con un factor de potencia de 0.94 en atraso. Los parámetros del motor son $R_a = 6.15\ \Omega$, $X_a = 9.4\ \Omega$, $R_s = 4.55\ \Omega$ y $X_s = 3.2\ \Omega$. Calcule *a*) la fem inducida del motor, *b*) el par en el eje, y *c*) la eficiencia si la pérdida por rotación es de 65 W.

10.10. Si el motor del ejercicio 10.9 toma una corriente de 12.81 A con un factor de potencia de 0.74 en atraso cuando se incrementa su carga, calcule la velocidad de operación del motor. Suponga que el motor opera en la región lineal.

Resumen

En este capítulo examinamos tres tipos de motores de ca: el motor monofásico de inducción de fase dividida, el motor de polos sombreados y el motor universal.

Se explicó, con ayuda de la teoría del doble campo rotatorio, que un motor de inducción monofásico continúa girando aun cuando el flujo se establezca por un devanado único (principal). El motor de fase dividida y el motor de arranque por condensador operan con un solo devanado cuando la velocidad de operación es generalmente superior a 75% de su velocidad síncrona. Con base en la teoría del doble campo rotatorio, representamos estos motores con sus circuitos equivalentes. El circuito del rotor fue separado en dos circuitos equivalentes: uno para el campo rotatorio anterior y otro para el campo rotatorio posterior.

Para que un motor de inducción monofásico desarrolle par de arranque requiere un devanado auxiliar. Este devanado se coloca espaciado en cuadratura respecto al devanado principal.

En un motor de fase dividida, la diferencia de fase entre las corrientes en los dos devanados y, en consecuencia, entre los flujos producidos por ellos se obtiene haciendo al devanado auxiliar altamente resistivo, en tanto que el devanado principal es altamente inductivo. En un motor de fase dividida bien diseñado puede obtenerse una diferencia de fase tan alta como 60° eléctricos.

En un motor de condensador, la diferencia de fase se crea incluyendo un condensador en serie con el devanado auxiliar. En un motor de condensador bien diseñado es posible obtener una diferencia de fase de casi 90° eléctricos en el momento del arranque. Por tanto, un motor de condensadores es semejante a un motor bifásico.

La potencia desarrollada y la eficiencia de un motor de condensador pueden mejorarse conservando el devanado auxiliar en el circuito en todo momento. Los motores que caben en esta categoría son los de condensador con fase dividida permanente (PSC) y los de arranque por condensador y marcha por condensador (CSCR).

Un motor CSCR utiliza dos condensadores. Uno de ellos se optima para desarrollar un par de arranque elevado, mientras que el otro se elige sobre la base de una eficiencia elevada. La selección del condensador para un motor PSC se basa en el compromiso entre el par de arranque y su eficiencia a plena carga.

El devanado auxiliar de un motor de polos sombreados consiste en un anillo de cobre en cortocircuito. Frecuentemente se encuentran los dos devanados sin el espaciamiento en cuadratura. Las corrientes en los dos devanados establecen un campo rotatorio no equilibrado, y el motor desarrolla cierto par de arranque. Con objeto de incrementar el par de arranque, la mayor parte de los motores de polos sombreados tienen una región con entrehierro graduado.

El motor universal es un motor serie de cc diseñado para operar con ca. El motor es capaz de operar con suministros de cc y de ca. Sin embargo, el rendimiento es mejor cuando el motor opera con suministro de cc. Puede utilizarse un devanado compensador para mejorar el factor de potencia.

Los parámetros del circuito equivalente de un motor de inducción pueden obtenerse llevando a cabo la prueba de rotor fijo y la prueba sin carga. Cuando se efectúa la prueba de rotor fijo con el devanado auxiliar abierto se obtiene la resistencia del rotor, la reactancia de dispersión del devanado principal y la reactancia de dispersión del rotor. Al efectuar la prueba de rotor fijo con el devanado principal abierto se obtiene la relación *a*. Si se lleva a cabo la prueba sin carga con el devanado auxiliar abierto se obtiene la reactancia de magnetización y la pérdida por rotación.

Preguntas de repaso

10.1. Describa la construcción de los motores siguientes: motor de fase dividida, motor de condensador, motor de polos sombreados y motor universal.

10.2. Explique el principio de operación de los motores siguientes: de fase dividida, de condensador, de polos sombreados, y universal.

10.3. ¿Por qué se conocen como motores de inducción los motores de fase dividida, de condensador y de polos sombreados?

10.4. ¿Un motor universal es también un motor de inducción? Enuncie las razones que sustenten su respuesta.

10.5. Enuncie algunas de las aplicaciones prácticas de los motores universales, además de las mencionadas en el texto.

10.6. ¿Es posible reemplazar siempre un motor de polos sombreados con otros tipos de motores de inducción?

10.7. ¿Puede invertirse el sentido de rotación de un motor de polos sombreados?

10.8. ¿Cómo puede invertirse el sentido de rotación de un motor de fase dividida o de uno de condensador?

10.9. ¿Por qué es necesario "eliminar" del circuito el devanado auxiliar cuando un motor de fase dividida está trabajando a plena carga? ¿Qué pasaría si fallara el interruptor centrífugo?

10.10. ¿Por qué es mejor un motor de condensador que uno de fase dividida?

10.11. ¿Por qué es mejor un motor de arranque por condensador y marcha por condensador que uno de condensador con fase dividida permanente?

10.12. ¿Cuál es el efecto de la reacción de la armadura sobre la velocidad de un motor universal?

10.13. ¿Por qué funciona mejor un motor universal con un suministro de cc que con uno de ca?
10.14. ¿Qué sucede con el factor de potencia de un motor universal cuando se incrementa la carga?
10.15. ¿Qué sucede con la velocidad de un motor universal cuando se incrementa la carga?
10.16. ¿Es posible que un motor universal se autodestruya sin carga?
10.17. Un motor de polos sombreados de 1/3 hp, 120 V y 60 Hz toma 830 W con su deslizamiento de 8% a plena carga. Calcule *a*) la velocidad y *b*) la eficiencia del motor.
10.18. Determine el número de polos, el deslizamiento anterior y el deslizamiento posterior para los motores siguientes: *a*) 1 140 rpm y 60 Hz *b*) 1 440 rpm y 50 Hz, y *c*) 3 200 rpm y 60 Hz.
10.19. ¿Cómo puede invertirse un motor universal? Trace un esquema usando un interruptor de dos polos y doble tiro (DPDT).
10.20. Prepare un bosquejo de un motor reversible de polos sombreados.
10.21. Si la velocidad de trabajo de un motor en cualquier condición es menor de 3 600 rpm, ¿es mejor usar un motor universal que uno de inducción?

Problemas

10.1. Un motor de inducción monofásico, bipolar, de 120 V y 60 Hz opera con un deslizamiento de 4% y en reposo tiene una resistencia en el rotor de 2.4 Ω. Determine *a*) la velocidad del motor, *b*) la resistencia efectiva del rotor en la rama anterior y *c*) la resistencia efectiva del rotor en la rama posterior.
10.2. La resistencia efectiva del rotor de un motor de inducción monofásico, hexapolar, de 120 V y 50 Hz en la rama anterior con deslizamiento de 5% es de 120 Ω. ¿Cuál es la resistencia del rotor en reposo? ¿Cuál es la resistencia efectiva en la rama posterior? ¿Cuál es la velocidad de operación del motor?
10.3. Un motor de inducción monofásico, hexapolar, de 230 V y 60 Hz tiene una impedancia en el estator de $1.5 + j3\ \Omega$ y una impedancia en el rotor de $2 + j3\ \Omega$ en reposo. La reactancia de magnetización es de 50 Ω. Si la pérdida por rotación es de 150 W con un deslizamiento de 5%, determine la eficiencia y el par en el eje del motor.
10.4. Un motor de inducción monofásico, tetrapolar, de 208 V y 50 Hz tiene $R_1 = 2.5\ \Omega$, $X_1 = 2.9\ \Omega$, $R_2 = 2.1\ \Omega$, $X_2 = 2.6\ \Omega$ y $X_m = 42\ \Omega$. Si la pérdida por fricción, viento y en el núcleo es de 50 W con un deslizamiento de 4%, calcule la eficiencia y el par del motor.
10.5. Un motor de inducción monofásico, hexapolar, de 115 V y 60 Hz trabaja a una velocidad de 1 050 rpm y tiene $R_1 = 3.8\ \Omega$, $X_1 = 5.9\ \Omega$, $R_2 = 4.2\ \Omega$, $X_2 = 5.9\ \Omega$ y $X_m = 70.8\ \Omega$. Determine el par y la eficiencia del motor si la pérdida por rotación es de 25 W.
10.6. Grafique las curvas características velocidad-par, corriente-velocidad, eficiencia-velocidad y potencia de salida-velocidad del motor de inducción monofásico

del problema 10.5. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad del motor.

10.7. Un motor de condensador de dos valores, de 230 V, 60 Hz y cuatro polos tiene especificación de 1 710 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 30\ \Omega$, $X_1 = 36\ \Omega$, $R_2 = 24\ \Omega$, $X_2 = 30\ \Omega$, $R_a = 120\ \Omega$ y $X_m = 250\ \Omega$, $a = 1.75$, condensador de arranque = 8 μF y condensador de marcha = 4 μF. La pérdida por rotación a plena carga es de 25 W. Determine el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.8. Grafique las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.7. Suponga que *a*) la acción de conmutación tiene lugar a 75% de la velocidad síncrona y *b*) la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.9. Un motor CSCR hexapolar de 115 V y 60 Hz tiene especificación de 1 152 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 20\ \Omega$, $X_1 = 32\ \Omega$, $R_2 = 22\ \Omega$, $X_2 = 32\ \Omega$, $R_a = 55\ \Omega$, $X_m = 210\ \Omega$, $a = 1.8$, condensador de arranque = 8 μF y condensador de marcha = 5 μF. La pérdida por rotación es de 10 W. Determine el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.10. Grafique las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.9. Suponga que *a*) la acción de conmutación tiene lugar a 75% de la velocidad síncrona y *b*) la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.11. Un motor CSCR hexapolar de 115 V y 60 Hz está especificado para 1 120 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 6\ \Omega$, $X_1 = 4.8\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $X_2 = 3.3\ \Omega$, $R_a = 38\ \Omega$, $X_m = 51\ \Omega$, $a = 2.6$, condensador de arranque = 20 μF y condensador de marcha = 10 μF. La pérdida por rotación es de 28 W. Calcule el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.12. Grafique las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.11. Suponga que *a*) la acción de conmutación tiene lugar a 75% de la velocidad síncrona y *b*) la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.13. Un motor CSCR bipolar de 115 V y 60 Hz está especificado para 3 325 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 16\ \Omega$, $X_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 11\ \Omega$, $X_2 = 6.8\ \Omega$, $R_a = 26\ \Omega$, $X_m = 120\ \Omega$, $a = 1.2$, condensador de arranque = 25 μF y condensador de marcha = 10 μF. La pérdida por rotación es de 10 W. Calcule el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.14. Grafique las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.13. Suponga que *a*) la acción de conmutación tiene lugar a 75% de la velocidad síncrona y *b*) la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.15. Un motor PSC tetrapolar de 220 V y 60 Hz está especificado a 1 710 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 20\ \Omega$, $X_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 24\ \Omega$, $X_2 = 30\ \Omega$, $R_a = 60\ \Omega$, $X_m = 200\ \Omega$, $a = 1.5$ y C = 4 μF. La pérdida por rotación a plena carga es de

20 W. Determine el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.16. Trace las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.15. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.17. Un motor PSC hexapolar de 230 V y 60 Hz está especificado para 1 152 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 15\ \Omega$, $X_1 = 42\ \Omega$, $R_2 = 22\ \Omega$, $X_2 = 42\ \Omega$, $R_a = 25\ \Omega$, $X_m = 180\ \Omega$, $a = 1.4$ y $C = 7.5\ \mu$F. La pérdida por rotación es de 10 W. Determine el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.18. Grafique las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.17. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.19. Un motor PSC hexapolar de 120 V y 60 Hz está especificado para 1 120 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 5\ \Omega$, $X_1 = 5.8\ \Omega$, $R_2 = 7\ \Omega$, $X_2 = 5.8\ \Omega$, $R_a = 12\ \Omega$, $X_m = 80\ \Omega$, $a = 2$ y $C = 10\ \mu$F. La pérdida por rotación es de 20 W. Determine el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.20. Grafique las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.19. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.21. Un motor PSC reversible de 115 V, 60 Hz y bipolar está especificado para 3 325 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 4\ \Omega$, $X_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $X_2 = 8\ \Omega$, $R_a = 4\ \Omega$, $X_m = 120\ \Omega$, $a = 1$ y $C = 10\ \mu$F. Desprecie la pérdida por rotación. Calcule el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque que desarrolla el motor?

10.22. Un motor de inducción de fase dividida de 208 V, 50 Hz y tetrapolar, tiene $R_1 = 12.5\ \Omega$, $X_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$, $X_2 = 25\ \Omega$, $R_a = 280\ \Omega$, $a = 0.5$ y $X_m = 150\ \Omega$. Si la pérdida por fricción, viento y en el núcleo es de 20 W a una velocidad de 1 400 rpm, calcule la eficiencia y el par del motor. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por éste? La velocidad de conmutación es de 75% de la velocidad síncrona.

10.23. Trace un esquema de las curvas velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.22. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.24. Un motor de inducción de fase dividida, de 120 V, 60 Hz y tetrapolar, tiene $R_1 = 6.5\ \Omega$, $X_1 = 12.5\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $X_2 = 12.5\ \Omega$, $R_a = 120\ \Omega$, $a = 0.5$ y $X_m = 150\ \Omega$. Si la pérdida por fricción, viento y en el núcleo es de 25 W a una velocidad de 1 650 rpm, determine la eficiencia y el par del motor. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor? La velocidad de conmutación es de 75% de la velocidad síncrona.

10.25. Trace un esquema de las curvas velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.24. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.26. Un motor de inducción de arranque por condensador, de 120 V, 60 Hz y tetrapolar tiene $R_1 = 5\ \Omega$, $X_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $X_2 = 12\ \Omega$, $R_a = 20\ \Omega$, $a = 1.5$ y $X_m = 200\ \Omega$. El valor del condensador de arranque es de 20 μF. Si la pérdida por fricción, viento y en el núcleo es de 20 W a una velocidad de 1 650 rpm, determine la eficiencia y el par del motor. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor? La velocidad de conmutación es 75% de la velocidad síncrona.

10.27. Trace un esquema de las curvas velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.26. Suponga que *a*) la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad y *b*) la acción de conmutación tiene lugar a 75% de la velocidad síncrona.

10.28. Un motor de arranque por condensador, de 230 V, 60 Hz y hexapolar está especificado para 1 152 rpm. Los parámetros del motor son $R_1 = 10\ \Omega$, $X_1 = 22\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $X_2 = 20\ \Omega$, $R_a = 18\ \Omega$, $X_m = 220\ \Omega$, $a = 1.8$ y condensador de arranque = 8 μF. La pérdida por rotación es de 10 W. Determine el par en el eje y la eficiencia a plena carga. ¿Cuál es el par de arranque desarrollado por el motor?

10.29. Grafique las curvas características velocidad-par y velocidad-eficiencia para el motor del problema 10.28. Suponga que *a*) la acción de conmutación tiene lugar a 75% de la velocidad síncrona y *b*) la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad.

10.30. Un motor de arranque por condensador, tetrapolar, de 120 V y 60 Hz se prueba y se obtienen los datos siguientes:
Prueba sin carga con el auxiliar abierto: 120 V, 2.7 A y 56 W.
Prueba de rotor fijo con el auxiliar abierto: 120 V, 15 A, 1 175 W.
Prueba de rotor fijo con el principal abierto: 120 V, 5.2 A, 503.4 W.
La resistencia del devanado principal es de 2.5 Ω y la del auxiliar es de 12.5 Ω. Determine los parámetros del circuito equivalente del motor.

10.31. Un motor reversible PSC, de 208 V, tetrapolar y de 50 Hz al probarse con el devanado auxiliar abierto dio los resultados siguientes:
Prueba sin carga: 208 V, 3.8 A, 96 W
Prueba de rotor fijo: 80 V, 8 A, 420 W
Para que un motor reversible desarrolle el mismo par en cualquier sentido de rotación a plena carga, los devanados principal y auxiliar son idénticos ($a = 1$). La resistencia de cada devanado es de 3.8 Ω. Determine los parámetros del circuito equivalente del motor.

10.32. Calcule el par desarrollado y la eficiencia del motor del problema 10.31 con un deslizamiento de 5%. ¿Cuál es la velocidad nominal del motor? ¿Cuál debe ser el voltaje de especificación del condensador, si el motor usa un condensador de 5 μF.

10.33. Se obtuvieron los resultados siguientes de la prueba de un motor de fase dividida, de 120 V y 60 Hz:
Resistencia del devanado principal: 3.5 Ω.
Resistencia del devanado auxiliar: 140 Ω.
Prueba de rotor fijo con el auxiliar abierto: 96.8 V, 10 A, 600 W.

Prueba sin carga con el auxiliar abierto: 120 V, 2.5 A, 45 W.
Prueba de rotor fijo con el principal abierto: 120 V, 0.85 A, 102.2 W.
Calcule los parámetros del circuito equivalente del motor.

10.34. Un motor reversible PSC de 120 V, hexapolar y 50 Hz, se prueba con el devanado auxiliar abierto y da los resultados siguientes:
Prueba sin carga: 120 V, 1.2 A, 60 W
Prueba de rotor fijo: 90 V, 5 A, 420 W
Para que un motor reversible desarrolle el mismo par en cualquier sentido de rotación a plena carga, los devanados principal y secundario son idénticos ($a = 1$). La resistencia de cada devanado es de 15 Ω. Determine los parámetros del circuito equivalente del motor.

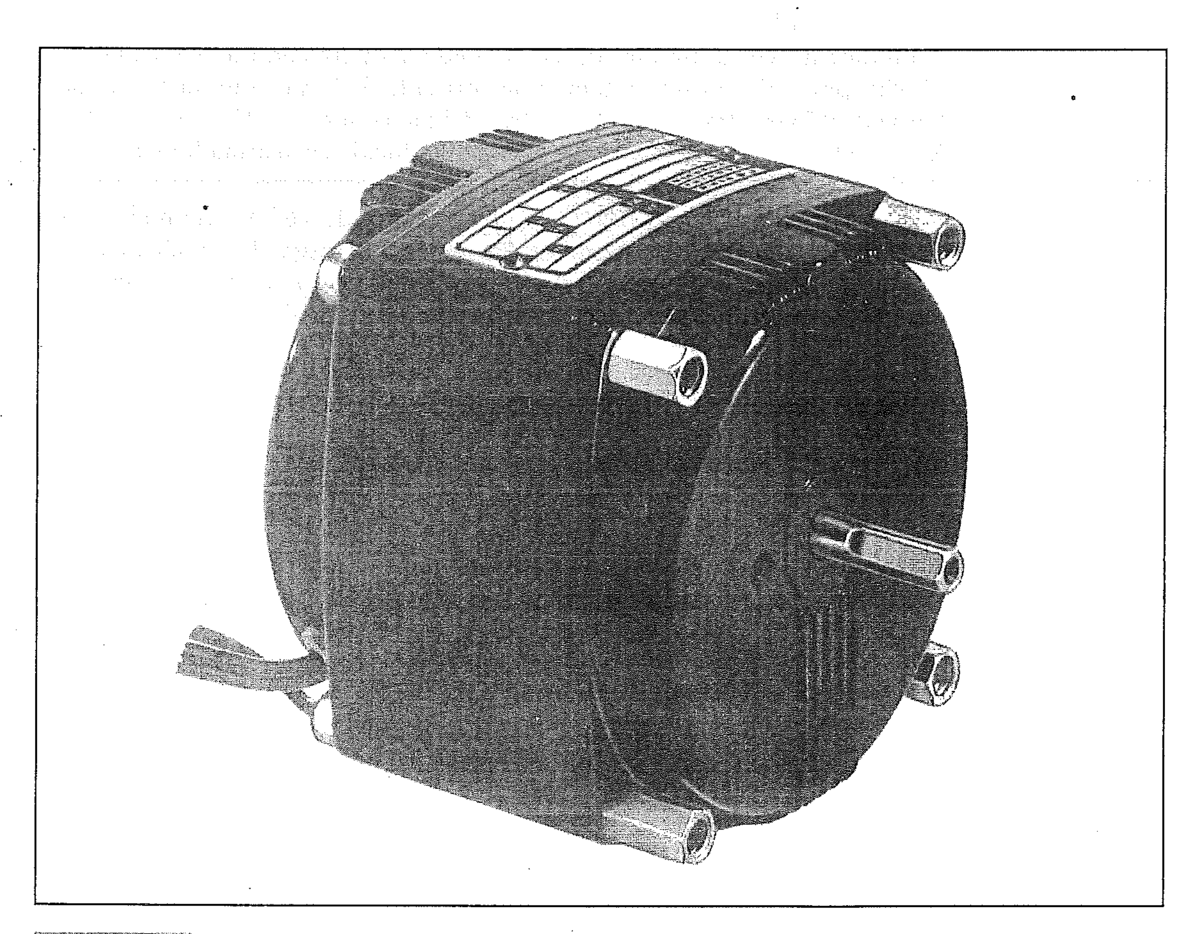
10.35. Calcule el par desarrollado y la eficiencia del motor del problema 10.34 con un deslizamiento de 4%. ¿Cuál es la velocidad nominal del motor? ¿Cuál debe ser la especificación del voltaje del condensador si el motor usa un condensador de 7.5 μF?

10.36. Un motor universal bipolar de 110 V y 60 Hz opera con una velocidad de 12 500 rpm a plena carga y toma una corriente de 5 A con un factor de potencia de 0.74 en atraso. Los parámetros del motor son $R_s = 0.5\ \Omega$, $X_s = 2.235\ \Omega$, $R_a = 5.2\ \Omega$ y $X_a = 12.563\ \Omega$. Calcule *a*) la fem inducida en la armadura, *b*) el par en el eje, y *c*) la eficiencia del motor.

10.37. Si el motor del problema 10.36 toma una corriente de 5.65 A con un factor de potencia de 0.65 en atraso cuando se incrementa la carga, determine *a*) la velocidad de operación del motor, *b*) la potencia de salida y *c*) el par en el eje. Suponga que la pérdida por rotación es proporcional a la velocidad del motor.

11

Dinámica de las máquinas eléctricas



Fotografía de un motor para instrumentación industrial y aplicaciones de precisión. *(Cortesía de Bodine Electric Company.)*

11.1. Introducción

El estudio de las máquinas eléctricas llevado a cabo en los capítulos anteriores se limitó a condiciones de operación en estado estable. Es decir, la máquina había estado operando en condiciones definidas durante mucho tiempo, o bien, ajustándose pausadamente de una condición de funcionamiento a otra, de modo que el desequilibrio de energía entre los elementos eléctricos y mecánicos resultaba insignificante durante el periodo transitorio. Sin embargo, cuando el cambio de una condición de operación a otra es súbito, no ocurren instantáneamente las modificaciones en las energías magnética y mecánica almacenadas en términos de la inercia de los elementos giratorios. Como resultado, se necesita un tiempo finito, conocido como *periodo transitorio* (dinámico), para restaurar el equilibrio de energía de las condiciones iniciales a las finales. Por ejemplo, si el voltaje aplicado a un motor cambia de manera repentina, la máquina pasará por un periodo transitorio antes de alcanzar su nueva condición de estado estable. En realidad, tales eventos ocurren con demasiada frecuencia cuando las máquinas se controlan por medio de dispositivos electrónicos, ya que éstos generan ondas discontinuas de voltaje y corriente de tipo periódico. Otra condición que podría ocasionar una modificación en el equilibrio dinámico de una máquina es un cambio súbito de su carga.

En el capítulo 2 se estableció que la característica de magnetización de un material magnético se desvía de una relación lineal para valores altos de la densidad de flujo magnético. Esto significa sencillamente que la permeabilidad de un material magnético depende de la densidad de flujo presente en él. Sólo con densidades de flujo bajas, casos en que la característica de magnetización se ajusta a una relación lineal, la permeabilidad del material magnético puede considerarse constante. En esa región lineal, la densidad de flujo en el material magnético es directamente proporcional a la fuerza magnetomotriz (fmm) aplicada. Por ejemplo, un incremento de 10% en la fmm aplicada da lugar a un aumento de casi 10% en la densidad de flujo o en el flujo en el material magnético. Una máquina que trabaje en la región lineal de su característica de magnetización puede tratarse como un dispositivo lineal. Para una máquina tal, es posible obtener una solución de forma cerrada para caracterizar su comportamiento en cualquier condición de trabajo (en estado estable o transitorio).

A medida que la fmm aplicada se incrementa, se alcanza un punto en el que la densidad de flujo en el material magnético comienza a desviarse respecto de la relación lineal. Ése es el punto (conocido como *punto de inflexión* de la curva de magnetización) donde el material magnético empieza a saturarse. Un incremento subsecuente de la fmm aplicada ocasiona una saturación adicional del material magnético. En esta región, la permeabilidad de dicho material depende en gran medida de la densidad de flujo en él. Conforme la densidad de flujo aumenta, la permeabilidad disminuye. Cuando el material magnético alcanza la saturación total, la permeabilidad del material magnético se aproxima a la del aire y el material magnético se comporta casi como no magnético. Es muy difícil, acaso imposible, obtener una solución de forma cerrada para una máquina que trabaje en la región saturada (no lineal). Sin embargo, puede determinarse el comportamiento de una máquina que trabaje en la región saturada por medio de diversas técnicas numéricas, una de las cuales se basa en el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden, que se describe posteriormente en el capítulo.

La característica de magnetización de una máquina también puede aproximarse mediante muchos segmentos lineales cortos. De esta manera, la operación de la máquina en cada segmento puede considerarse lineal. Con tales aproximaciones lineales es posible obtener una solución aproximada de forma cerrada para una máquina aplicando ecuaciones diferenciales o el método de la transformación de Laplace. En este capítulo hemos utilizado el método de la transformación de Laplace para conocer el comportamiento dinámico de las máquinas de corriente continua (cc).

11.2. Dinámica de las máquinas de cc

Cuando se aplica en forma súbita un voltaje a través del devanado del campo de un generador de cc, la corriente de ese devanado se establece lentamente desde cero hasta su valor final en estado estable debido a la gran inductancia del devanado. Ocurre una situación exactamente igual cuando el generador se acopla a un impulsor primario. A la armadura de un generador le lleva tiempo cambiar su velocidad desde cero hasta su valor nominal (o especificado). ¿Cómo se comporta un generador de cc cuando se elimina la carga en forma súbita o el generador desarrolla un cortocircuito? Para responder a estas preguntas debemos entender el comportamiento dinámico de un generador de cc.

Pueden hacerse preguntas semejantes para un motor de cc. Por ejemplo: ¿qué pasa cuando se aplica de pronto voltaje a través del devanado de la armadura de un motor de cc? ¿Cuánto tiempo le toma a la corriente alcanzar su valor de estado estable? ¿Cuán rápido reajusta su velocidad cuando el par cambia bruscamente? Para contestar algunas de estas preguntas, primero repasaremos el comportamiento de un motor en estado estable.

Son conocidas las ecuaciones que rigen el par desarrollado y la velocidad angular de un motor con excitación independiente, o de un motor shunt en condición de estado estable.

$$T_d = K_a I_a \Phi_P$$

y

$$\omega_m = \frac{V_s - I_a R_a}{K_a \Phi_P}$$

donde K_a es la constante de máquina, I_a es la corriente de la armadura, Φ_P es el flujo por polo, R_a es la resistencia efectiva del circuito de la armadura y V_s es el voltaje de suministro.

A partir de estas ecuaciones, resulta evidente que la velocidad del motor depende del voltaje aplicado V_s, de la resistencia efectiva de la armadura R_a y el flujo por polo Φ_P. Este último se controla aumentando o disminuyendo la corriente del devanado del campo shunt I_f. El establecimiento de la corriente I_f depende de la resistencia R_f y de la inductancia L_f del devanado del campo. Como tal vez ya estimó el lector, parece que existen tres formas de controlar la velocidad de un motor de cc al tiempo que suministra el par requerido. Sin embargo, se considera un solo método de control de velocidad el que se lleva a cabo modificando ya sea el voltaje aplicado V_s, la resistencia efectiva del circuito de la armadura R_a o ambos. Este método generalmente se llama *método de control de la armadura*. Cuando la velocidad de un motor de cc se controla cambiando el flujo en el motor, se habla del *método de control del campo*. En seguida analizaremos el comportamiento dinámico de un motor de cc cuando se usan estos métodos para controlar la velocidad.

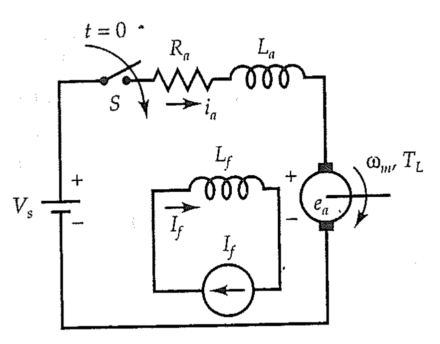


Figura 11.1. Motor de cc con excitación independiente y corriente de campo constante.

Motores de cc controlados por la armadura

En la figura 11.1 se aprecia que el interruptor S conecta un motor de cc con excitación independiente a un suministro de voltaje de cc. Debido a la aplicación súbita del voltaje de la armadura, el motor experimenta un estado transitorio cuya duración está esencialmente regida por los parámetros del motor y la carga. Si la corriente del campo se mantiene constante o se trata de un motor de imanes permanentes, la variación de la corriente de la armadura puede representarse matemáticamente por la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K\omega_m(t) = V_s \tag{11.1}$$

donde R_a y L_a son la resistencia de la armadura y la inductancia, respectivamente. En este modelo, $i_a(t)$ es la corriente de la armadura y V_s es el voltaje aplicado a las terminales del motor. En la ecuación 11.1, $K\omega_m(t)$ es la fuerza contraelectromotriz del motor (e_a), donde $K = K_a\Phi_P$ es una constante debido a la corriente uniforme del campo I_f y $\omega_m(t)$ es la velocidad angular del rotor.

En forma semejante, el par desarrollado por el motor puede expresarse como

$$T_L + D\omega_m(t) + J\frac{d\omega_m(t)}{dt} = Ki_a(t) \tag{11.2}$$

Aquí, $Ki_a(t)$ es el par desarrollado (T_d) y T_L es el par de carga. En esta ecuación, D y J son el coeficiente de fricción viscosa y el momento de inercia de los elementos giratorios, respectivamente. Las ecuaciones 11.1 y 11.2 pueden reexpresarse en forma de matriz como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\omega_m(t)}{dt} \\[2ex] \dfrac{di_a(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{D}{J} & \dfrac{K}{J} \\[2ex] -\dfrac{K}{L_a} & -\dfrac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\[2ex] i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{J} & 0 \\[2ex] 0 & \dfrac{1}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\[2ex] V_s \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

En las ecuaciones anteriores, la dinámica de un motor con excitación constante se expresa en forma de estado espacial, donde $\omega_m(t)$ e $i_a(t)$ constituyen las variables de estado y V_s y T_L son las variables de entrada.

Las soluciones de las ecuaciones anteriores proporcionan las variaciones de la velocidad, ω_m, y la corriente de la armadura, i_a, como función del tiempo. Como las ecuaciones 11.1 y 11.2 son un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, pueden resolverse por medio de la transformación de Laplace o de métodos numéricos. En este capítulo aplicaremos las dos técnicas para determinar $\omega_m(t)$ e $i_a(t)$.

Método de la transformación de Laplace

La transformación de Laplace permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Al obtener las transformadas de Laplace de las ecuaciones 11.1 y 11.2 resulta

$$R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) + K\Omega_m(s) = V_s(s) + L_a i_a(0) \tag{11.4}$$

y

$$T_L(s) + D\Omega_m(s) + sJ\Omega_m(s) = KI_a(s) + J\omega_m(0) \tag{11.5}$$

donde $I_a(s)$, $\Omega_m(s)$, $V_s(s)$ y $T_L(s)$ son las transformadas de Laplace de $i_a(t)$, $\omega_m(t)$, V_s y T_L, respectivamente. Por otro lado, $i_a(0)$ y $\omega_m(0)$ son los valores iniciales de la corriente de la armadura y la velocidad angular del motor en $t = 0$.

Al resolver las ecuaciones 11.4 y 11.5 simultáneamente se obtiene

$$\Omega_m(s) = \frac{K[V_s(s) + L_a i_a(0)] + [J\omega_m(0) - T_L(s)](R_a + sL_a)}{(D + sJ)(R_a + sL_a) + K^2} \tag{11.6}$$

e

$$I_a(s) = \frac{-K[J\omega_m(0) - T_L(s)] + [L_a i_a(0) + V_s(s)](D + sJ)}{(D + sJ)(R_a + sL_a) + K^2} \tag{11.7}$$

Si el motor está en reposo cuando se energiza en $t = 0$, $i_a(0)$ y $\omega_m(0)$ valen cero. En consecuencia, las ecuaciones 11.6 y 11.7 se convierten en

$$\Omega_m(s) = \frac{KV_s(s) - T_L(s)(R_a + sL_a)}{(D + sJ)(R_a + sL_a) + K^2} \tag{11.8}$$

$$I_a(s) = \frac{KT_L(s) + V_s(s)(D + sJ)}{(D + sJ)(R_a + sL_a) + K^2} \tag{11.9}$$

Las transformadas inversas de Laplace de las ecuaciones 11.6 y 11.7 o de las ecuaciones 11.8 y 11.9 permiten conocer la velocidad del motor y la corriente de la armadura en el dominio de tiempo, como lo ilustran los ejemplos siguientes.

Ejemplo 11.1

Un motor de cc de 240 V e imanes permanentes toma 2 A siempre que opera sin carga. La resistencia del devanado de su armadura y su inductancia son de 1.43 Ω y 10.4 mH, respectivamente. El flujo por polo es de 5 mWb y la constante del motor K_a es 360. El momento de inercia es de 0.068 kg • m². Si el motor se conecta de manera repentina a un suministro de cc de 240 V mientras trabaja sin carga, determine su velocidad y la corriente de la armadura como función del tiempo.

• Solución

Los datos sin carga del motor ayudan a determinar el coeficiente de fricción, D, según se muestra en seguida.

Puesto que el motor requiere 2 A sin carga, su velocidad sin carga es

$$\omega_m = \frac{240 - 1.43 \times 2}{360 \times 5 \times 10^{-3}} = 131.74 \text{ rad/s}$$

El par desarrollado sin carga es

$$T_d = 360 \times 5 \times 10^{-3} \times 2 = 3.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que básicamente cubre las pérdidas por rotación. El coeficiente de fricción D puede calcularse como sigue:

$$D = \frac{3.6}{131.74} = 0.027 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

Antes de aplicar voltaje en la armadura, la velocidad del motor y la corriente de la armadura son iguales a cero. Es decir, en $t = 0$, $\omega_m(0) = 0$ e $i_a(0) = 0$. Además, el par de la carga es igual a cero porque el motor opera sin carga.

Con base en la ecuación 11.8 se obtiene

$$\Omega_m(s) = \frac{1.8 \dfrac{240}{s}}{(0.027 + 0.068s)\,(1.43 + 10.4 \times 10^{-3} s) + 1.8^2}$$

o

$$\Omega_m(s) = \frac{610\,859.72}{s(s^2 + 137.89s + 4\,636.04)}$$

Con objeto de determinar la transformada inversa de Laplace de $\Omega_m(s)$, se desarrolla $\Omega_m(s)$ en fracciones parciales como sigue:

$$\Omega_m(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 79.84} + \frac{C}{s + 58.10}$$

donde *A, B* y *C* pueden calcularse por el método de sustitución de raíces. Por tanto,

$$A = s\frac{610\,859.72}{s(s + 79.84)\,(s + 58.10)}\bigg|_{s=0} = 131.74$$

$$A = s\frac{610\,859.72}{s(s + 79.84)\,(s + 58.10)}\bigg|_{s=0} = 131.74$$

$$C = (s + 79.84)\frac{610\,859.72}{(s + 79.84)s(s + 58.10)}\bigg|_{s=-79.84} = -483.56$$

Finalmente, se obtiene la transformada inversa de Laplace de

$$\Omega_m(s) = \frac{131.74}{s} + \frac{351.87}{s + 79.84} - \frac{483.56}{s + 58.10}$$

y también la velocidad angular en rad/s, como sigue:

$$\omega_m(t) = 131.74 + 351.87e^{-79.84t} - 483.56e^{-58.10t} \qquad \text{para } t > 0$$

En la figura 11.2 se muestra la gráfica de $\omega_m(t)$.

De la ecuación 11.9 se tiene que la transformada de Laplace de la corriente de la armadura es

$$I_a(s) = \frac{23\,076.92s + 9162.9}{s(s^2 + 137.89s + 4\,636.04)}$$

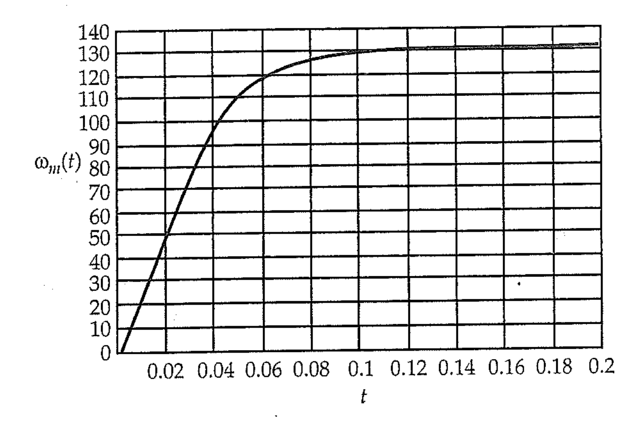


Figura 11.2. Velocidad del motor como función del tiempo.

En términos de su desarrollo en fracciones parciales, $I_a(s)$ puede expresarse como:

$$I_a(s) = \frac{2}{s} + \frac{1\,054}{s + 58.10} - \frac{1\,056}{s + 79.84}$$

Por último, se obtiene la corriente de la armadura como:

$$i_a(t) = 2 + 1\,054e^{-58.10t} - 1\,056e^{-79.84t} \qquad \text{para } t > 0$$

la cual se muestra gráficamente en la figura 11.3.

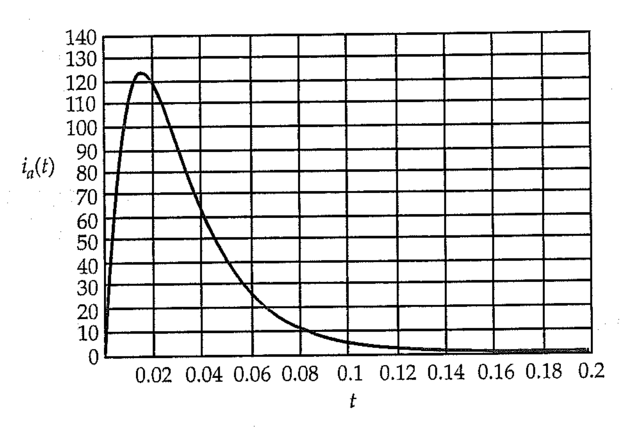


Figura 11.3. Corriente de la armadura como función del tiempo.

Ejemplo 11.2

El motor del ejemplo 11.1 se encuentra acoplado a una carga que tiene un par de 18.58 N•m. Calcule la variación de la velocidad del motor como función del tiempo después de que se alimenta súbitamente a su voltaje especificado en $t = 0$.

- Solución

Puesto que el voltaje se aplica al circuito de la armadura en $t = 0$, tanto la velocidad inicial como la corriente de la armadura son iguales a cero.

Con base en la ecuación 11.8,

$$\Omega_m(s) = \frac{1.8\frac{240}{s} - \frac{18.58}{s}(1.43 + 10.4\times10^{-3}s)}{(0.027 + 0.068s)(1.43 + 10.4\times10^{-3}s) + 1.8^2}$$

o

$$\Omega_m(s) = \frac{573\,289.87 + s274.02}{s(s^2 + 137.89s + 4\,636.04)}$$

$$= \frac{123.66}{s} + \frac{342.29}{s + 79.84} - \frac{465.90}{s + 58.10}$$

La transformada inversa de Laplace de $\Omega_m(s)$ resulta en

$$\omega_m(t) = 123.66 + 342.29e^{-79.843t} - 465.90e^{-58.10t} \qquad \text{para } t > 0$$

La transformada de Laplace de la corriente de la armadura se calcula con la ecuación 11.9, como sigue:

$$I_a(s) = \frac{56\,447.963 + s23\,076.923}{s(s^2 + 137.89s + 4\,636.04)}$$

o, en términos de su desarrollo en fracciones parciales:

$$= \frac{12.18}{s} - \frac{1027}{s + 79.84} + \frac{1015}{s + 58.10}$$

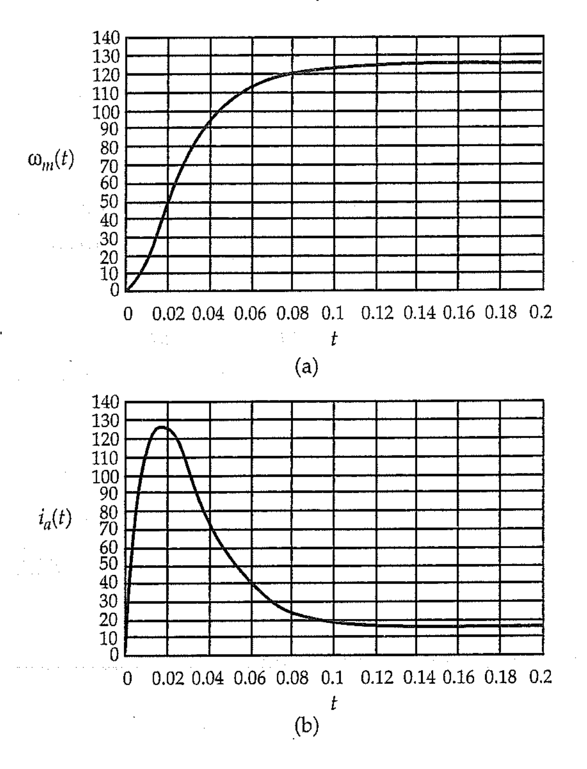


Figura 11.4. Variaciones en **(a)** la velocidad del motor y **(b)** la corriente de la armadura, ambas como función del tiempo.

De la transformada inversa de Laplace de $I_a(s)$ se obtiene

$$i_a(t) = 12.18 - 1\,027e^{-79.84t} + 1\,015e^{-58.10t} \qquad \text{para } t > 0$$

Las variaciones en la velocidad del motor y la corriente de la armadura como función del tiempo se indican en la figura 11.4.

Para todo fin práctico, el motor alcanza su operación en estado estable después de cinco constantes de tiempo. Así, este motor requiere aproximadamente 86.06 ms (con base en la constante de tiempo mayor) para alcanzar su estado estable.

Ejemplo 11.3

El motor estudiado en el ejemplo 11.1 se alimentó súbitamente con su voltaje nominal en $t = 0$ cuando se encontraba en reposo y acoplado a una carga lineal de $T_L = 0.1\ \omega_m$.

a) Calcule la variación de la velocidad del motor como función del tiempo para $t \geq 0$.

b) Calcule el tiempo necesario para que alcance su estado estable.

- Solución

a) Puesto que el motor estaba en reposo antes de que se energizara en $t = 0$, la velocidad y la corriente iniciales de la armadura son iguales a cero. Por tanto, de la ecuación 11.8, con $T_L(s) = 0.1\ \Omega_m(s)$, se obtiene

$$\Omega_m(s) = \frac{1.8\,(240/s) - 0.1\Omega_m(1.43 + 10.4 \times 10^{-3}s)}{(0.027 + 0.068s)\,(1.43 + 10.4 \times 10^{-3}s) + 1.8^2}$$

y después de agrupar los términos se obtiene

$$\Omega_m(s) = \frac{610\,859.729}{s(s^2 + 139.37s + 4\,838.24)}$$

Las raíces del polinomio en el denominador son

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = -73.946 \qquad \text{y} \qquad s_3 = -65.392$$

Luego, en términos del desarrollo con fracciones parciales, $\Omega_m(s)$ puede expresarse como

$$\Omega_m(s) = \frac{126.256}{s} + \frac{956.776}{s + 73.946} - \frac{1092}{s + 65.392}$$

De la transformada inversa de Laplace, para $t > 0$ se obtiene

$$\omega_m(t) = 126.256 + 956.77e^{-73.946t} - 1\,092e^{-65.392t}\ \text{rad/s}$$

La variación de la velocidad con el tiempo se muestra gráficamente en la figura 11.5*a*. A partir de la ecuación 11.9 es posible calcular la transformada de Laplace de la corriente de la armadura como sigue:

$$I_a(s) = \frac{23\,076.92s + 43\,099.55}{s(s^2 + 139.37s + 4\,838.24)}$$

o, en forma de expansión en fracciones parciales,

$$I_a(s) = \frac{8.908}{s} - \frac{2\,615}{s + 73.946} + \frac{2\,606}{s + 65.392}$$

Finalmente, puede obtenerse $i_a(t)$ de la transformada inversa de Laplace como

$$i_a(t) = 8.908 - 2615e^{-73.946t} + 2606e^{-65.392t} \text{ rad/s} \qquad \text{para } t > 0$$

En la figura 11.5*b* se ilustra la variación de la corriente de la armadura como función del tiempo.

b) La constante de tiempo más grande de los términos exponenciales anteriores es

$$\tau = \frac{1}{65.392} = 0.0153 \text{ s}$$

El tiempo necesario para alcanzar el estado estable sería por lo menos de 5τ. Por tanto,

$$t = 5 \times 0.0153 = 0.0765\ s = 76.5 \text{ ms}$$

es el tiempo necesario para alcanzar el estado estable.

En los ejemplos 11.1, 11.2 y 11.3 se usó deliberadamente el mismo motor para dar al lector la oportunidad de observar sus respuestas cuando está sujeto a distintas condiciones de trabajo.

■

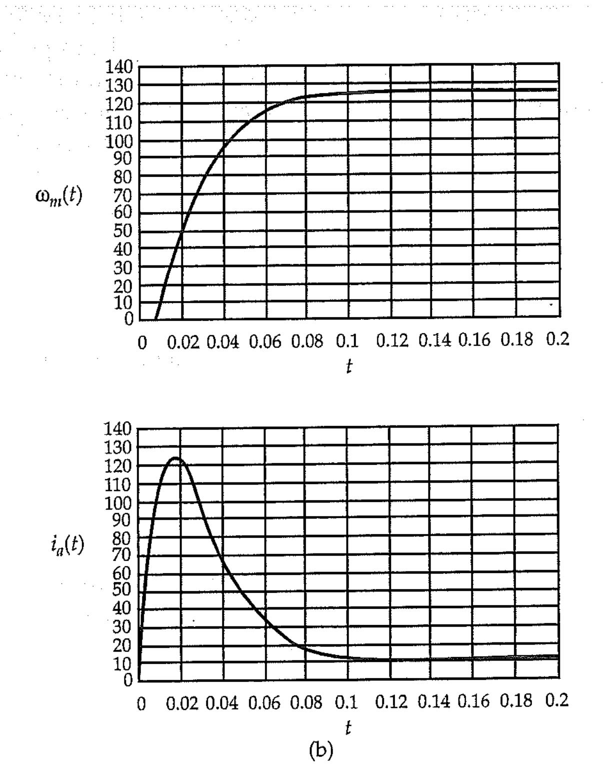


Figura 11.5. Variaciones en **(a)** la velocidad del motor y **(b)** la corriente de la armadura, ambas como función del tiempo.

Ejercicios

11.1. El devanado de la armadura del motor del ejemplo 11.1 puede soportar el doble de su corriente especificada durante 6 ms. Calcule la cantidad de resistencia que debe conectarse en serie con el devanado de la armadura para tener un arranque seguro sin carga.

11.2. Un motor de cc de imanes permanentes, 240 V, 2 hp y 850 rpm opera en sus condiciones nominales durante mucho tiempo. La constante del motor es 625 y el flujo por polo es de 4 mWb. Determine la variación de la velocidad y la corriente de la armadura como función del tiempo si la carga en su eje se elimina de súbito. La resistencia de la armadura y la inductancia son de 2.6 Ω y 19 mH, respectivamente. El momento de inercia del motor es de 0.08 kg • m^2 y el coeficiente de fricción D es de 0.011 N • m • s.

Motores de cc controlados por el campo

En un motor de cc controlado por la armadura la corriente del campo se mantiene en un nivel constante y se cambia el suministro de voltaje para ajustar la velocidad del motor a fin de disminuir su velocidad por debajo de la velocidad especificada. Sin embargo, en un motor de cc controlado por el campo se cambiará la corriente del campo con objeto de obtener una velocidad del motor más alta que la especificada.

Considérese el motor de cc con excitación independiente que se muestra en la figura 11.6, que trabaja en la región lineal de su característica de magnetización de modo que el flujo que produce es proporcional a la corriente del campo (es decir, $\Phi_P = k_f i_f$). En consecuencia, la fuerza contraelectromotriz y el par desarrollado en el motor pueden expresarse como sigue:

$$E_a = K_a \Phi_P \omega_m = K_T i_f \omega_m \tag{11.10a}$$

$$T_d = K_a \Phi_P i_a = K_T i_f i_a \tag{11.10b}$$

donde $K_T = K_a K_f$ es una constante de proporcionalidad.

A medida que el voltaje del campo, V_f, o la resistencia total, R_f, en el circuito del campo se ajusta para modificar la corriente del campo, i_f, la variación de i_f queda regida por la ecuación siguiente:

$$V_f = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \tag{11.11}$$

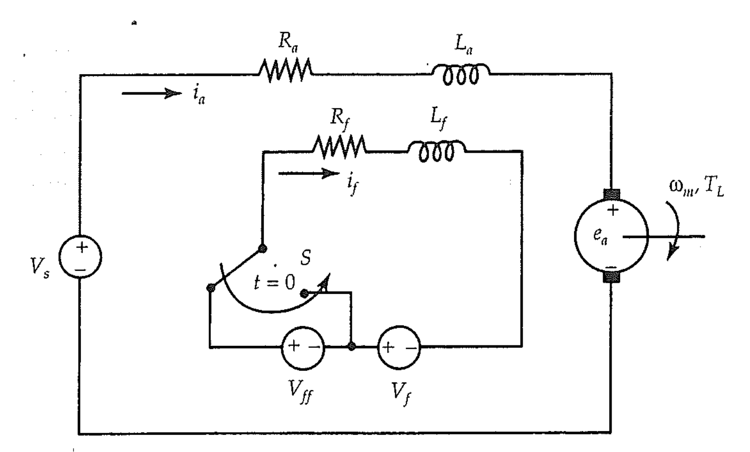


Figura 11.6. Motor de cc con excitación independiente, que experimenta un cambio en su voltaje de campo en $t = 0$.

donde L_f es la inductancia del circuito del campo, como se muestra en la figura 11.6.

Conforme i_f cambia, también lo hace la fuerza contraelectromotriz y el par desarrollado, según lo describen las ecuaciones siguientes:

$$K_T i_f \omega_m(t) = V_s - R_a i_a(t) - L_a \frac{di_a(t)}{dt} \tag{11.12a}$$

y

$$K_T i_f(t) i_a(t) = T_L + D\omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} \tag{11.12b}$$

En las ecuaciones 11.11, 11.12*a* y 11.12*b* se observa que $\omega_m(t)$, $i_a(t)$ e $i_f(t)$ son las variables de estado, ya que rigen el almacenamiento de energía en el momento de inercia del rotor y en las inductancias de la armadura y los devanados del campo, respectivamente. Asimismo, es evidente que las ecuaciones 11.12*a* y 11.12*b* son no lineales debido a los productos de las variables de estado que incluyen. Como resultado, el enfoque de la transformada de Laplace no sería adecuado para obtener soluciones de forma cerrada para $\omega_m(t)$ e $i_a(t)$. Sin embargo, puede hacerse una suposición simplificadora para dar características lineales a esas ecuaciones.

En un motor eléctrico, la constante de tiempo del circuito eléctrico es mucho más pequeña que la constante de tiempo dependiente de sus elementos mecánicos. Por ende, puede considerarse que la constante de tiempo del circuito del campo es mucho más pequeña que la constante de tiempo mecánica del motor. En otras palabras, la variación de la velocidad del motor y, por tanto, de la fuerza contraelectromotriz, será mucho menor que la variación en el tiempo de la corriente del campo. Por ende, puede suponerse que la corriente del campo ya alcanzó su nuevo valor de estado estable (corriente constante) antes de que la armadura (rotor) responda a los cambios en la corriente del campo. En este caso, las ecuaciones 11.12*a* y 11.12*b* se convierten en ecuaciones lineales, así

$$K_T I_f i_a(t) = T_L + D\omega_m(t) + J\frac{d\omega_m(t)}{dt} \tag{11.13a}$$

y

$$R_a i_a(t) + L_a\frac{di_a(t)}{dt} + K_T I_f \omega_m(t) = V_s \tag{11.13b}$$

donde I_f es el valor en estado estable de $i_f(t)$ después de que el cambio en la corriente del campo ha tenido lugar.

En seguida, para obtener la respuesta dinámica del motor puede aplicarse la transformada de Laplace como sigue:

$$K_T I_f \Omega_m(s) = V_s(s) - (R_a + sL_a)I_a(s) + L_a i_a(0) \tag{11.14a}$$

$$K_T I_f I_a(s) = (D + sJ)\Omega_m(s) + T_L(s) - j\omega_m(0) \tag{11.14b}$$

y

$$V_f(s) = (R_f + sL_f)I_f(s) - L_f i_f(0) \tag{11.14c}$$

Al resolver estas ecuaciones, se obtiene

$$\Omega_m(s) = \frac{K_T I_f[V_s + L_a i_a(0)] + [J\omega_m(0) - T_L(s)](R_a + sL_a)}{(D + sJ)(R_a + sL_a) + (K_T I_f)^2} \tag{11.15}$$

$$I_a(s) = \frac{-K_T I_f[J\omega_m(0) - T_L(s)] + [L_a i_a(0) + V_s(s)](D + sJ)}{(D + sJ)(R_a + sL_a) + (K_T I_f)^2} \tag{11.16}$$

e

$$I_f(s) = \frac{V_f(s) + L_f i_f(0)}{R_f + sL_f} \qquad (11.17)$$

En el ejemplo siguiente se muestra cómo aplicar estas ecuaciones para predecir la respuesta dinámica de un motor de cc cuando se ajusta el flujo.

Ejemplo 11.4

Un motor de cc con excitación independiente, de 240 V y 12 hp trabaja con una carga de 15 N • m en la región lineal de su característica de magnetización, y tiene los parámetros siguientes: $R_a = 0.28\ \Omega$, $L_a = 2.81$ mH, $R_f = 320\ \Omega$, $L_f = 2$ H, $J = 0.087$ kg • m^2, $D = 0.02$ N • m • s y $K_T = 1.03$. Determine la variación de la velocidad del motor, la corriente de la armadura y la corriente del campo, como función del tiempo cuando el voltaje del campo se reduce bruscamente de 240 V a 192 V, en $t = 0$.

• Solución

Como el motor ha estado trabajando en estado estable con una carga de $T_L = 15$ N • m antes de que el voltaje cambie bruscamente, es necesario evaluar en primer lugar, las condiciones iniciales de $\omega_m(t)$, $i_a(t)$ e $i_f(t)$ a partir de las ecuaciones 11.11, 11.12*a* y 11.12*b*, como si se aplicaran al estado estable para $t < 0$,

$$240 = 320 i_f(0)$$
$$1.03 i_f(0)\omega_m(0) = 240 - 0.28 i_a(0)$$
$$1.03 i_f(0) i_a(0) = 15 + 0.02\omega_m(0)$$

De la solución simultánea de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\omega_m(0) = 300.79 \text{ rad/s}, \qquad i_a(0) = 27.2 \text{ A} \quad \text{e} \quad i_f(0) = 0.75 \text{ A}$$

Cuando se reduce bruscamente el voltaje del campo a 192 V, la corriente del campo cae de 0.75 A a un valor en estado estable de $I_f = 192/320 = 0.6$ A después de una duración breve. Con las ecuaciones 11.14*a*, 11.14*b* y 11.14*c* puede determinarse la transformada de Laplace de la velocidad angular, la corriente de la armadura y la corriente del campo, como sigue:

$$\Omega_m(s) = \frac{300(s^2 + 99.80s + 1\,960.82)}{s(s^2 + 100.03s + 1\,581.73)}$$

$$I_a(s) = \frac{27.14(s^2 + 708.58s + 2116.01)}{s(s^2 + 100.03s + 1581.73)}$$

$$I_f(s) = \frac{0.75(s + 128)}{s(s + 160)}$$

o

$$\Omega_m(s) = \frac{371.9}{s} + \frac{24.16}{s + 80.079} - \frac{94.868}{s + 19.816}$$

$$I_a(s) = \frac{36.307}{s} - \frac{271.582}{s + 80.079} + \frac{262.513}{s + 19.816}$$

$$I_f(s) = \frac{0.6}{s} + \frac{0.15}{s + 160}$$

en forma de desarrollo de fracciones parciales. Al extraer la transformada inversa de Laplace se obtiene

$$\omega_m(t) = 371.9 + 24.16e^{-80.079t} - 94.868e^{-19.816t}$$
$$i_a(t) = 36.307 - 271.582e^{-80.079t} + 262.513e^{-19.816t}$$
$$i_f(t) = 0.6 + 0.15e^{-160t}$$

como la variación de la velocidad angular, la corriente de la armadura y la corriente del campo, respectivamente. En las figuras 11.7, 11.8*a* y 11.8*b* se muestran las formas de onda. Con base en la figura 11.7 es evidente que la corriente del campo alcanza su estado estable en alrededor de 30 ms, en tanto que la velocidad necesita 300 ms para lograrlo y, por tanto, también la armadura. Esto concuerda con la suposición de que la respuesta mecánica es más lenta en comparación con la respuesta eléctrica que resulta del cambio de estados. Otro hecho importante que se observa en este problema es que la corriente de la armadura se incrementa hasta un valor pico, que está muy por arriba de la especificación del motor. De nuevo, esto se debe principalmente a la constante mecánica de tiempo del motor, que no permite un cambio rápido en la fuerza contraelectromotriz de éste. Por ende, se recomienda que la corriente del campo se modifique gradualmente, de manera que no se presenten corrientes elevadas en el circuito de la armadura. Por último, se advierte que el valor final de la corriente de la armadura es más elevado que el que se tenía antes de reducirse la corriente del campo. La razón estriba en que las pérdidas mecánicas aumentan significativamente con el incremento de la velocidad del motor, lo cual exige un par más elevado. En consecuencia, el incremento del par desarrollado ocasionó un aumento de la corriente de la armadura.

■

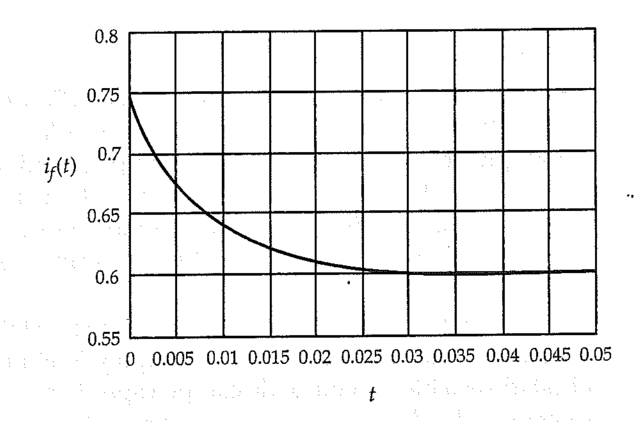


Figura 11.7. La corriente del campo como función del tiempo.

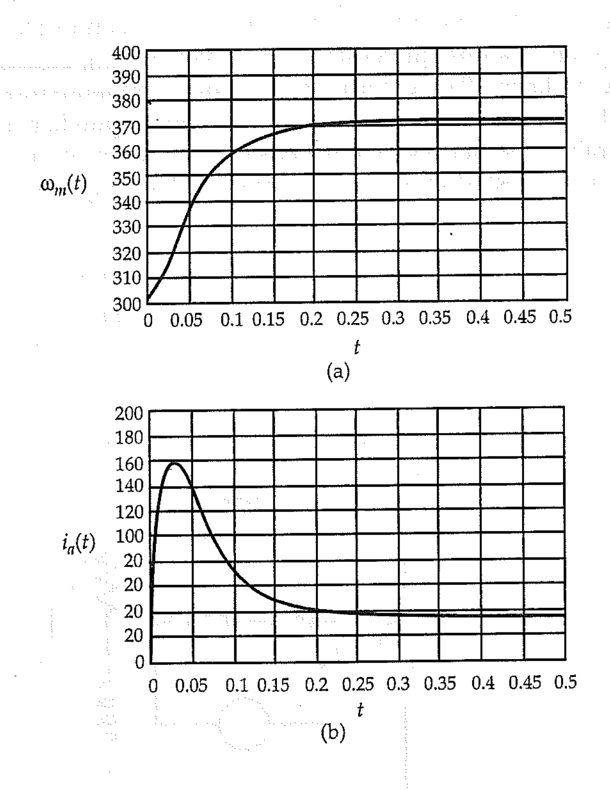


Figura 11.8. Variaciones en **(a)** la velocidad del motor y **(b)** la corriente de la armadura, ambas como función del tiempo.

Ejercicios

11.3. Un motor de cc con excitación independiente, 70% de eficiencia, 24 V, 3 000 rpm y 50 W trabaja en sus condiciones especificadas. Si su velocidad se reduce a 1 500 rpm con carga constante y el tiempo permitido para restablecer el estado estable es de 2 ms, determine su momento de inercia. La resistencia del devanado de la armadura es de 5 Ω. La inductancia de la armadura y el efecto de saturación son despreciables. Suponga un coeficiente de fricción viscosa de 0.001 N • m • s.

11.4. Para que el motor del ejercicio 11.3 funcione a 4 000 rpm sin carga, calcule *a*) la resistencia total en el circuito del campo y *b*) el tiempo que le toma alcanzar el estado estable. El voltaje de campo especificado es 24 V y la resistencia e inductancia del devanado del campo son 250 Ω y 100 mH, respectivamente. El flujo por polo está dado como $\Phi_P = 0.1i_f$.

Dinámica de los generadores de cc

En la figura 11.9 se muestra un generador de cc con excitación independiente entregando potencia a una carga estática. Una vez más, se supone que el generador opera en la región lineal. Para determinar su comportamiento dinámico respecto a los cambios de las corrientes de la armadura y del campo puede realizarse una simplificación considerable si se supone que la velocidad del eje es prácticamente constante.

Durante el estado transitorio, el voltaje del campo es

$$V_f = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \tag{11.18}$$

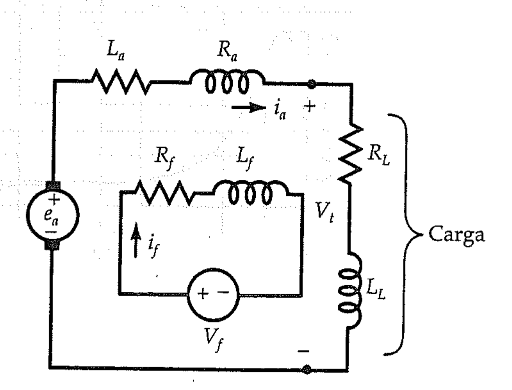


Figura 11.9. Circuito equivalente de un generador de cc con excitación independiente.

y el voltaje generado es

$$e_a(t) = (R_a + R_L)i_a(t) + (L_a + L_L)\frac{di_a(t)}{dt} \tag{11.19}$$

Sin embargo, el voltaje generado puede expresarse como sigue:

$$e_a(t) = K_e i_f(t) \tag{11.20}$$

donde $K_e = K_a K_f \omega_m$ es una constante de proporcionalidad. Al sustituir la ecuación 11.20 en la 11.19 se obtiene

$$K_e i_f(t) = (R_a + R_L)i_a(t) + (L_a + L_L)\frac{di_a(t)}{dt} \tag{11.21}$$

Las ecuaciones 11.18 y 11.21 pueden expresarse en forma de matriz como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_a(t)}{dt} \\ \dfrac{di_f(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a + R_L}{L_a + L_L} & \dfrac{K_e}{L_a + L_L} \\ 0 & -\dfrac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L_f} \end{bmatrix} Vf \tag{11.22}$$

En el conjunto de ecuaciones anterior, las corrientes de la armadura y del campo son las variables de estado y V_f es la variable de entrada.

Partiendo de condiciones iniciales cero, las ecuaciones 11.20 y 11.21 pueden expresarse con la transformada de Laplace como

$$V_f(s) = (R_f + sL_f)I_f(s) \tag{11.23}$$

y

$$K_e I_f(s) = (R_a + R_L + sL_a + sL_L)I_a(s) \tag{11.24}$$

Con base en estas ecuaciones se obtiene

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + sL_f} \tag{11.25}$$

y

$$I_a(s) = \frac{K_e V_f(s)}{(R_f + sL_f)(R_a + R_L + sL_a + sL_L)} \tag{11.26}$$

Ejemplo 11.5

Un generador de cc con excitación independiente que trabaja a 1 500 rpm tiene los parámetros siguientes: $R_f = 3\ \Omega$, $L_f = 25$ mH y $K_e = 30$ V/A. Si se aplica súbitamente un voltaje de 120 V al devanado del campo sin carga, determine *a*) la corriente del campo y el voltaje generado como función del tiempo, *b*) el tiempo aproximado para que se alcance la condición de estado estable y *c*) los valores en estado estable de la corriente del campo y el voltaje inducido.

- Solución

a) De la ecuación 11.25

$$I_f(s) = \frac{\frac{120}{s}}{3 + 0.025s}$$
$$= \frac{40}{s} - \frac{40}{s+120}$$

Por tanto, la corriente del campo es

$$i_f(t) = 40(1 - e^{-120t})\text{ A} \qquad \text{para } t \geq 0$$

y el voltaje generado es

$$e_a(t) = K_e i_f(t) = 1\,200(1 - e^{-120t})\text{ V} \qquad \text{para } t \geq 0$$

En las figuras 11.10 y 11.11 se muestran las gráficas de i_f y e_a, respectivamente.

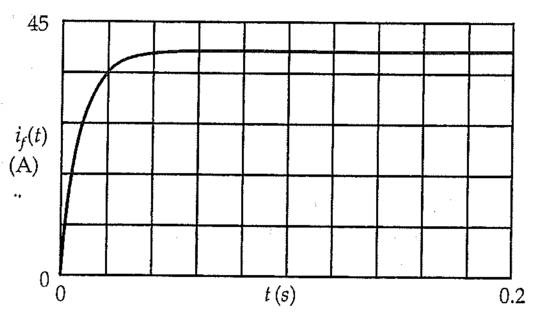


Figura 11.10. La corriente del campo como función del tiempo.

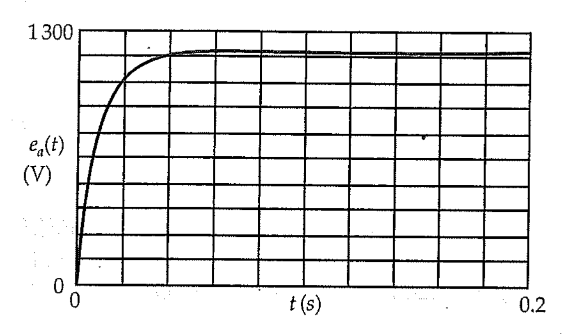


Figura 11.11. El voltaje inducido como función del tiempo.

b) Para todo fin práctico, la corriente del campo alcanza su valor de estado estable después de cinco constantes de tiempo. Luego, el tiempo requerido para alcanzar el estado estable es

$$T = \frac{5}{120} = 0.0417\ s \qquad \text{o} \qquad 41.7 \text{ ms}$$

c) Los valores finales de la corriente del campo y el voltaje inducido (sin carga) son $I_f = 40$ A y $E_a = 1\,200$ V, respectivamente.

■

Ejercicio

11.5. Desarrolle un modelo matemático que represente el estado dinámico de un generador de cc que alimenta un motor de cc. Establezca las ecuaciones diferenciales en forma de matriz. Desprecie la saturación del núcleo magnético y suponga que la corriente del campo del motor y la velocidad del generador son constantes.

Análisis numérico de la dinámica de un motor de cc

Hasta ahora hemos obtenido la solución en forma cerrada para la respuesta dinámica de motores de cc usando la técnica de la transformada de Laplace. Recurrimos a un método numérico para obtener la respuesta dinámica cuando la máquina trabaja en condiciones no lineales. En esta sección nuestro objetivo consiste en investigar la respuesta dinámica de máquinas de cc con la resolución numérica de ecuaciones diferenciales empleando el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden. Sin embargo, antes de aplicarlo lo explicaremos brevemente.

Algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden

Consideremos un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden escritas en forma de matriz como

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \tag{11.27}$$

donde $\underline{x}(t)$ es un vector de variable de estado (matriz columna) y $\underline{u}(t)$ es el vector de la variable de entrada. A y B son matrices de coeficientes constantes que incluyen los parámetros del sistema. La solución de la ecuación 11.27 puede darse en instantes definidos de tiempo, como se ilustra en seguida:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \frac{\underline{K}_1 + 2\underline{K}_2 + 2\underline{K}_3 + \underline{K}_4}{6} \tag{11.28}$$

donde $\underline{x}_n$ y $\underline{x}_{n+1}$ son los valores del vector de la variable de estado en los instantes n y $n + 1$, respectivamente. $\underline{K}_1$, $\underline{K}_2$, $\underline{K}_3$ y $\underline{K}_4$ son vectores constantes calculados en instantes definidos de tiempo, según se ilustra a continuación.

Sea

$$f(\underline{x}_n) = A\underline{x}_n + B\underline{u}_n \tag{11.29}$$

por tanto,

$$\underline{K}_1 = hf(\underline{x}_n) \tag{11.30a}$$

$$\underline{K}_2 = hf(\underline{x}_n + 0.5\underline{K}_1) \tag{11.30b}$$

$$\underline{K}_3 = hf(\underline{x}_n + 0.5\underline{K}_2) \tag{11.30c}$$

$$\underline{K}_4 = hf(\underline{x}_n + \underline{K}_3) \tag{11.30d}$$

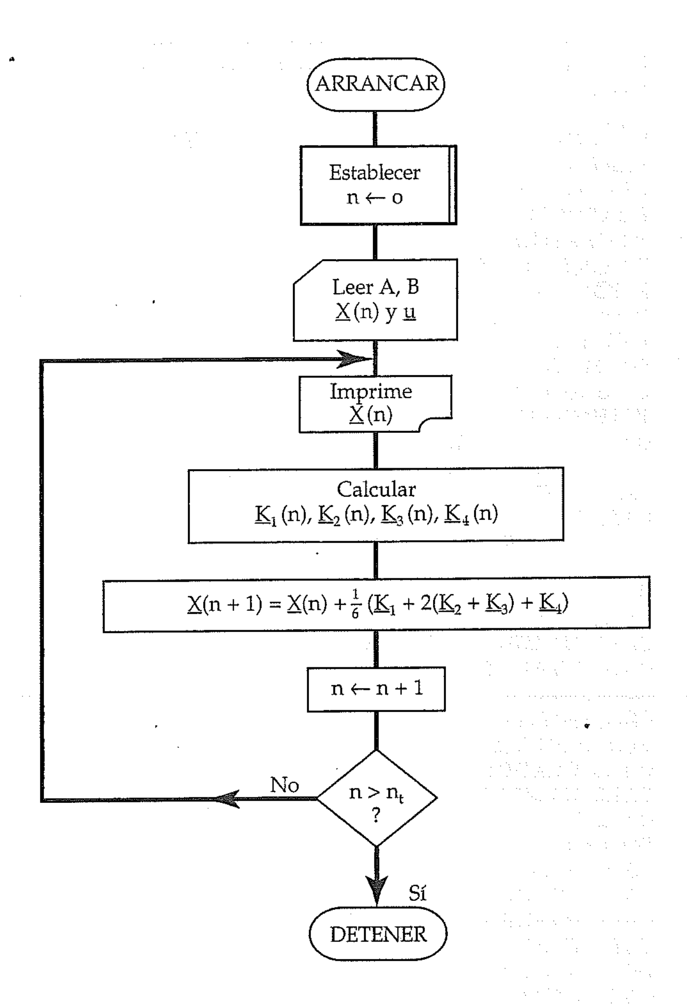


Figura 11.12. Diagrama de flujo del algoritmo de Runge-Kutta.

donde h es la longitud del paso, que se expresa como el tiempo entre dos instantes definidos. La longitud del paso es muy dependiente de las constantes de tiempo del sistema. En general, h se elige menor que la constante de tiempo más pequeña del sistema a fin de mantener la estabilidad del método numérico. En la figura 11.12 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo, en tanto que en la 11.13 se proporciona la muestra de un programa escrito en Fortran. En total, hay cinco conjuntos de entradas a las matrices del programa A y B, las variables de entrada y los valores para la longitud del paso y el tiempo total de respuesta.

El algoritmo de Runge-Kutta es tan general que puede usarse para resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales, no lineales o ambas. En el ejemplo de la siguiente página se ilustra la aplicación del método de Runge-Kutta para un sistema lineal.

```
      DIMENSION A(2,2) ,X(2) ,B(2,2) ,AX(2) ,BU(2) ,F(2) ,C1(2) ,C2(2) ,C3(2) ,
     *C4(2) ,G(2) ,XG(2) ,U(2)
      N=2
      READ(5,100) ((A(I ,J) ,J=1 ,N) , I=1 ,N)
      READ(5,100) (X(I) ,I=1 ,N)
      READ(5,100) ((B(I ,J) ,J=1 ,N) ,I=1 ,N)
      READ(5,100) (U(I) ,I=1 ,N)
100   FORMAT(2F10.3)
      READ(5,110) T ,H
110   FORMAT (2F15.9)
      M=T/H
      WRITE(6,115) M
115   FORMAT(15)
      DO 5 K=1 ,M
      TS=H*(K-1)
      CALL PLOT(TS ,X(1))
      CALL MVMULT(A,X,AX,N)
      CALL MVMULT(B,U,BU,N)
      CALL VVADDT(AX,BU,F,N)
      DO 10 I=1 ,N
      C1(I)=H*F(I)
10    G(I)=0.5*C1(I)
      CALL VVADDT(X,G,XG,N)
      CALL MVMULT(A,XG,AX,N)
      CALL VVADDT(AX,BU,F,N)
      DO 11 I=1 ,N
      C2(I)=H*F(I)
11    G(I)=0.5*C2(I)
      CALL VVADDT(X,G,XG,N)
      CALL MVMULT(A,XG,AX,N)
      CALL VVADDT(AX,BU,F,N)
      DO 12 I=1 ,N
12    C3(I)=H*F(I)
      CALL VVADDT(X,C3,XG,N)
      CALL MVMULT(A,XG,AX,N)
      CALL VVADDT(AX,BU,F,N)
      DO 13 I = 1,N
13    C4(I) = H*F(I)
      DO 15 I =1,N
15    X(I)=X(I)+(1./6.)*(C1(I)+2.*(C2(I)+C3(I))+C4(I))
5     CONTINUE
      END
      SUBROUTINE MVMULT(A,B,C,N)
      DIMENSION A(N,N) ,B(N) ,C(N)
      DO 5 I=1 ,N
      C(I) = 0.0
      DO 5 J =1 ,N
5     C(I)=C(I) + A(I ,J)*B(J)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE VVADDT(A,B,C,N)
      DIMENSION A(N) ,B(N) ,C(N)
      DO 5 I =1 ,N
5     C(I)=A(I) + B(I)
      RETURN
      END
```

Figura 11.13. Programa de cómputo para resolver las ecuaciones de estado.

Ejemplo 11.6

Los parámetros de un motor de imanes permanentes (PM) de 240 V son $R_a = 0.3\ \Omega$, $L_a = 2$ mH, $K = 0.8$ y $J = 0.0678$ kg • m^2. Determine la velocidad del motor y la corriente de la armadura como función del tiempo cuando el motor se sujeta a un par de 100 N • m después de 200 ms del arranque sin carga. Considere una longitud de paso de 0.01 s y observe la respuesta durante un periodo de 0.5 s. Desprecie las pérdidas por fricción y suponga que el motor opera en la región lineal.

- **Solución**

Con base en la ecuación 11.3, para $t < 200$ ms se tiene

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix}, \qquad \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 240 \end{bmatrix}$$

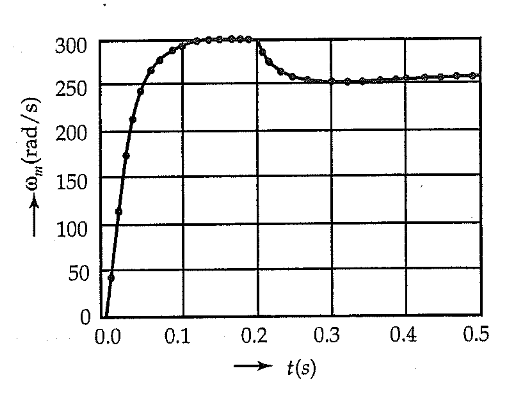
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11.8 \\ -400 & -150 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -14.75 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}$$

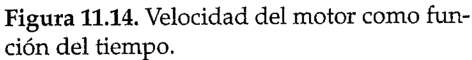
con valores iniciales de $\omega_m(0) = 0$ e $i_a(t) = 0$.

Para $t > 200$ ms,

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 100 \\ 240 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{x}(0.2) = \begin{bmatrix} 299.93 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Las formas de onda calculadas de la velocidad y de la corriente de la armadura se muestran en las figuras 11.14 y 11.15, respectivamente.




Figura 11.14. Velocidad del motor como función del tiempo.

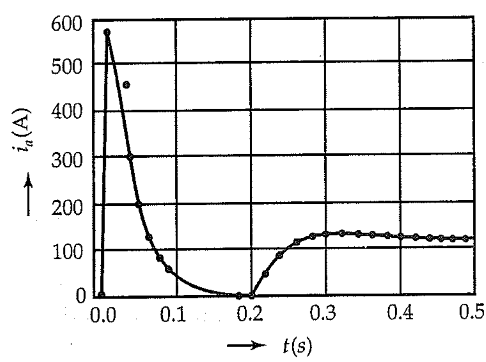


Figura 11.15. Corriente de la armadura como función del tiempo.

Ejercicios

11.6. Un generador de cc con excitación independiente está conectado a la armadura de un motor de cc con excitación independiente. Todo el sistema está en reposo. Cuando $t = 0$, el devanado del campo del generador se conecta a un suministro de 240 V cuando gira a 1 500 rpm. El motor opera sin carga cuando su devanado del campo conduce 1 A. Los parámetros del generador son $R_a = 1.5\ \Omega$, $L_a = 11$ mH, $J = 0.07$ kg • m^2, $K_a = 360$, $R_f = 90\ \Omega$ y $L_f = 100$ mH. El flujo por polo en el generador varía como $0.2\ i_f$. Los parámetros del motor son $R_a = 7\ \Omega$, $L_a = 15$ mH, $J = 0.08$ kg • m^2, $K = 5.5$ y $D = 0.015$ N • m • s. Escriba el programa de cómputo para predecir la corriente de la armadura y la velocidad del motor.

11.7. El motor del ejemplo 11.6 impulsa un ventilador cuya característica velocidad-par puede aproximarse como $T_L = 0.5\ \omega_m$. Escriba un programa de cómputo para determinar la velocidad del motor y la corriente en su armadura.

11.3. Dinámica del generador síncrono

Siempre que ocurra un cambio súbito en el par aplicado al rotor o en la corriente suministrada por el generador, este último necesita un tiempo finito antes de alcanzar su nueva condición de estado estable. La operación del generador durante ese periodo finito se llama *operación transitoria*. En realidad, hay dos tipos de operación transitoria de un generador síncrono: un *transitorio eléctrico* y un *transitorio mecánico*.

Transitorios eléctricos

El transitorio más severo que puede ocurrir en un generador síncrono es el desarrollo de un cortocircuito súbito a través de sus tres terminales. Si esto sucede en un generador que esté operando a la velocidad síncrona en condición sin carga, la corriente en cada fase, que se muestra en la figura 11.16, se sostiene por el voltaje generado E_Φ de la máquina. En la figura 11.16 puede ser sorprendente observar que cada corriente de fase tiene una componente de cc decayendo aun cuando sólo están presentes voltajes de ca en el circuito de la armadura. La razón de esto estriba en que la máquina intenta mantener concatenamientos constantes de flujo para cada una de las tres fases. Otra observación sobre la figura 11.16 es que las formas de onda no son simétricas respecto al eje cero.

Sin embargo, puede obtenerse una forma de onda simétrica si se resta la componente de cc, como se ilustra en la figura 11.17. Es práctica común examinar la forma de onda dividiéndola en tres periodos: *subtransitorio*, *transitorio* y de *estado estable*. Durante el periodo subtransitorio, la disminución de la corriente es muy rápida y

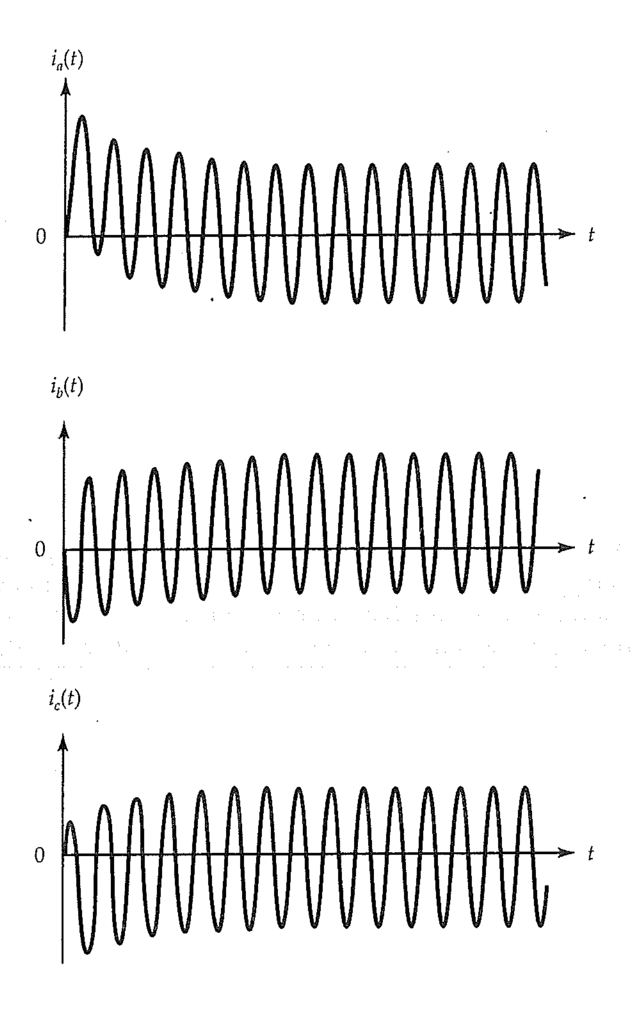


Figura 11.16. Corrientes de fase en el devanado de la armadura después de un cortocircuito trifásico súbito a través de las terminales de un generador síncrono que trabaja sin carga.

dura sólo unos cuantos ciclos. Por otro lado, el periodo transitorio abarca un tiempo mayor con una tasa menor de disminución de la corriente. Finalmente, durante el periodo de estado estable la corriente está determinada por el voltaje generado y la reactancia síncrona de la máquina. En la figura 11.18 se muestran los tres periodos de la envolvente con decadencia exponencial de la corriente simétrica de cortocircuito, utilizando una gráfica semilogarítmica. En seguida pueden determinarse las reactancias equivalentes que controlan la corriente durante los periodos subtransitorio y transitorio.

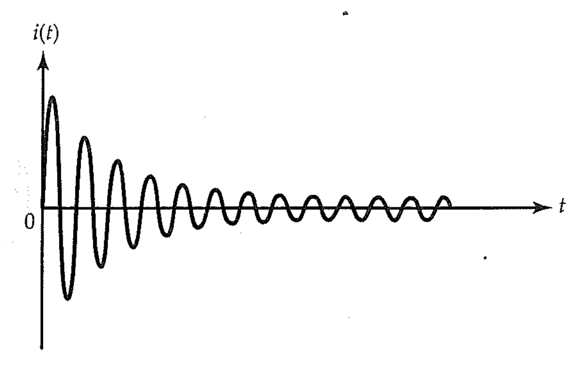


Figura 11.17. Corriente simétrica de cortocircuito.

A fin de simplificar el desarrollo teórico, supongamos que el generador opera en la región lineal de su característica de magnetización y que las resistencias del devanado son despreciables. Supongamos también que la máquina no emplea ningún devanado de amortiguamiento. Exactamente antes del cortocircuito, los concatenamientos totales de flujo del devanado del campo son

$$\lambda_f = N_f \Phi_f = L_f I_f \tag{11.31}$$

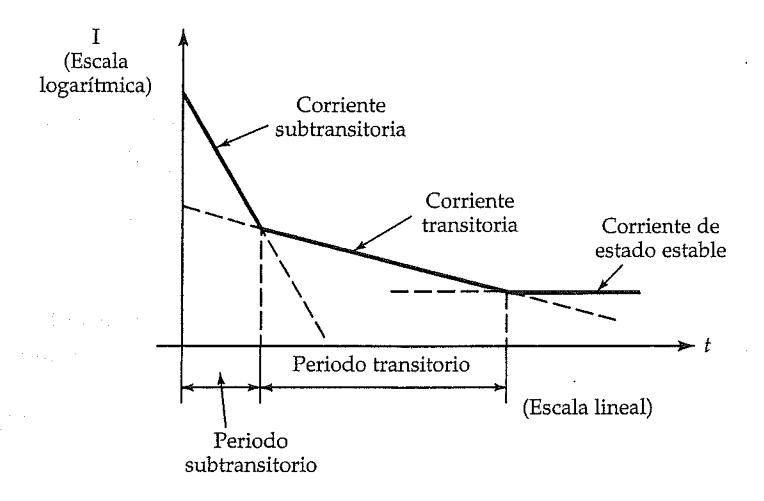


Figura 11.18. Gráfica semilogarítmica de la envolvente de la corriente de cortocircuito simétrica.

donde I_f es la corriente del campo y L_f es la inductancia efectiva del devanado del campo. La ecuación 11.31 también puede expresarse como sigue:

$$\lambda_f = (L_{lf} + L_{af})I_f \tag{11.32}$$

después de representar la inductancia efectiva L_f como la suma de la inductancia de dispersión L_{lf} del devanado del campo y la inductancia mutua L_{af} entre los devanados del campo y de la armadura. Como el generador ha estado operando sin carga antes del cortocircuito, el concatenamiento de flujo debido al devanado de la armadura es

$$\lambda_a = 0 \tag{11.33}$$

Cuando ocurre un cortocircuito trifásico a través de las terminales de la armadura en $t = 0$, los ejes magnéticos del devanado del campo y del devanado de la armadura, por ejemplo la fase a, se consideran ortogonales, de acuerdo con la ecuación 11.33, según se indica en la figura 11.19. Después de un tiempo breve, el rotor alcanza cierta posición angular α respecto al eje magnético del devanado de la fase a y origina corrientes de i_a e $I_f + i_f$ en la fase a y el devanado de campo, respectivamente, con objeto de mantener los mismos concatenamientos de flujo total. Los concatenamientos de flujo para la fase a pueden expresarse como

$$\lambda_a = i_a(L_{la} + L_{af}) + (I_f + i_f)L_{af} \operatorname{sen}(90° - \alpha) = 0 \tag{11.34}$$

donde L_{la} es la inductancia de dispersión de la fase a.

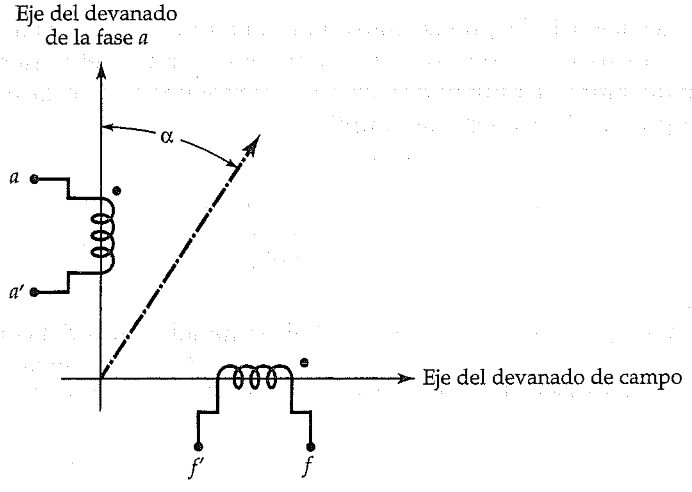


Figura 11.19. Posiciones relativas de los devanados de fase y de campo en el inicio ($t = 0$) de un cortocircuito.

Los concatenamientos de flujo asociados con el devanado de campo son

$$\lambda_f = (I_f + i_f)(L_{lf} + L_{af}) + L_{af} i_a \text{ sen } (90° - \alpha) \tag{11.35}$$

Con base en las ecuaciones 11.32, 11.34 y 11.35 puede demostrarse que

$$i_a = \frac{L_{af} I_f (L_{lf} + L_{af}) \text{ sen } (90° - \alpha)}{L_{af}^2 \text{ sen } (90° - \alpha) - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})} \tag{11.36}$$

y

$$i_f = -\frac{L_{af}^2 \text{ sen}^2 (90° - \alpha) I_f}{L_{af}^2 \text{ sen}^2 (90° - \alpha) - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})} \tag{11.37}$$

La condición transitoria más severa ocurre cuando las corrientes son máximas. Con base en las ecuaciones anteriores, las corrientes son máximas cuando $\alpha = 0$. Por tanto, a la condición más severa corresponde

$$i_a = \frac{L_{af} I_f (L_{lf} + L_{af})}{L_{af}^2 - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})} \tag{11.38}$$

y

$$i_f = -\frac{I_f L_{af}^2}{L_{af}^2 - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})} \tag{11.39}$$

La ecuación 11.38 puede usarse para determinar la *reactancia transitoria* del generador síncrono que rige su comportamiento durante el periodo transitorio. Multiplicando tanto el numerador como el denominador de la ecuación 11.38 por ω^2 y después de hacer algunas simplificaciones se obtiene

$$i_a = -\frac{E_\phi (X_{lf} + X_{af})}{X_{lf} X_{la} + X_{lf} X_{af} + X_{af} X_{la}} \tag{11.40}$$

donde $E_\phi = I_f \omega L_{af} = I_f X_{af}$ es el voltaje generado antes del cortocircuito en condición sin carga. La reactancia transitoria puede definirse como la razón del voltaje sin carga a la corriente de cortocircuito durante el periodo transitorio, o

$$\frac{E_\phi}{-i_a} = X_d' = X_{la} + \frac{X_{af} X_{lf}}{X_{af} + X_{lf}} \tag{11.41}$$

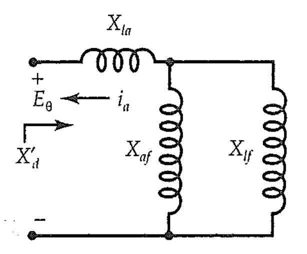


Figura 11.20. Circuito equivalente de la reactancia transitoria.

y la representación de su circuito equivalente se aprecia en la figura 11.20. Observe que E_ϕ e i_a son los valores pico del voltaje generado y de la corriente de la armadura, respectivamente.

En la explicación previa se supuso que no había devanado de amortiguamiento en el rotor. Si se tiene en cuenta el efecto del devanado de amortiguamiento, con un enfoque similar al usado para desarrollar la reactancia transitoria, se obtiene

$$\frac{E_\phi}{-i_a} = X''_d = X_{la} + \frac{X_{af}X_{lf}X_{ld}}{X_{lf}X_{ld} + X_{af}X_{ld} + X_{af}X_{lf}} \tag{11.42}$$

a la que se llama *reactancia subtransitoria*. En esta expresión, i_a es la corriente que corresponde al periodo subtransitorio y X_{ld} es la reactancia de dispersión del devanado de amortiguamiento y puede incluirse en el circuito equivalente, como se muestra en la figura 11.21. Con base en las figuras 11.20 y 11.21 resulta evidente que X''_d es más pequeña que X'_d. Por tanto, durante los primeros escasos ciclos posteriores al desarrollo del cortocircuito, la corriente de la armadura es muy grande y se conoce como *corriente subtransitoria*, cuyo valor medio cuadrático (rms) está dado por

$$I''_d = \frac{E_\phi}{\sqrt{2}X''_d} \tag{11.43}$$

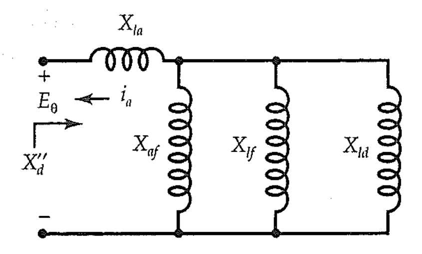


Figura 11.21. Circuito equivalente de la reactancia subtransitoria.

El fin del periodo subtransitorio marca el principio del periodo transitorio y el valor medio cuadrático (rms) de la *corriente transitoria* es

$$I'_d = \frac{E_\phi}{\sqrt{2}X'_d} \tag{11.44}$$

El periodo transitorio dura típicamente de siete a 10 ciclos. A la corriente transitoria le sigue la corriente de estado estable controlada por la reactancia síncrona de la máquina y su valor medio cuadrático (rms) es

$$I_d = \frac{E_\phi}{\sqrt{2}X_s} \tag{11.45}$$

Ha de tenerse en mente que nuestra explicación de los transitorios eléctricos supone que las tres fases del generador síncrono desarrollan el cortocircuito al mismo tiempo. Si el corto ocurre sólo en una o dos fases, la naturaleza de la respuesta es más compleja y su explicación queda fuera del alcance de esta obra.

Ejemplo 11.7

Los parámetros por unidad de un generador síncrono de 60 Hz, 71 500 kVA, 13 800 V, cos θ = 0.8 son: X_{af} = 0.57 pu, X_{la} = 0.125 pu, X_{lf} = 0.239 pu y X_{ld} = 0.172 pu. Calcule los valores medios cuadráticos (rms) de las corrientes subtransitorias y transitorias si ocurre un cortocircuito en las tres fases a través de las terminales de la armadura, al tiempo que la máquina trabaja sin carga.

- Solución

Para calcular la corriente subtransitoria de cortocircuito primero debe determinarse la reactancia subtransitoria con base en la ecuación 11.42, como sigue:

$$X''_d = 0.125 + \frac{0.57 \times 0.239 \times 0.172}{(0.239 \times 0.172) + (0.57 \times 0.172) + (0.57 \times 0.239)} = 0.21 \text{ pu}$$

El voltaje generado, E_ϕ = 1 pu, ocurre al voltaje medio cuadrático (rms) especificado exactamente antes del cortocircuito. Luego,

$$I''_d = \frac{1}{0.21} = 4.76 \text{ pu}$$

En forma similar la reactancia transitoria de la ecuación 11.41 puede obtenerse como sigue:

$$X'_d = 0.125 + \frac{0.57 \times 0.239}{0.57 + 0.239} = 0.29 \text{ pu}$$

y la corriente transitoria como sigue:

$$I'_d = \frac{1}{0.29} = 3.45 \text{ pu}$$

Todas las corrientes anteriores están normalizadas respecto a los valores nominales (especificados) del generador. Por tanto, si se calcula la corriente nominal pueden determinarse las corrientes subtransitoria y transitoria en amperes, como sigue:

$$I_{\text{nominal}} = \frac{71\,500 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 13\,800} = 2\,991.34 \text{ A}$$

$$I''_d = 4.76 \times 2\,991.34 = 14\,238.79 \text{ A}$$

$$I'_d = 3.45 \times 2\,991.34 = 10\,320.14 \text{ A}$$

■

Transitorios mecánicos

Examinemos ahora el transitorio mecánico en un generador síncrono que podría ser causado por una alteración mayor, como un transitorio eléctrico que se presente a través de las terminales de su armadura. Aun cuando un transitorio mecánico se desarrolla lentamente debido a la elevada inercia, es uno de los transitorios más peligrosos porque puede causar la autodestrucción del generador.

Imaginemos que un generador síncrono está conectado a un *bus-bar*[1] infinito y que está suministrando la energía requerida. En condiciones de estado estable, su voltaje en las terminales y frecuencia son los mismos que en el bus-bar (barras colectoras). Por tanto, un impulsor primario debe hacerlo girar a su velocidad síncrona. Cualquier intento de incrementar la velocidad del generador se traduce en energía eléctrica desarrollada por él. Por consiguiente, en condiciones de estado estable la potencia de salida del generador es igual a la potencia de entrada si se desprecian las pérdidas.

Consideremos que ocurre una modificación repentina en la potencia suministrada por el generador. Un cambio súbito en la potencia desarrollada necesita un cambio igualmente repentino en el ángulo de potencia δ. Sin embargo, δ no puede cambiar súbitamente debido a la inercia del rotor. Esto conduce a una situación en la que la potencia de entrada no es igual a la potencia de salida. La diferencia entre ellas origina un cambio en la energía cinética del rotor, lo que afecta su velocidad. Durante este periodo transitorio, el rotor desacelera o acelera hasta que las potencias de entrada y sa-

[1] Un bus-bar infinito es un conjunto de barras que tiene voltaje constante a frecuencia constante.

lida se igualan nuevamente. Cuando eso sucede, el rotor recupera su velocidad síncrona. Un fenómeno similar de ajustes de velocidad también tiene lugar cuando se desarrolla un cortocircuito repentino a través de las terminales del generador.

Durante el estado transitorio, el par en la máquina puede expresarse como

$$T_m = T_d(t) + D\omega_m(t) + J\frac{d\omega_m(t)}{dt} \qquad (11.46)$$

donde T_m es el par mecánico aplicado al generador y $T_d(t)$ es el par desarrollado en el generador síncrono en un momento dado.

En ausencia de pérdidas por rotación, la ecuación 11.46 puede reformularse como sigue:

$$J\frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m - T_d(t)$$

o

$$J\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = T_m - T_d(t) \qquad (11.47)$$

donde $\omega_m(t) = d\theta_m/dt$ y θ_m es el desplazamiento angular del rotor respecto al marco de referencia estacionario. $\theta_m(t)$ puede expresarse matemáticamente como sigue:

$$\theta_m(t) = \omega_s t + \delta_m(t) \qquad (11.48)$$

donde $\delta_m(t)$ es el ángulo de potencia en cualquier tiempo t.

Al calcular la segunda derivada de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} \qquad (11.49)$$

La ecuación 11.47 puede expresarse como:

$$J\frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = T_m - T_d(t) \qquad (11.50)$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación 11.50 por la velocidad del rotor, $\omega_m(t)$, se obtiene

$$J\omega_m(t)\frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = \omega_m(t)T_m - \omega_m(t)T_d(t)$$

o

$$J\omega_m(t)\frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = P_m(t) - P_{dm} \text{ sen } \delta_m(t) \quad (11.51)$$

donde

$$P_{dm} = \frac{3V_1E_\phi}{X_s}$$

es la potencia máxima desarrollada por un generador síncrono de rotor cilíndrico, como se estudió en el capítulo 7. Observe que $J\omega_m(t)$ es el momento angular, $M(t)$.

La ecuación 11.51 puede expresarse en términos de cantidades por unidad respecto a la potencia especificada del generador síncrono, S_n, como sigue:

$$\frac{J\omega_m(t)}{S_n}\frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = \frac{P_m(t)}{S_n} - \frac{P_{dm}}{S_n} \text{ sen } \delta_m(t) \quad (11.52)$$

Definamos la constante de inercia del generador como sigue:

$$H = \frac{1}{2}\frac{J\omega_s^2}{S_n} = \frac{1}{2}\frac{J\omega_m^2}{S_n} \quad (11.53)$$

En la ecuación 11.53, la velocidad síncrona ha sido sustituida por la velocidad del rotor sin introducir ningún error significativo. Al hacerlo, estamos suponiendo que el momento angular es constante. En términos de la constante de inercia del generador, la ecuación 11.52 puede expresarse como

$$\frac{2H}{\omega_s}\frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = p_m - p_{dm} \text{ sen } \delta_m(t) \quad (11.54)$$

donde p_m y p_{dm} son las potencias por unidad (pu). La ecuación 11.54 es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden; se conoce como *ecuación de vaivén* en términos de cantidades por unidad y ayuda a determinar la estabilidad del generador síncrono durante el estado transitorio. La ecuación de vaivén puede resolverse numéricamente mediante el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden antes descrito. En aras de la simplicidad, la ecuación de vaivén puede hacerse lineal aproximando sen $\delta_m(t)$ como $\delta_m(t)$ siempre que $\delta_m(t)$ sea un ángulo pequeño.

Criterio del área igual

El *criterio del área igual* es otro método que se emplea comúnmente para determinar la estabilidad de un generador síncrono durante un estado transitorio.

En la figura 11.22 se muestra la potencia desarrollada por un generador síncrono de rotor cilíndrico. Supóngase que el generador trabaja con una potencia p_0 corres-

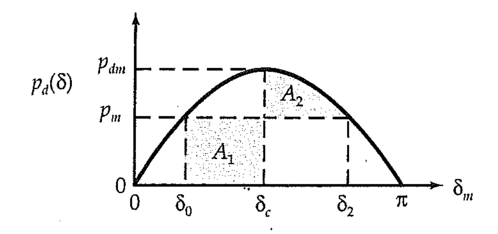


Figura 11.22. Potencia desarrollada en un generador síncrono de rotor cilíndrico como función del ángulo de potencia.

pondiente al ángulo de potencia δ_0. En el caso de una máquina sin pérdidas, la potencia mecánica de entrada debe ser igual a la potencia de salida o a la potencia desarrollada en estado estable. Si ocurre un cortocircuito súbito en las tres fases, la potencia desarrollada se vuelve cero al desconectarse la máquina del *bus-bar* (barras colectoras) por medio de un sistema automático de protección. Después del comienzo del cortocircuito, la ecuación 11.54 debe modificarse a

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{\omega_s}{2H} p_m \tag{11.55}$$

puesto que el impulsor primario aún está suministrando energía mecánica al generador. De la ecuación anterior se obtiene

$$\omega_m(t) = \omega_s + \frac{\omega_s}{2H} p_m t \tag{11.56}$$

Es notorio que la velocidad del eje es mayor que la velocidad síncrona y que aumenta con el tiempo, lo que indica que la máquina puede salirse de control. Si no se corrige el cortocircuito en un lapso breve (de aproximadamente seis ciclos) y el generador no se reconecta al *bus-bar* (barras colectoras), el generador podría autodestruirse. Con base en la ecuación 11.56, la variación en el ángulo de potencia es

$$\delta_m(t) = \delta_0 + \frac{\omega_s}{4H} p_m t^2 \tag{11.57}$$

donde δ_0 es el ángulo de potencia en el momento en que ocurre el cortocircuito.

Si la falla se corrige en el instante t_c, el generador iniciará desarrollando potencia a un nivel más elevado que el del estado anterior a la falla, ya que $\delta_m(t_c)$ es mayor que δ_0, como resulta evidente en la ecuación 11.57. Esto ocasiona que el rotor desacelere.

Con base en la ecuación 11.48,

$$\frac{d\delta_m(t)}{dt} = \frac{d\theta_m(t)}{dt} - \omega_s = \omega_m(t) - \omega_s \tag{11.58}$$

y la ecuación de vaivén puede reformularse como

$$\frac{2H}{\omega_s}\frac{d\omega_m(t)}{dt} = p_m - p_d \tag{11.59}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación 11.59 por $d\delta_m(t)/dt$ y luego sustituir $\delta_m(t)/dt$ en el miembro izquierdo de la ecuación 11.58 se obtiene

$$\frac{H}{\omega_s}\left[2\omega_m\frac{d\omega_m}{dt} - 2\omega_s\frac{d\omega_m}{dt}\right] = (p_m - p_d)\frac{d\delta_m}{dt} \tag{11.60}$$

Al integrar la ecuación 11.60 se obtiene

$$\frac{H}{\omega_s}\left[\int_{\omega m1}^{\omega m2} 2\omega_m\, d\omega_m - \int_{\omega m1}^{\omega m2} 2\omega_s\, d\omega_m\right] = \int_{\delta_0}^{\delta_2}(p_m - p_d)\, d\delta_m$$

o

$$\frac{H}{\omega_s}[(\omega_{m2}^2 - \omega_{m1}^2) - 2\omega_s(\omega_{m2} - \omega_{m1})] = \int_{\delta_0}^{\delta_2}(p_m - p_d)\, d\delta_m \tag{11.61}$$

donde ω_{m1} es la velocidad angular antes del inicio del cortocircuito y ω_{m2} es la velocidad angular correspondiente al valor máximo de δ_2 después de que se ha corregido el cortocircuito. Como no hay cambio en el ángulo de potencia antes de que ocurra la falla, de la ecuación 11.58 se tiene $\omega_{m1} = \omega_s$. Por otro lado, cuando el valor del ángulo de potencia δ_2 es máximo, $d\delta_m/dt = 0$. Por tanto, de la ecuación 11.58, $\omega_{m2} = \omega_s$.

En consecuencia, de la ecuación 11.61,

$$\int_{\delta_0}^{\delta_2}(p_m - p_d)\, d\delta_m = 0 \tag{11.62}$$

La ecuación 11.62 puede reacomodarse y expresarse como sigue:

$$\int_{\delta_0}^{\delta_c}(p_m - p_d)\, d\delta_m = \int_{\delta_c}^{\delta_2}(p_d - p_m)\, d\delta_m \tag{11.63}$$

donde δ_c es el ángulo de potencia en el instante t_c, cuando la falla se corrige. La ecuación 11.63 indica con claridad que el área A_1 de la figura 11.22 que corresponde al miembro izquierdo de la ecuación es igual al área A_2 de la figura 11.22 equivalente al miembro derecho.

Ejemplo 11.8

Un generador síncrono, tetrapolar, de 1 000 kVA, 4.6 kV y 60 Hz entrega 0.9 por unidad (pu) de potencia promedio con un ángulo de potencia de 18° cuando ocurre un cortocircuito trifásico a través de sus terminales. Calcule *a*) la potencia generada por unidad por el generador cuando la falla se corrige cuatro ciclos después de su inicio y *b*) el tiempo crítico para eliminar la falla con objeto de no perder la estabilidad. La constante de inercia es de 10 J/VA.

● **Solución**

La velocidad síncrona de la máquina es $N_s = \dfrac{60 \times 120}{4} = 1\,800$ rpm

$$\omega_s = \frac{2\pi \times 1\,800}{60} = 188.5 \text{ rad/s}$$

$$p_{dm} = \frac{0.9}{\text{sen } 18°} = 2.91 \text{ pu}$$

El tiempo de corrección de la falla es de cuatro ciclos; luego, $t_c = 4(1/60) = 66.68$ ms. El ángulo inicial del rotor es de $\delta_0 = 18° = 0.314$ rad. Por la ecuación 11.47, el ángulo del rotor en el momento que se corrige la falla es

$$\begin{aligned}\delta_m(66.68 \text{ ms}) &= 0.314 + \frac{188.5}{4 \times 10} \times 0.9 \times (66.68 \times 10^{-3})^2 \\ &= 0.333 \text{ rad} \quad \text{o} \quad 19.07°\end{aligned}$$

a) La potencia generada es

$$p_d = 2.91 \text{ sen } 19.07° = 0.95 \text{ pu}$$

b) Después de que ocurre la falla, la potencia desarrollada p_d para los miembros izquierdo y derecho del criterio del área igual dado en la ecuación 11.63 se convierte en $p_d = 0$ y $p_d = p_{dm}$ sen δ_m, respectivamente.

Por tanto,
$$\int_{\delta_0}^{\delta_c} p_m \, d\delta_m = \int_{\delta_c}^{\delta_2} p_{dm} \text{ sen } \delta_m \, d\delta_m - \int_{\delta_c}^{\delta_2} P_m \, d\delta_m$$

o
$$\cos \delta_c = \frac{p_m}{p_{dm}}(\delta_2 - \delta_0) + \cos \delta_2$$

donde $\delta_2 = \pi - \delta_0$, con base en la figura 11.22.

Luego, $$\cos\ \delta_c = \frac{0.9}{2.91}(2.83 - 0.314) + \cos\ (2.83) = -0.174$$

y $$\delta_c = 100° \quad \text{o} \quad 1.745 \text{ rad}$$

Con la ecuación 11.57, el tiempo crítico de corrección de la falla puede obtenerse como sigue:

$$t_c = \sqrt{(\delta_c - \delta_0)\frac{4H}{\omega_s p_m}} = \sqrt{(1.745 - 0.314)\frac{4 \times 10}{188.5 \times 0.9}}$$

$$= 0.581 \text{ s}$$

■

Ejercicios

11.8. Deduzca la ecuación 11.42 si está presente el devanado amortiguador en el rotor y su reactancia de dispersión se da como X_{ld}.

11.9. Un hidrogenerador (generador síncrono que se usa en las plantas hidroeléctricas) de 30 MVA, 13 kV y 60 Hz tiene los parámetros siguientes: $X_s = 1.0$ pu, $X_d' = 0.35$ pu y $X_d'' = 0.25$ pu. Las reactancias están normalizadas con base en las especificaciones del generador. Este generador entrega la potencia nominal a una carga, al voltaje especificado, con un factor de potencia de 0.85 en atraso. *a*) Calcule la corriente en el devanado de la armadura. *b*) Calcule las corrientes subtransitoria y transitoria en el devanado de la armadura cuando se presenta un cortocircuito súbito en las tres fases a través de las terminales del generador.

11.10. Un generador síncrono, tetrapolar, de 60 Hz, 50 MVA y 12.5 kV con una constante de inercia de $H = 10$ J/VA entrega la potencia especificada con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Súbitamente, debido a una falla en el sistema la carga en el generador se reduce 20% de su valor especificado. Calcule el par de aceleración después de la falla. Desprecie las pérdidas y suponga una potencia de entrada constante al generador.

Resumen

Cuando las condiciones en que opera una máquina eléctrica cambian abruptamente, no puede responder de manera instantánea al cambio debido a la inercia. Así, la máquina pasa por un estado transitorio (dinámico) para reajustar el equilibrio de energía desde el momento en que comienza el cambio hasta que se alcanza el estado estable final. La situación transitoria puede deberse a un cambio súbito en la carga, en el voltaje o en ambos.

El estudio de los transitorios en las máquinas eléctricas es difícil por su naturaleza compleja. Sin embargo, algunos supuestos simplificadores razonables reducen en forma significativa la complejidad del estudio. En la explicación anterior hemos presupuesto que la máquina está operando dentro de la región lineal de su curva característica de magnetización. En ese caso, no se tiene en cuenta la saturación del núcleo magnético, lo que de otra forma convertiría el problema en no lineal.

La respuesta transitoria de una máquina de cc es de naturaleza exponencial y, para todo fin práctico, desaparece después de cinco constantes de tiempo. Para determinar analíticamente la respuesta transitoria en una máquina de cc, el método de la transformación de Laplace es una técnica muy útil; sin embargo, no puede aplicarse si la operación con saturación es el objetivo principal. Por otro lado, los métodos numéricos pueden resolver problemas lineales y no lineales. Uno de tales métodos para estudiar la dinámica de las máquinas eléctricas se basa en el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden.

El transitorio más severo que puede ocurrir en un generador síncrono es el desarrollo de un cortocircuito súbito en las tres fases a través de sus terminales. En el caso de un cortocircuito de tal naturaleza, la corriente en el devanado de la armadura muestra una característica oscilatoria amortiguada. La forma de onda durante los primeros ciclos de la corriente en el cortocircuito denota el *periodo subtransitorio* y la corriente que corresponde es la corriente subtransitoria. Durante el segundo periodo del cortocircuito, la forma de onda de la corriente se conoce como *periodo transitorio* y su corriente se llama *corriente transitoria*. Finalmente, la corriente de estado estable ocurre después de terminado el periodo transitorio. En los modelos de generador síncrono es posible usar reactancias subtransitorias, transitorias y síncronas para los tres regímenes de la corriente de cortocircuito.

Cuando las condiciones finales de un generador síncrono cambian repentinamente, el rotor no es capaz de responder en forma simultánea y en la máquina se presenta un transitorio mecánico. Aunque los transitorios mecánicos en los generadores síncronos son los menos frecuentes, son los más importantes porque la máquina podría sufrir autodestrucción. Después de un transitorio mecánico, el ángulo de potencia varía como función del tiempo y lo modela una ecuación diferencial de segundo orden conocida como *ecuación de vaivén*. Si la causa del transitorio mecánico se corrige dentro de un lapso breve (algunos ciclos), la máquina no pierde su estabilidad durante el estado transitorio; de otro modo podría exceder su velocidad y causar daños permanentes al rotor. El criterio del área igual es una herramienta útil para determinar la estabilidad transitoria de un generador síncrono.

Preguntas de repaso

11.1. ¿Cuál es la razón de que se presente un estado transitorio en una máquina eléctrica?

11.2. ¿Cuál puede ser el origen de un transitorio en una máquina eléctrica?

11.3. ¿Cómo puede modelarse un motor de cc con excitación independiente para analizar su respuesta (dinámica) a transitorios?

11.4. ¿Por qué la saturación dificulta el análisis de las máquinas de cc?

11.5. ¿Cuáles son las variables de estado y de entrada en la representación dinámica lineal de un motor de cc con excitación independiente?

11.6. ¿Por qué podrían ser asimétricas las corrientes de fase en un generador síncrono durante la etapa inicial de un cortocircuito trifásico?

11.7. ¿Cuáles son los periodos subtransitorio, transitorio y de estado estable después de presentarse un cortocircuito trifásico en un generador síncrono?

11.8. ¿Cómo contribuye el devanado de amortiguamiento con la corriente de cortocircuito?

11.9. La excitación de un generador síncrono se logra con la colocación de imanes permanentes en el rotor. Ante la presencia de un devanado amortiguador en el rotor, comente si el estado estable se alcanza más rápido o más lento que un generador síncrono con un devanado de campo convencional cuando ocurre un cortocircuito trifásico en la máquina.

11.10. ¿Sería seguro operar un generador síncrono con un ángulo de potencia de 90° en estado estable?

Problemas

11.1. Un motor de cc de 250 V y 7.5 hp con excitación independiente tiene una especificación de 1 500 rpm. La resistencia e inductancia de la armadura son de 0.8 Ω y 9 mH, respectivamente. La constante $K = K_a\Phi_P$ es 1.6, mientras que el momento de inercia del sistema giratorio es de 0.15 kg•m^2. Determine la corriente de la armadura y la velocidad del motor como función del tiempo cuando la armadura se sujeta al voltaje especificado sin carga. Desprecie los efectos de la saturación y de pérdidas por fricción.

11.2. El motor del problema 11.1 trabaja en condición de estado estable sin carga. Se le aplica de manera súbita un par de 5 N•m. Determine la disminución de la velocidad del motor como función del tiempo. ¿Cuál es la velocidad después de que el motor alcanza el estado estable?

11.3. Un motor de cc de 380 V, 2 hp, eficiencia de 85% y con excitación independiente tiene los parámetros siguientes: $R_a = 12$ Ω, $L_a = 110$ mH, $R_f = 400$ Ω, $L_f = 1.5$ H, $K_a\Phi_P = 5$ y $J = 0.098$ kg•m^2. La característica de la carga mecánica se define por $T_L = 1.05\omega_m$. Determine el par desarrollado por el motor como función del tiempo si el circuito de la armadura queda sujeto repentinamente al voltaje especificado. Desprecie la saturación y las pérdidas por fricción.

11.4. El sistema motor-carga del problema 11.3 ha estado operando en condición de estado estable con sus valores especificados. Determine las variaciones en la corriente del campo y la velocidad si la corriente de la armadura se mantiene constante y el voltaje del campo se reduce de súbito a 200 V. Desprecie las pérdidas por fricción y considere $\Phi_P = 0.01I_f$.

11.5. La velocidad de un motor de cc de 10 hp y 240 V, con excitación independiente y que trabaja con una carga de 8 N•m se incrementa debilitando el campo por medio de un banco de resistencias en serie con el circuito del campo, co-

mo se muestra en la figura P11.5. Cada resistencia del banco está equipada con un interruptor normalmente cerrado en derivación. Las resistencias se conectan en serie con el devanado del campo una por una para alcanzar la velocidad última sin ocasionar un incremento peligroso en la corriente de la armadura durante el estado transitorio. *a*) Calcule las constantes de operación de los interruptores si las resistencias se introducen en el circuito en los tiempos mínimos para alcanzar el estado estable y *b*) determine la variación de la velocidad, la corriente de la armadura y la corriente del campo cuando todas las resistencias se conectan una por una comenzando con la más pequeña. Los parámetros del motor son los siguientes: $R_a = 0.3\ \Omega$, $L_a = 3$ mH, $J = 0.09$ kg • m^2, $D = 0.015$ N • m • s, $K_T = 1.02$, $R_f = 300\ \Omega$ y $L_f = 1.8$ H.

11.6. Un generador de cc de 440 V, 10 kW, con excitación independiente tiene los datos siguientes: $R_a = 3\ \Omega$, $L_a = 80$ mH, $R_f = 400\ \Omega$, $L_f = 2$ H, $K_aK_f = 2.6$ y $J = 0.09$ kg • m^2. La armadura está conectada a una carga con resistencia de 75 Ω e inductancia de 20 mH y está impulsada a una velocidad de 1 500 rpm, cuando súbitamente se aplica el voltaje especificado al circuito del campo. Determine las variaciones en las corrientes del campo y la armadura. Desprecie las pérdidas por fricción y el efecto de saturación.

11.7. Un motor de cc de imanes permanentes, 120 V, 1 hp y 200 rpm se sujeta repentinamente a su voltaje especificado y a un par de carga de 8 N • m. Construya las ecuaciones de estado para las variables de estado i_a y ω_m. Los parámetros de la máquina son $R_a = 1\ \Omega$, $L_a = 8$ mH, $K = 3$ y $J = 0.3$ kg • m^2. Desprecie las pérdidas por fricción y la saturación.

11.8. Utilizando el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden calcule el instante en que el motor del problema 11.6 alcanza el estado estable.

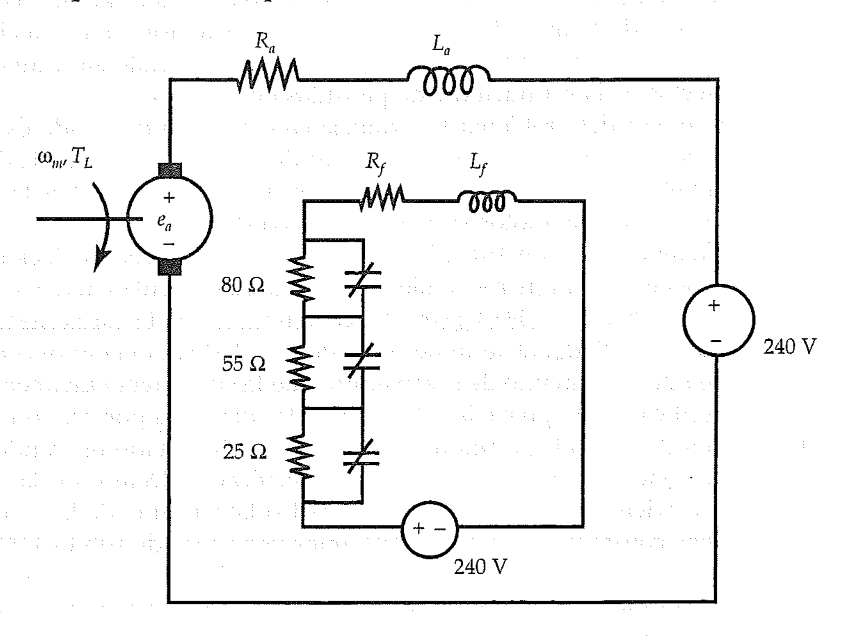


Figura P11.5. Motor con excitación independiente para el problema 11.5.

11.9. Resuelva otra vez los problemas 11.7 y 11.8 si el motor trabaja con una carga lineal de $T_L = 1.2\omega_m$.

11.10. Un generador síncrono de rotor cilíndrico, de 4.6 kV y 1000 kVA, con reactancias subtransitoria y transitoria de 80 Ω y 160 Ω, respectivamente, experimenta un cortocircuito trifásico a través de sus terminales al tiempo que trabaja sin carga. *a*) calcule las reactancias por unidad y *b*) calcule las corrientes subtransitoria y transitoria de cortocircuito por unidad, en amperes.

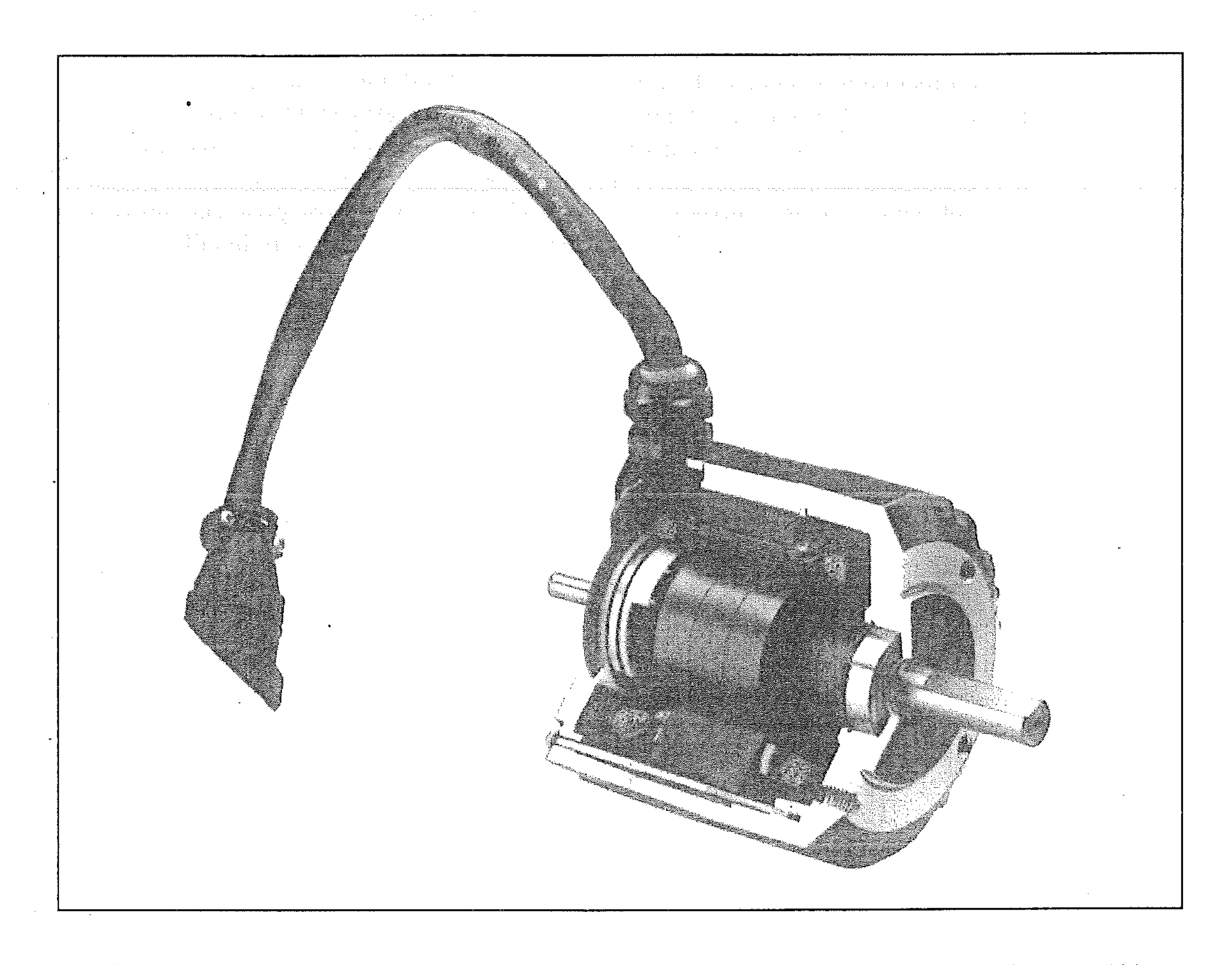
11.11. Un generador síncrono de 60 Hz, 30 MVA y 7.8 kV tiene los parámetros siguientes: $X_{af} = 0.32$ pu, $X_{lf} = 0.18$ pu y $X_{ld} = 0.13$ pu. El generador experimenta un cortocircuito trifásico en sus terminales al tiempo que opera sin carga. Se mide la corriente subtransitoria de cortocircuito, cuyo valor es de 11 150 A. Calcule la reactancia de dispersión de la armadura.

11.12. Un generador síncrono de 1 250 V y 100 kVA opera un motor síncrono a sus valores especificados de 25 kVA y 1 000 V con un factor de potencia de 0.9 en adelanto. Las reactancias subtransitorias del generador y del motor son de 0.2 pu y 0.15 pu, respectivamente. Calcule las corrientes de falla si ocurre un cortocircuito trifásico a través de las terminales del generador.

11.13. Un generador síncrono, tetrapolar, de 5 MVA, 6.3 kV y 60 Hz experimenta un cortocircuito trifásico en sus terminales al tiempo que entrega una potencia promedio de 0.8 pu con un factor de potencia de 15°. La constante de inercia del generador síncrono es de 8 J/VA. *a*) Calcule el ángulo de potencia crítico de corrección de falla y *b*) calcule el tiempo crítico de corrección de falla.

12

Máquinas eléctricas de propósito especial



Vista en corte de un motor de inducción monofásico tipo PSC. (*Cortesía de MagneTek.*)

12.1 Introducción

El presente capítulo está dedicado al estudio de las máquinas eléctricas de propósito especial. Aunque todas las máquinas eléctricas tienen el mismo principio básico de operación, las de aplicación especial presentan ciertas características que las distinguen de las demás.

No es nuestra intención estudiar en un capítulo todos los tipos de máquinas de propósito especial, sino, más bien, presentar los principios básicos de operación de algunas de ellas, sobre todo de las que se utilizan ampliamente en aplicaciones en el hogar, recreativas e industriales.

Con la proliferación de los circuitos electrónicos de potencia y los sistemas de control digital, puede obtenerse juntamente control preciso de velocidad y posición con las máquinas eléctricas de propósito especial, entre las que se cuentan los motores de imanes permanentes (PM), de pasos, de reluctancia conmutada, de corriente continua (cc) sin escobillas, de histéresis y lineales. Algunas de estas máquinas se utilizan en equipos periféricos para computadoras o en sistemas de control de procesos; otros se emplean en aparatos para el hogar. Por ejemplo, los motores de pasos se usan mucho en computadoras, donde se exige un posicionamiento preciso, como es el caso de la cabeza magnética de los lectores de disco. Para aplicaciones que exigen impulsores de velocidad constante, los motores de cc sin escobillas ofrecen excelentes características. Por otro lado, los motores de reluctancia conmutada tienen aplicación donde tradicionalmente se usan motores de cc o de inducción.

En las secciones siguientes se analiza la construcción, principios de operación y características de cada una de las máquinas eléctricas de propósito especial mencionadas.

12.2. Motores de imanes permanentes

El desarrollo de nuevos materiales para imanes permanentes ha convertido los motores tipo PM en un buen sustituto de los motores shunt (cc). En un motor tipo PM los polos están construidos con imanes permanentes, como se muestra en la figura 12.1. Si bien se han construido motores de cc de imanes permanentes de hasta 75 hp, la aplicación principal de esos imanes se limita, por razones económicas, a motores de fracciones de caballo de fuerza. En un motor de cc convencional con circuito del devanado de campo, el flujo por polo depende de la corriente a través del devanado de campo y puede ser controlado. Sin embargo, el flujo en un motor tipo PM es esencialmente constante y depende del punto de operación, como se explicó en el capítulo 2.

Para la misma potencia de salida, un motor tipo PM es más eficiente y requiere menos material que un motor de cc devanado con las mismas especificaciones. No obstante, el diseño de un motor tipo PM debe ser tal que el efecto de desmagnetización debido a la reacción de la armadura, que es máximo en reposo, sea tan pequeño como lo permita la economía.

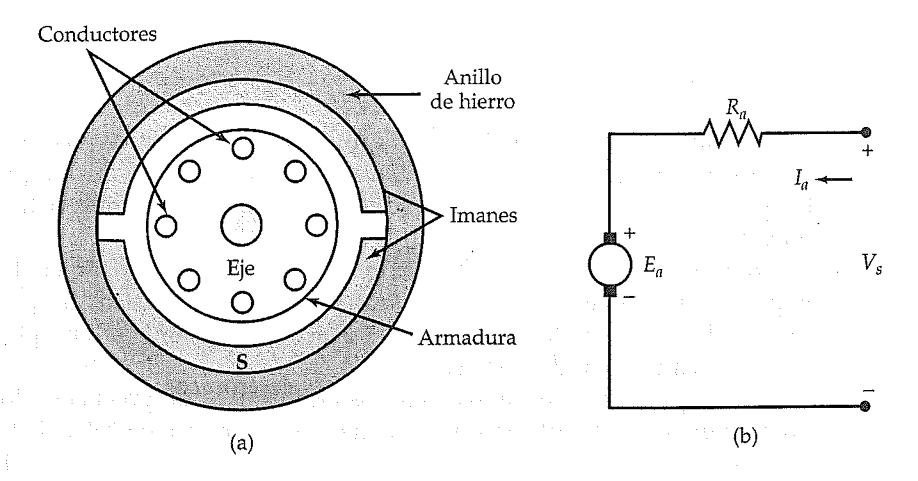


Figura 12.1. (a) Corte transversal de un motor tipo PM, (b) circuito equivalente.

Como el flujo en un motor tipo PM es fijo, las características velocidad-par y corriente-par son básicamente líneas rectas, como se muestra en la figura 12.2. En términos matemáticos, estas relaciones pueden expresarse como sigue:

$$\omega_m = \frac{V_s}{K_a\Phi_p} - \frac{R_a}{(K_a\Phi_p)^2}T_d \qquad (12.1)$$

e

$$I_a = \frac{1}{K_a\Phi_p}T_d \qquad (12.2)$$

donde K_a, V_s, Φ_p, R_a y T_d son la constante de máquina, voltaje de suministro, flujo por polo, resistencia del devanado de la armadura y par desarrollado.

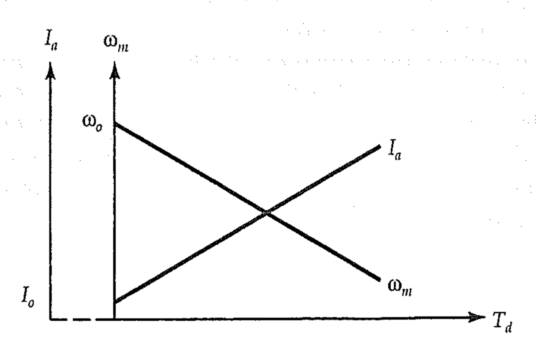


Figura 12.2. Características velocidad-par y corriente-par de un motor tipo PM.

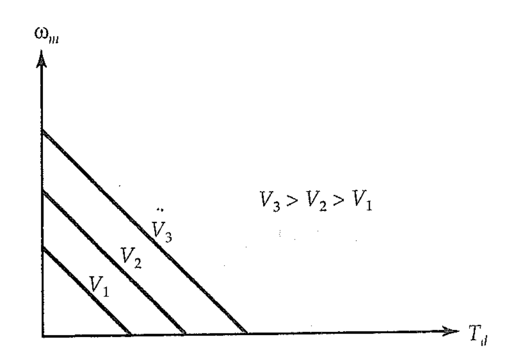


Figura 12.3. Características de operación para diferentes voltajes de suministros.

La característica velocidad-par de un motor tipo PM puede controlarse cambiando el voltaje de suministro o la resistencia efectiva del circuito de la armadura. El cambio en el voltaje de suministro modifica la velocidad sin carga del motor sin afectar la pendiente de la característica. Así, para diferentes voltajes de suministro puede obtenerse un conjunto de características paralelas velocidad-par, como se ilustra en la figura 12.3. Por otro lado, con el cambio en la resistencia efectiva del circuito de la armadura, la pendiente de la curva está controlada y la velocidad sin carga del motor permanece sin cambio, como se indica en la figura 12.4. Utilizando imanes con densidades de flujo diferentes y las mismas áreas transversales, o viceversa, hay posibilidades de diseño casi infinitas para un motor tipo PM para condiciones de operación específicas, como se aprecia en la figura 12.5. A partir de esa figura también es posible concluir que puede lograrse un incremento en el par con rotor fijo sólo a expensas de una velocidad sin carga más baja.

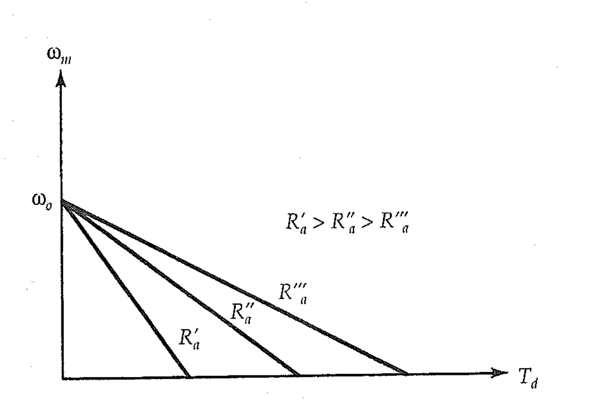


Figura 12.4. Características de operación para distintas resistencias del circuito de la armadura.

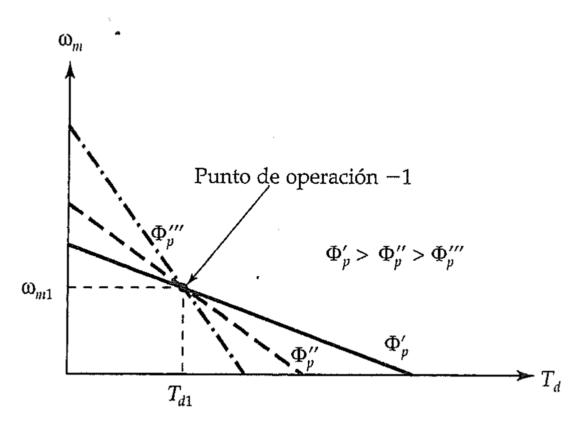


Figura 12.5. Características de operación para distintos flujos en un motor tipo PM.

Ejemplo 12.1

Un motor tipo PM opera con un flujo magnético de 4 mWb. La resistencia de la armadura es de 0.8 Ω y el voltaje aplicado de 40 V. Si la carga del motor es de 1.2 N • m, calcule *a*) la velocidad del motor y *b*) el par desarrollado en condición de rotor fijo. La constante del motor K_a es 95.

- Solución

a) Con la ecuación 12.1 se obtiene

$$\omega_m = \frac{40}{95 \times 0.004} - \frac{0.8 \times 1.2}{(95 \times 0.004)^2} = 98.62 \text{ rad/s}$$

o

$$N_m = \frac{98.62 \times 60}{2\pi} \approx 942 \text{ rpm}$$

b) Para la condición de rotor fijo $\omega_m = 0$. Luego,

$$0 = \frac{40}{95 \times 0.004} - \frac{0.8\, T_d}{(95 \times 0.004)^2}$$

o

$$T_d = 19 \text{ N} \cdot \text{m}$$

■

Ejemplo 12.2

Calcule el flujo magnético de un motor tipo PM de 200 W y 100 V que opera a 1 500 rpm. Su constante es de 85, la resistencia de la armadura es de 2 Ω y la pérdida por rotación es de 15 W.

- Solución

$$\omega_m = \frac{2\pi \times 1\,500}{60} = 157.08 \text{ rad/s}$$

Como la potencia desarrollada es $P_d = 200 + 15 = 215$ W, el par desarrollado se convierte en

$$T_d = \frac{215}{157.08} = 1.37 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Con base en la ecuación 12.1 puede expresarse

$$\Phi_p^2 - \frac{V_s}{K_a\omega_m}\Phi_p + \frac{R_a T_d}{K_a^2\omega_m} = 0$$

$$\Phi_p^2 - 0.0075\Phi_p + 2.41 \times 10^{-6} = 0$$

o

$$\Phi_p = 7.16 \text{ mWb}$$

■

Como se explicó en el capítulo 2, el punto de operación de un imán permanente depende de la permeancia del circuito magnético. El punto de intersección de la línea de operación y la curva de desmagnetización determina la densidad de flujo en el circuito magnético. La misma situación tiene lugar en los motores tipo PM si se desprecia el efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura.

Supongamos que en la figura 12.6 el punto de operación de un motor tipo PM está marcado con una X cuando no se tiene en cuenta el efecto de la reacción de la armadura. Sin embargo, sin importar cuál sea el efecto de desmagnetización de ésta, debe incluirse para determinar el punto de operación apropiado del imán, aun cuando

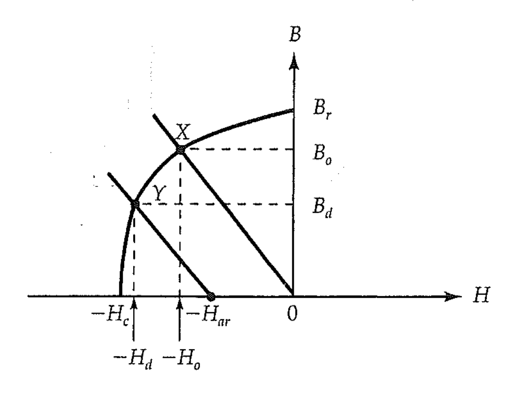


Figura 12.6. Efecto de desmagnetización en un motor tipo PM.

motores tipo PM están diseñados con entrehierros relativamente grandes para reducir al mínimo esa reacción. En este caso, la línea de operación se desplaza a la izquierda, como se muestra en la figura 12.6, donde H_{ar} corresponde a la intensidad del campo magnético debido a la armadura. Por tanto, el punto de operación real del motor se mueve al punto Y. Con base en esa figura puede concluirse que la densidad útil de flujo magnético disminuye con el aumento de la reacción de la armadura.

En un motor tipo PM, el efecto de desmagnetización debido a la reacción de la armadura es máximo en condición de rotor fijo. A fin de estudiar su efecto, se considerará la curva de desmagnetización intrínseca tal cual se muestra en la figura 12.7. Esta curva puede obtenerse a partir de la curva de desmagnetización normal utilizando $B_i = B_n + \mu_0 H_n$, donde B_i es la densidad de flujo intrínseco. Aquí, B_n y H_n son la densidad de flujo normal y la intensidad de campo correspondiente, respectivamente. En la figura 12.7 también se resalta el hecho de que si H_{ar} excede la fuerza coercitiva intrínseca H_{ci}, el imán en el motor tipo PM se desmagnetiza por completo.

Supongamos que la línea de carga de un motor tipo PM sin corriente de la armadura interseca la curva de desmagnetización en el punto X, como se ilustra en la figura 12.8. Con un incremento en la corriente de la armadura, el punto de operación cambia a Y debido a la reacción de la armadura. Cabría esperar que el punto de operación se moviera de regreso a X en cuanto la corriente de la armadura cesara. En realidad, no sucede así, y el nuevo punto de operación será Z en la línea de operación original. La recta que va de Y a Z se conoce como *línea de retroceso*, que es aproximadamente paralela a la pendiente de la curva de desmagnetización en el punto B_r. La influencia conjunta de la reacción de la armadura es una reducción de la densidad de flujo de operación en el motor. Sin embargo, si se usan imanes de cerámica, la reducción es insignificante, ya que la curva de desmagnetización es, en esencia, una línea recta.

El efecto de la temperatura también debe considerarse al diseñar un motor tipo PM. En la figura 12.9 se ilustran los cambios en la característica de desmagnetización a dos temperaturas diferentes. A medida que la temperatura aumenta, la densidad de flujo residual en el imán disminuye y la fuerza coercitiva intrínseca se incrementa. Por

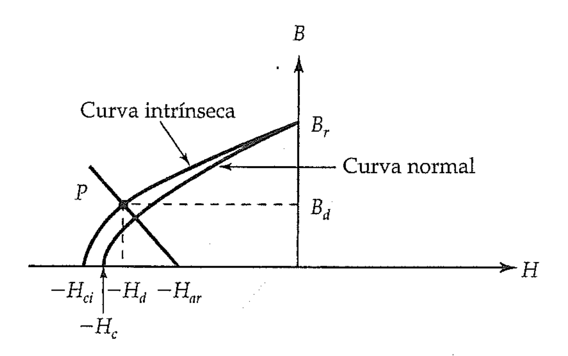


Figura 12.7. Punto de operación intrínseco del extremo posterior del imán durante el arranque o en caída de velocidad.

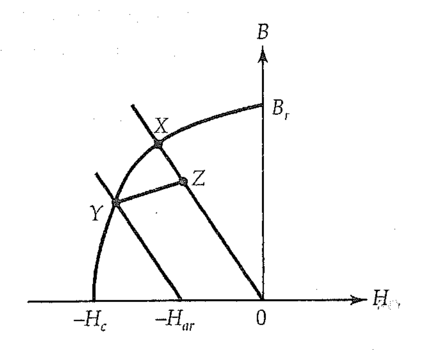


Figura 12.8. Efecto de retroceso en la operación de un motor tipo PM.

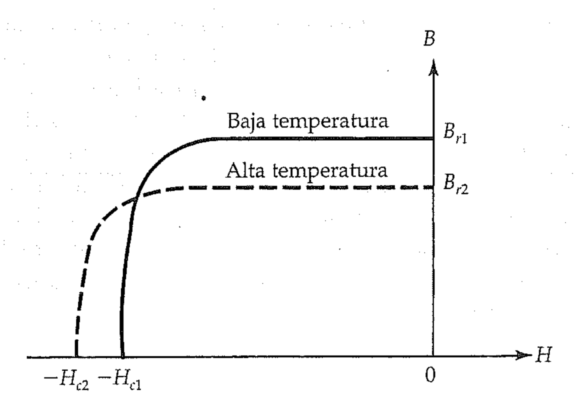


Figura 12.9. Efecto de la temperatura sobre la curva intrínseca.

otro lado, cuanto más baja sea la temperatura, más pronunciado será el efecto de desmagnetización por la reacción de la armadura.

Ejercicios

12.1. Un motor tipo PM bipolar de 0.5 hp, 120 V y eficiencia de 70% utiliza imanes permanentes basados en samario. Su velocidad ideal sin carga es de 1 000 rpm y la resistencia en la armadura es de 1.5 Ω. La longitud del polo y el radio promedio del motor son 55 mm y 45 mm, respectivamente. Determine la línea de operación del motor si todas las pérdidas son despreciables, excepto en el cobre. Suponga que la constante del motor es de 80.

12.2. Un motor bipolar tipo PM de cc, de 100 V y con imanes de alnico impulsa una carga de 0.25 hp con una eficiencia de 72%. Cuando el motor opera sin carga, su

velocidad es de 1 000 rpm. La longitud de polo y el radio promedio de los imanes es 65 mm y 55 mm, respectivamente, y la resistencia del circuito de la armadura es de 1.2 Ω. Determine la línea de operación del motor. En la figura 2.28 se muestra la característica de desmagnetización del imán de alnico. K_a es de 65.

12.3. Motores de pasos

Los motores de pasos, también conocidos como motores *stepping* o *stepper*, son en esencia dispositivos motrices incrementales. Un motor de pasos recibe un tren de pulsos rectangular y responde girando su eje el número de grados que dicte el número de pulsos en el tren recibido. Generalmente, este tren se controla por medio de una microcomputadora o un circuito electrónico. Como resultado, un motor de pasos es mucho más compatible con circuitos electrónicos digitales y puede formar una interfaz entre una microcomputadora y un sistema mecánico. Como el movimiento en un motor de pasos suele estar gobernado por el conteo del número de pulsos, no se necesitan lazos de retroalimentación ni sensores para controlarlos. En consecuencia, este tipo de motores son apropiados para el control de posición en un sistema de lazo abierto. Son relativamente baratos y de construcción sencilla, y pueden fabricarse para dar pasos en incrementos iguales en cualquier dirección. Son excelentes para aplicaciones como impresoras, graficadoras *XY*, máquinas de escribir eléctricas, controles de unidades lectoras de discos flexibles, robots y máquinas-herramienta de control numérico. Algunas de las desventajas de los motores de pasos son que no tienen flexibilidad para ajustar el ángulo de avance y su respuesta de paso puede ser de naturaleza oscilatoria con sobrerrecorrido considerable. Los motores de pasos pueden clasificarse en tres grandes categorías: de reluctancia variable, de imanes permanentes e híbridos.

Motores de pasos de reluctancia variable

Los motores de pasos de reluctancia variable operan con el mismo principio que un motor de reluctancia, tema explicado en el capítulo 3. El principio comprende la reducción al mínimo de la reluctancia a lo largo de la trayectoria del campo magnético aplicado, como se muestra en la figura 12.10.

El estator de un motor de pasos de reluctancia variable consta de una pila única de láminas de acero con devanados de fase arrollados en cada diente del estator, como se ilustra en la figura 12.11. El rotor, que también está constituido por una pila de láminas de acero, no tiene ningún devanado. Con objeto de hacer que solamente un conjunto de dientes del estator y del rotor se alineen, el número de dientes del rotor y el del estator es diferente. El motor de pasos de la figura 12.11 tiene seis dientes en el estator y cuatro en el rotor. Los devanados del estator se excitan en tiempos distintos, formando así un devanado multifase del estator. El estator del motor de pasos que se muestra en la figura 12.11 tiene tres fases, *A*, *B* y *C*, con dientes 1 y 4, 2 y 5, y 3 y 6, respectivamente.

En la figura 12.11*a*, los dientes del rotor 1 y 2 están alineados con los dientes del estator 1 y 4 cuando el devanado de la fase *A* se excita con una corriente constante.

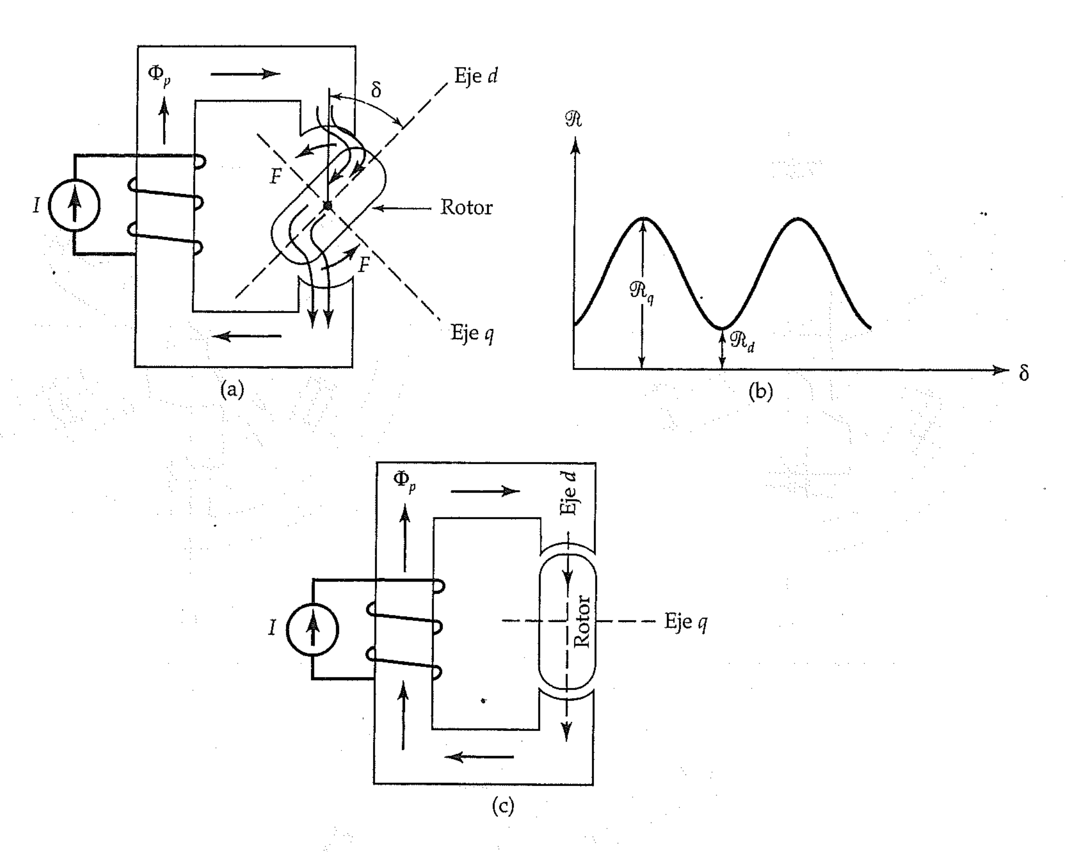


Figura 12.10. **(a)** Circuito magnético con un elemento libre para girar, **(b)** la reluctancia como función de posición, y **(c)** posición de reluctancia mínima, equilibrio o sin giro.

En tanto la fase *A* esté activa y las demás no, el rotor permanecerá estacionario y actuará en contra del par causado por la carga mecánica sobre el eje. Puesto que el ángulo entre el eje magnético de las fases *B* o *C* y el eje de los dientes 3 y 4 del rotor es de 30°, si la fase *A* se desactiva y el devanado de la fase *B* se excita, los dientes 3 y 4 del rotor se alinearán bajo los dientes 3 y 6 del estator, dando lugar a un desplazamiento de 30° del rotor. Finalmente, si se excita el devanado de la fase *C* después de desactivar la fase *B*, el rotor girará otros 30° y se alineará con la fase *C*, como se muestra en la figura 12.11*c*. El rotor puede hacerse girar continuamente en el sentido de las manecillas del reloj siguiendo la secuencia de interrupciones descrita anteriormente. Sin embargo, para obtener una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, las fases deben activarse en secuencia en el orden *A*, *C*, *B*. En la figura 12.12 se aprecian los voltajes de fase aplicados al motor de pasos de reluctancia variable analizado, y en la tabla 12.1 se indica la secuencia de activación apropiada para la rotación en el sentido de las manecillas del reloj. Para ese motor en particular, el voltaje aplicado debe tener por lo menos cinco ciclos para una revolución.

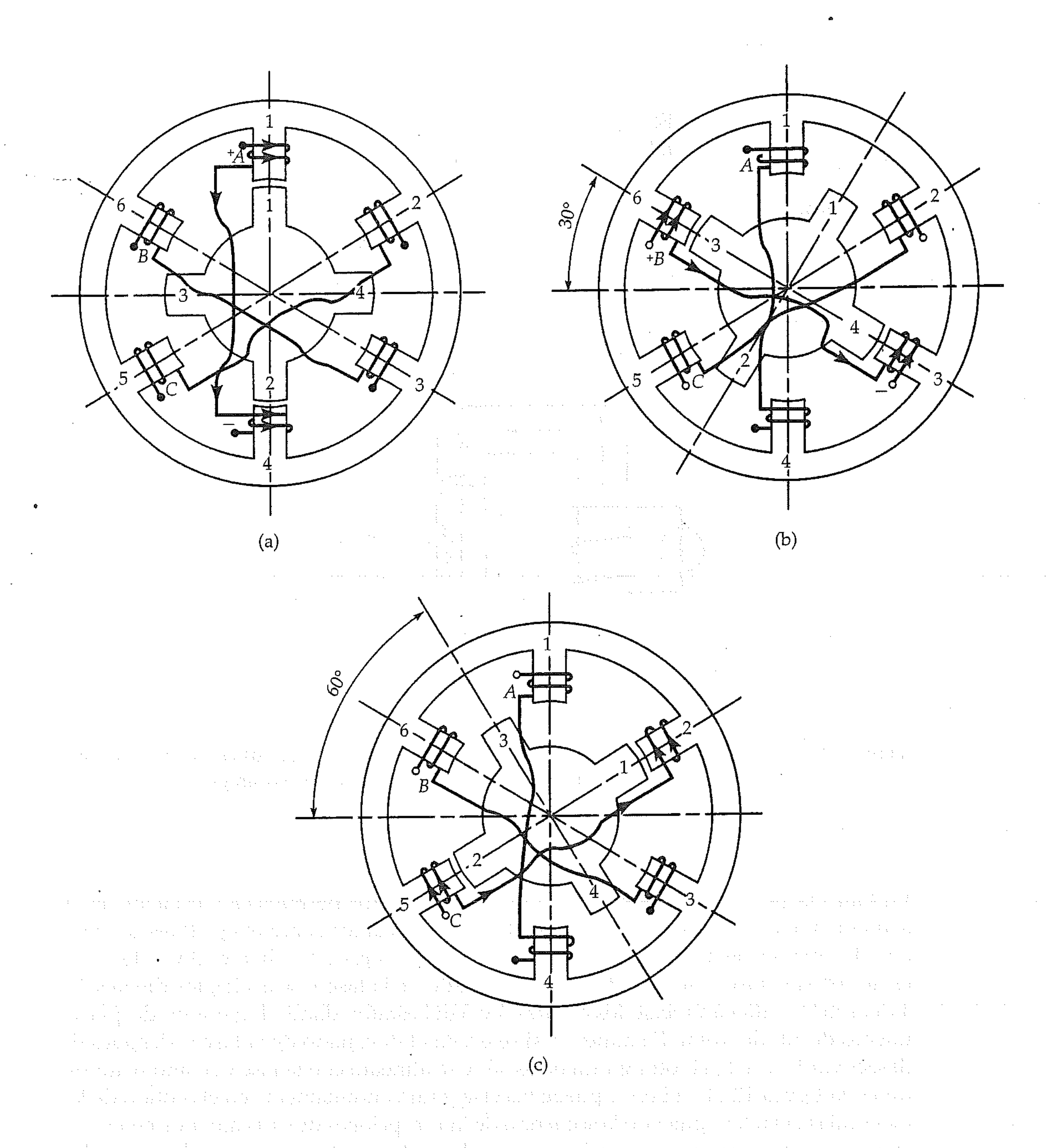


Figura 12.11. Motor de pasos de reluctancia variable.

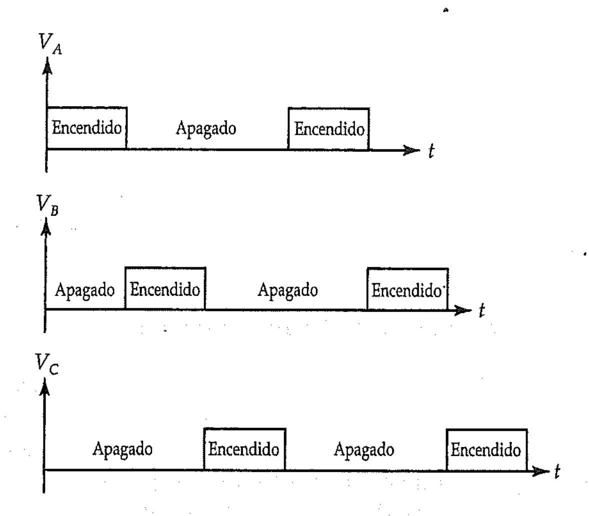


Figura 12.12. Formas de onda del voltaje de fase para un motor de reluctancia variable.

Tabla 12.1. Secuencia de activación de un motor de reluctancia variable. "1" y "0" corresponden a la corriente positiva e igual a cero en un devanado de fase, respectivamente.

	Fase			
Ciclo	*A*	*B*	*C*	*Posición* $\delta°$
1	1	0	0	0
	0	1	0	30
	0	0	1	60
2	1	0	0	90
	0	1	0	120
	0	0	1	150
3	1	0	0	180
	0	1	0	210
	0	0	1	240
4	1	0	0	270
	0	1	0	300
	0	0	1	330
5	1	0	0	360

El ángulo de paso, δ, para un motor de pasos de reluctancia variable está determinado por

$$\delta = \frac{2\pi}{np} \tag{12.3}$$

donde n y p son el número de fases y el número de dientes del rotor (polos), respectivamente.

Motores de pasos de imanes permanentes

Un motor de pasos tipo PM difiere del de reluctancia variable en que su rotor está formado por imanes permanentes. La construcción del estator de un motor de pasos tipo PM es igual a la de uno de reluctancia variable. En la figura 12.13 se ilustra un motor de pasos tipo PM bifásico con rotor de dos polos. En este motor, el rotor está magnetizado radialmente, de modo que sus polos se alinean con los dientes apropiados del estator.

Cuando se excita el devanado de la fase A por medio de una corriente constante, como se muestra en la figura 12.13*a*, el diente 1 actúa como un polo sur. Esto hace que el polo norte del rotor de imán permanente se alinee con el polo sur del estator. Posteriormente, la fase A se desactiva mientras que el devanado de la fase B se activa, como se indica en la figura 12.13*b*, ocasionando un desplazamiento de 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj para alinear el polo norte del rotor con el diente número 2 del estator. Si se invierte la polaridad de la corriente aplicada y se comienza de nuevo a excitar la fase A, el rotor girará de nuevo 90° en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, esta vez para alinear el polo norte del rotor con el diente número 3 del estator (fig. 12.13*c*). Hasta aquí, el motor ha completado media revolución, y con la continuación de las activaciones apropiadas continuará su giro y completará su revolución. En la figura 12.14 se describen las formas de onda de entrada a las fases A y B de un motor de pasos bifásico, en tanto que en la tabla 12.2 se indica la secuencia de activación para una revolución completa del motor.

Tabla 12.2. Secuencia de activación de un motor de pasos bifásico tipo PM. "1", "−1" y "0" corresponden respectivamente a la corriente positiva, negativa e igual a cero.

	Fase		
Ciclo	A	B	Posición δ°
+	1	0	0
	0	1	90
−	−1	0	180
	0	−1	270
+	1	0	360

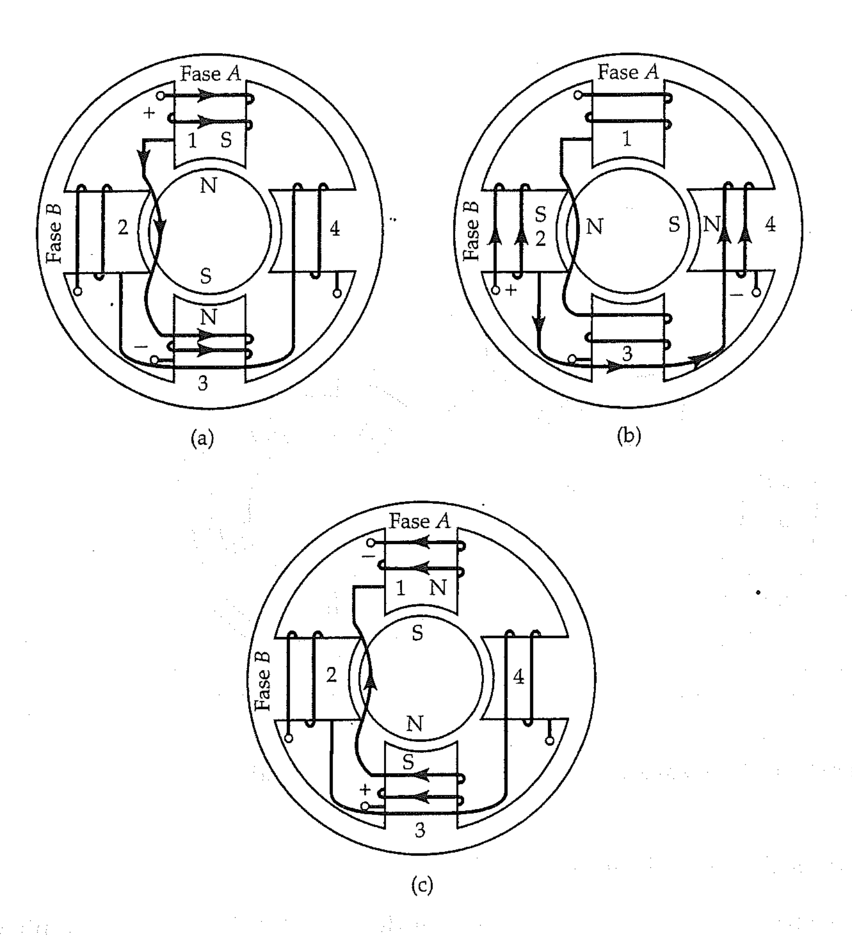


Figura 12.13. Motor de pasos bifásico de imanes permanentes.

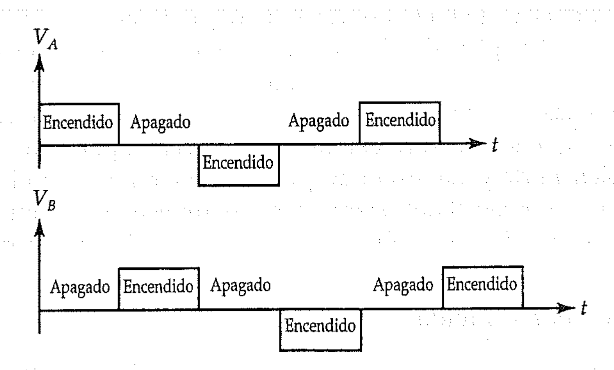


Figura 12.14. Formas de onda del voltaje aplicado para un motor de pasos bifásico tipo PM.

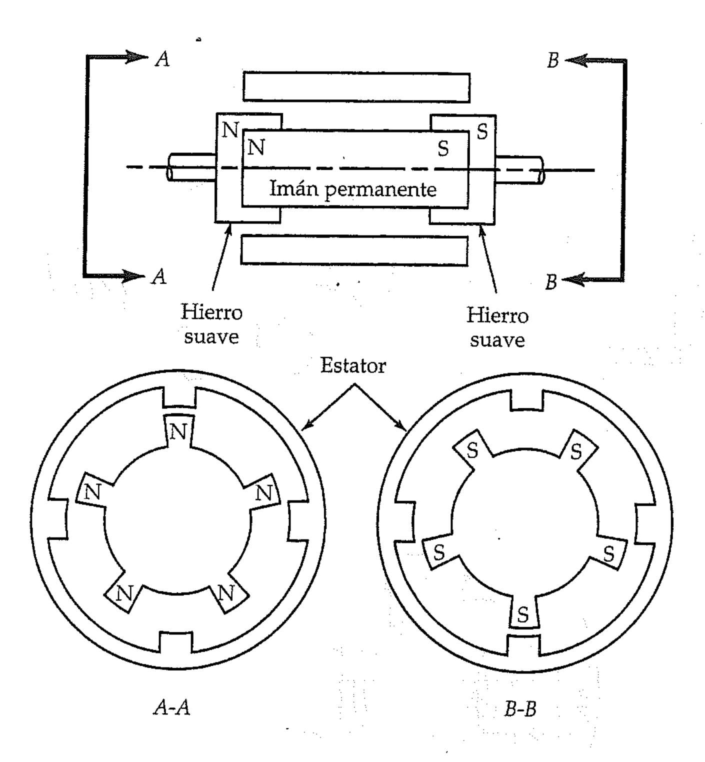


Figura 12.15. Diversos aspectos de un motor de pasos híbrido.

Motores de pasos híbridos

La construcción del estator de un motor de pasos híbrido no es diferente de la de uno de reluctancia variable o de la de uno de imanes permanentes. Sin embargo, la construcción del rotor integra el diseño de los rotores de un motor de pasos de reluctancia variable y de uno tipo PM. El rotor de un motor de pasos híbrido consta de dos pilas idénticas de hierro suave y de un imán permanente cilíndrico magnetizado axialmente. Las pilas de hierro suave se sujetan a los polos norte y sur del imán permanente, como se muestra en la figura 12.15. Luego, los dientes del rotor se maquinan en ellas. Así, los dientes del rotor en un extremo se convierten en el polo norte, mientras que los del otro extremo se vuelven el polo sur. Los dientes del rotor en ambos polos, norte y sur, están desplazados en ángulo para la alineación apropiada del polo del rotor con el del estator, como se muestra en la figura 12.15. El modo de operación del motor de pasos híbrido es muy similar al de un motor de pasos tipo PM.

Característica par-velocidad

Los motores de pasos se usan generalmente en el rango de 1 W a alrededor de 3 hp, y sus tamaños de paso varían aproximadamente de 0.72° a 90°. Sin embargo, los tamaños de paso más comunes son 1.8°, 7.5° y 15°.

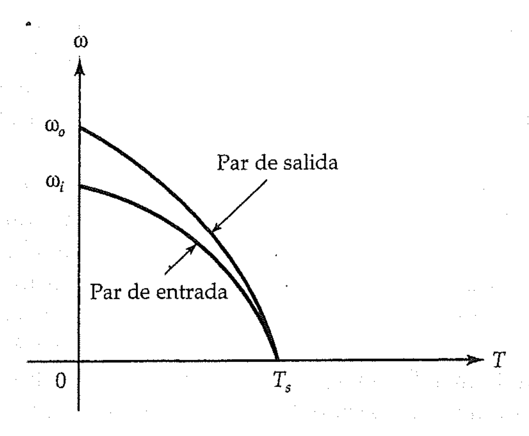


Figura 12.16. Característica velocidad-par de un motor de pasos.

Puesto que un motor de pasos gira cuando se aplica una serie de pulsos a sus devanados de fase, la duración de cada pulso debe ser suficientemente larga para que el motor gire en forma precisa a la velocidad deseada. Si la duración del pulso es demasiado breve, el rotor perderá los pasos y será incapaz de seguir los pulsos aplicados en forma precisa. Por tanto, el motor no girará o la velocidad requerida no se alcanzará. Para evitar una operación indeseable de tal naturaleza, generalmente se selecciona la duración del pulso de modo que sea mayor que la constante de tiempo inercial de la combinación del rotor y la carga mecánica. Por tanto, se espera que un motor grande con un momento de inercia elevado requiera una tasa de pulsos más lenta para operar de manera precisa.

La característica de par de entrada que se muestra en la figura 12.16 ilustra el rango permisible de la tasa de pasos para una carga y un motor determinados, con objeto de no perder un paso. Cuando el motor alcanza su operación de estado estable, la velocidad es uniforme y no se presenta un arranque y un paro a cada paso. Es posible cargar el motor hasta un límite, el cual está definido por la característica de par de salida que se muestra en la figura 12.16. Por arriba de ese nivel de par, el motor comienza a perder pasos y, en consecuencia, velocidad.

12.4. Motores de reluctancia conmutada

En principio, un motor de reluctancia conmutada opera como el motor de pasos de reluctancia variable analizado en la sección anterior. No obstante, la operación difiere principalmente en el complicado mecanismo de control del motor. A fin de desarrollar un par en el motor, la posición del rotor debe determinarse mediante sensores, de manera que el tiempo de excitación de los devanados de fase sea preciso. Aun cuando su construcción es una de las más sencillas posibles entre las máquinas eléctricas debido a las complejidades involucradas en el control y el circuito del mando eléctrico, los motores de reluctancia conmutada no han encontrado, durante

mucho tiempo, utilización extensa. Sin embargo, con la introducción de nuevos circuitos de conmutación de potencia electrónicos y microelectrónicos, los circuitos de control y de mando de un motor de reluctancia conmutada se han vuelto efectivos en costo para muchas aplicaciones en las que se usaban tradicionalmente motores de cc o de inducción.

Un motor de reluctancia conmutada tiene un estator devanado pero no tiene devanados en su rotor, el cual se construye con material magnético suave, como se muestra en la figura 12.17. El cambio de reluctancia alrededor de la periferia del estator obliga a los polos del rotor a alinearse con los del estator. En consecuencia, se desarrolla un par en el motor y tiene lugar la rotación.

Los concatenamientos de flujo total de la fase A en la figura 12.17 son $\lambda_a = L_a(\theta)i_a$, y los de la fase B son $\lambda_b = L_b(\theta)i_b$, con el supuesto de que los materiales magnéticos son infinitamente permeables. Como los ejes magnéticos en ambos devanados son ortogonales, no se espera que haya concatenamientos mutuos de flujo entre ellos.

La coenergía en el motor es

$$W = \frac{1}{2}L_a(\theta)i_a^2 + \frac{1}{2}L_b(\theta)i_b^2 \tag{12.4}$$

y el par desarrollado es

$$T = \frac{dW}{d\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}i_a^2\frac{dL_a}{d\theta} + \frac{1}{2}i_b^2\frac{dL_b}{d\theta} \tag{12.5}$$

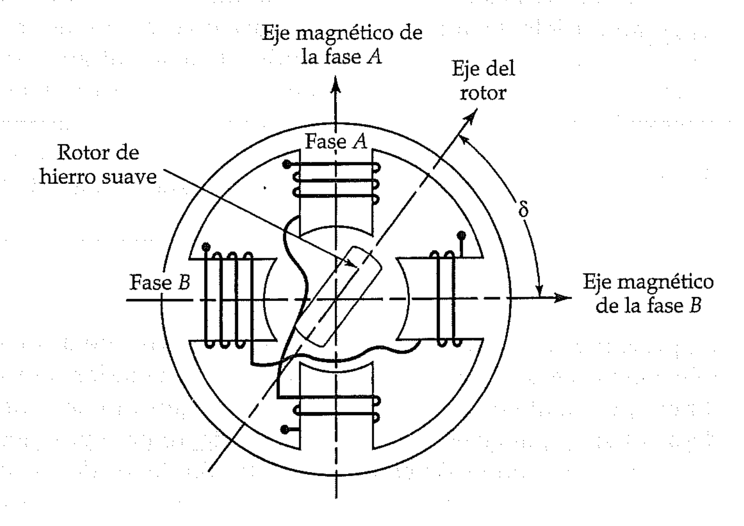


Figura 12.17. Esquema de un motor de reluctancia conmutada en su forma más sencilla.

Con base en la ecuación 12.5 puede concluirse que el par desarrollado en el motor es independiente de la dirección de la corriente que se suministra porque es proporcional al cuadrado de las corrientes de fase. Sin embargo, la posición inicial del rotor tiene un impacto significativo en el par desarrollado y en la rotación. Por ende, es necesario un sensor confiable para la posición del rotor y los circuitos de control a fin de activar el motor en el instante apropiado y hacerlo girar en el sentido deseado.

12.5. Motores de cc sin escobillas

Debido a sus características, analizadas en los capítulos anteriores, los motores de cc tienen numerosas aplicaciones en las que el objetivo principal es controlar un sistema. Sin embargo, los arcos eléctricos producidos por el conjunto mecánico conmutador-escobillas constituyen una gran desventaja y limitan la velocidad de operación y el voltaje. Un motor que reúne las características de un motor de cc pero elimina el conmutador y las escobillas se llama *motor de cc sin escobillas*.

Un motor de cc sin escobillas consta de un devanado multifase arrollado sobre un estator no saliente y un rotor de imán permanente magnetizado radialmente. En la figura 12.18 aparece un diagrama esquemático de un motor de cc sin escobillas. El devana-

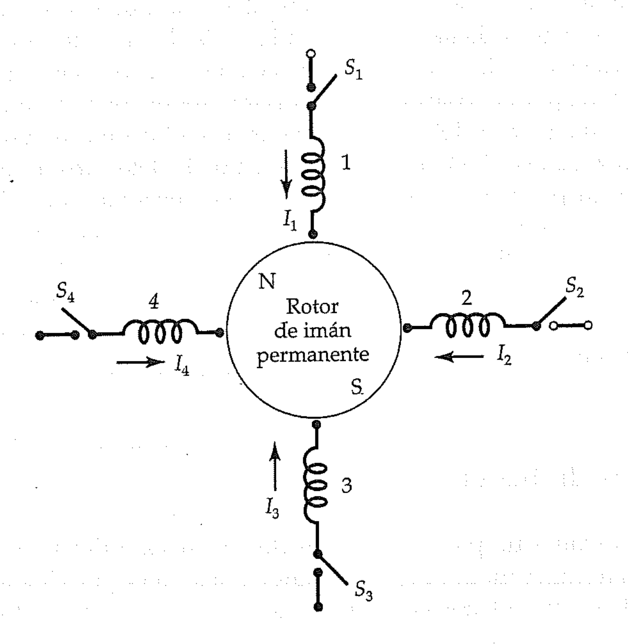


Figura 12.18. Esquema de un motor de cc sin escobillas que ilustra el principio de operación.

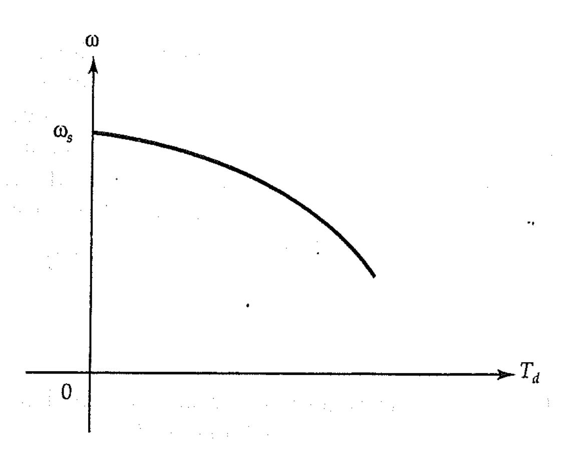


Figura 12.19. Característica velocidad-par de un motor de cc sin escobillas.

do multifase puede ser una sola bobina o estar distribuido sobre la amplitud del polo. Se aplica voltaje directo o alterno a los devanados de fase individuales a través de una operación de conmutación en secuencia para lograr la conmutación necesaria para impartir la rotación. La conmutación se efectúa por medios electrónicos, utilizando transistores de potencia o tiristores. Por ejemplo, si el devanado 1 se activa, el rotor de imán permanente se alinea con el campo magnético producido por el devanado 1. Cuando el devanado 1 se desactiva y el devanado 2 se activa, el rotor gira para alinearse con el campo magnético del devanado 2. Como puede apreciarse, la operación de un motor de cc sin escobillas es muy similar a la de un motor de pasos tipo PM. La diferencia principal radica en la temporización de la operación de conmutación, que está determinada por la posición del rotor para proporcionar el sincronismo necesario entre el campo magnético del imán permanente y el campo magnético producido por los devanados de fase. La posición del rotor puede detectarse utilizando sensores de efecto Hall o dispositivos fotoeléctricos. La señal generada por el sensor de posición del rotor se envía a un circuito lógico que toma la decisión de conmutar y, en seguida, una señal apropiada dispara el circuito de potencia para que excite el devanado de fase respectivo. El control de la magnitud y la tasa de conmutación de las corrientes de fase determinan, en esencia, la característica velocidad-par de un motor de cc sin escobillas, la cual se ilustra en la figura 12.19.

12.6. Motores de histéresis

Para desarrollar un par, los motores de histéresis utilizan la propiedad de histéresis de los materiales magnéticos. El estator puede tener un devanado de fase uniformemente distribuido trifásico o monofásico. En un motor de histéresis monofásico, el devanado del estator se conecta como motor de condensador dividido permanente (PSC, *permanent split capacitor*). El condensador se selecciona de modo que pueda

alcanzarse en forma aproximada una condición bifásica equilibrada, de modo que casi se establezca un campo giratorio uniforme. El rotor es un material magnético sólido duro sin dientes ni devanados. En la figura 12.20 se presenta un esquema de un motor de histéresis con devanados bifásicos.

Cuando se excita el devanado del estator, en el entrehierro del motor se establece un campo giratorio que gira —valga la expresión— a velocidad síncrona. El campo giratorio magnetiza el rotor e induce tantos polos en su periferia como polos tenga el estator. Debido a la gran pérdida por histéresis en el rotor, el flujo magnético que se desarrolla en él se encuentra en atraso respecto de la fuerza magnetomotriz (fmm) del estator. Luego, existe un ángulo del rotor, δ, entre los ejes magnéticos del rotor y del estator. En la figura 12.20*b* se ilustran las posiciones relativas de los ejes magnéticos del rotor y del estator para un motor de histéresis bipolar. Cuanto mayor sea la pérdida debida a la histéresis, más grande será el ángulo entre los ejes magnéticos del rotor y el estator. Debido a la tendencia de los polos magnéticos del rotor para alinearse a sí mismos con los del estator, se produce un par finito, llamado *par de histéresis*, proporcional al producto del flujo en el rotor y la fmm del estator y el seno del ángulo del rotor, δ. Por tanto, debe observarse que un rotor con un ciclo de histéresis grande da lugar a un par de histéresis más elevado.

Como el rotor es un material magnético sólido, se inducen corrientes parásitas en él debido al campo magnético del estator en tanto haya un movimiento relativo entre el campo magnético del estator y el rotor. Tales corrientes producen sus propios campos magnéticos y, por ende, su propio par, el cual incrementa aún más el par total que desarrolla el motor. El par debido a las corrientes parásitas es proporcional al deslizamiento del motor, con valor máximo en reposo e igual a cero cuando se alcanza la velocidad síncrona.

Cuando el motor se excita con un voltaje determinado mientras está en reposo, desarrolla un par constante; si es mayor que el par requerido por la carga, el motor

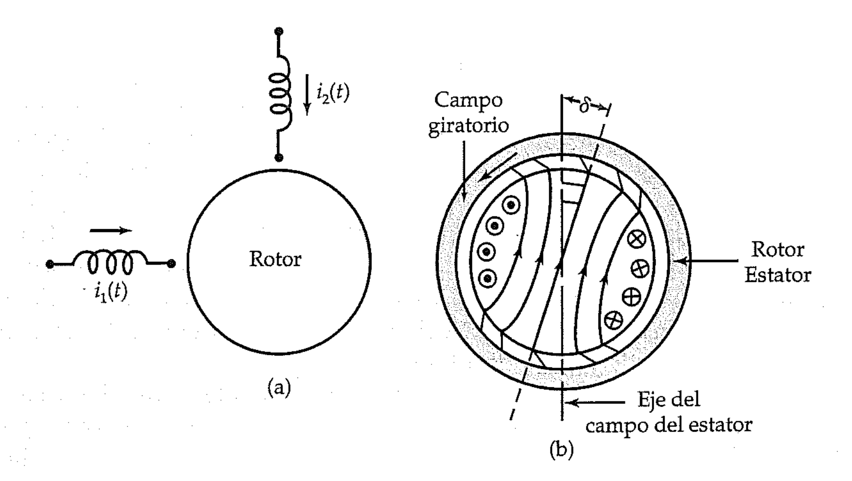


Figura 12.20. (**a**) Esquema de un motor de histéresis; (**b**) Distribución del flujo que muestra el efecto de histéresis.

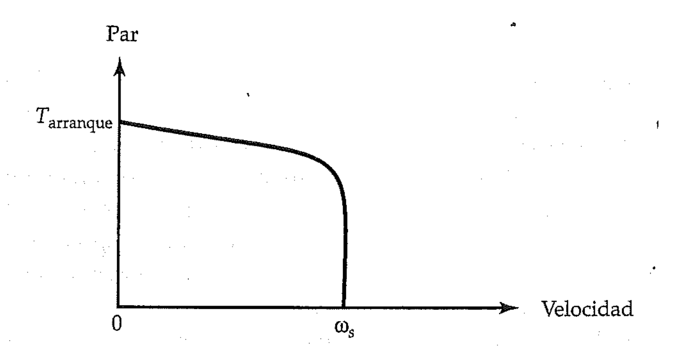


Figura 12.21. Característica velocidad-par de un motor de histéresis.

comenzará a girar. Con el voltaje aplicado fijo, el par de histéresis permanece casi constante en todo el rango de velocidad del motor hasta la velocidad síncrona, ya que el ángulo del rotor, δ, depende esencialmente del material con el cual esté hecho. No obstante, con la influencia del par producido por las corrientes parásitas se observa una ligera reducción del par total desarrollado conforme aumenta la velocidad del motor. Después de que alcanza la velocidad síncrona, el motor ajusta el ángulo del rotor, δ, de modo que pueda desarrollar el par requerido. En la figura 12.21 se muestra una característica típica par-velocidad de un motor de histéresis. En esa figura puede observarse que el par desarrollado es máximo en reposo. Por tanto, el par de arranque nunca constituye un problema en los motores de histéresis. Por añadidura, como el par desarrollado es casi uniforme desde el reposo hasta la velocidad síncrona, un motor de histéresis puede acelerar una carga con alta inercia.

12.7. Motores de inducción lineales

Hasta ahora hemos estudiado los principios fundamentales de operación de máquinas eléctricas que producen rotación o movimiento circular. Durante las últimas décadas se han realizado numerosas investigaciones en el área de la propulsión que han conducido al desarrollo de motores lineales. En teoría, cada tipo de máquina rotatoria puede tener su contraparte lineal. Sin embargo, el motor de inducción lineal es el que más se utiliza en un amplio espectro de aplicaciones industriales, tales como el transporte terrestre de alta velocidad, sistemas de puertas deslizantes, operadores de cortinas y bandas transportadoras.

Si se corta un motor de inducción y se extiende en un plano, se obtiene un motor de inducción lineal. El estator y el rotor del motor giratorio corresponden a los lados primario y secundario, respectivamente, del motor de inducción lineal. El lado primario consta de un núcleo magnético con un devanado trifásico; el lado secundario puede constar simplemente de una placa de metal o un devanado trifásico arrollado

alrededor de un núcleo magnético. La diferencia básica entre un motor de inducción lineal y su contraparte rotatoria es que éste tiene entrehierro sinfín y estructura magnética, mientras que el primero es de extremos abiertos debido a las longitudes finitas de los lados primario y secundario. Además, en un motor de inducción lineal la velocidad angular se convierte en velocidad lineal, y el par, en empuje. A fin de mantener un empuje constante (fuerza) a lo largo de una distancia considerable, un lado se mantiene más corto que el otro. Por ejemplo, en un transporte terrestre de alta velocidad se utilizan un primario corto y un secundario largo. En un sistema como éste, el primario es parte integral del vehículo, en tanto que la vía constituye el secundario.

Un motor de inducción lineal puede ser de lado único o de doble lado, como se muestra en la figura 12.22. Con objeto de reducir la reluctancia total de la trayectoria magnética en un motor de inducción lineal de lado único con una placa metálica como devanado secundario, la placa metálica se respalda con un material ferromagnético como el hierro.

Cuando el voltaje de suministro se aplica al devanado primario de un motor de inducción lineal trifásico, el campo magnético que se produce en la región del entrehierro viaja a velocidad síncrona. La interacción del campo magnético con las corrientes inducidas en el secundario ejercen un empuje sobre éste para moverlo en la misma dirección si el primario se mantiene estacionario. Por otro lado, si el lado secundario es estacionario y el primario tiene libertad de movimiento, éste se moverá en la dirección opuesta a la del campo magnético.

Considere el diagrama simplificado para el motor de inducción lineal que se muestra en la figura 12.23, donde sólo se ilustra un devanado de fase, digamos la fase a, del devanado primario trifásico. El devanado de fase con N vueltas experimenta una fmm igual a NI, como se indica en la figura 12.23b. Si se centra la atención en la forma de onda fundamental de la fmm, se obtiene

$$\mathcal{F}_a = k_w \frac{2}{n\pi} N i_a \cos \frac{2\pi}{\lambda} z \qquad (12.6)$$

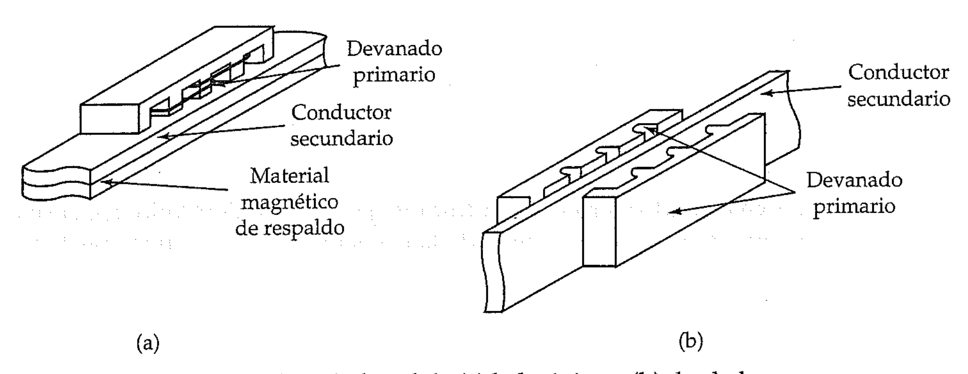


Figura 12.22. Motores de inducción lineal de **(a)** lado único y **(b)** dos lados.

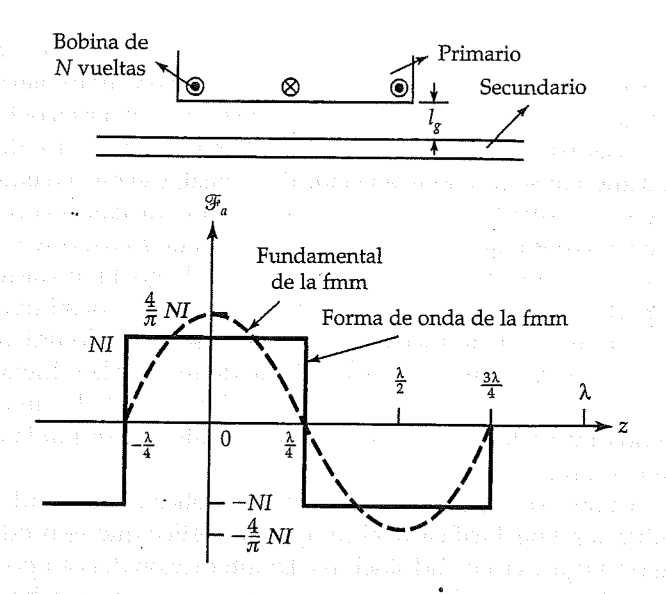


Figura 12.23. Esquema de un motor de inducción lineal y su forma de onda de la fmm.

donde k_w es el factor del devanado, i_a es el valor instantáneo de la corriente fundamental en la fase a, λ es la longitud de onda del campo (en esencia, es el paso del devanado), n es el número de periodos en toda la longitud del motor y z es un lugar arbitrario en el motor lineal. Cada devanado de fase está desplazado de los demás en una distancia igual a $\lambda/3$ y está excitado por un suministro trifásico equilibrado con frecuencia angular ω. Por tanto, la fmm neta en el motor consiste solamente en una componente de onda que viaja hacia delante, según lo expresa

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{3}{2} F_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \qquad (12.7)$$

donde

$$F_m = \frac{2}{n\pi} k_w N I_m \qquad (12.8)$$

La velocidad síncrona de la fmm viajera puede determinarse si se establece el argumento de la función coseno de la ecuación 12.7 como una constante K

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z = K \qquad (12.9)$$

y luego se deriva la ecuación 12.9 respecto a t para obtener v_s, como

$$v_s = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} \tag{12.10}$$

o

$$v_s = \lambda f \tag{12.11}$$

donde f es la frecuencia de operación del suministro. La ecuación 12.11 también puede expresarse en términos del paso polar τ como sigue:

$$v_s = 2\tau f \tag{12.12}$$

Ambas ecuaciones, la 12.11 y la 12.12, indican que la velocidad síncrona es independiente del número de polos en el devanado primario. Además, el número de polos no debe ser necesariamente un número par.

De manera semejante a los motores de inducción giratorios, el deslizamiento de un motor de inducción lineal se define como sigue:

$$s = \frac{v_s - v_m}{v_s} \tag{12.13}$$

donde v_m es la velocidad del motor.

La potencia y el empuje en un motor de inducción lineal pueden calcularse utilizando el mismo circuito equivalente empleado en su similar giratorio. Por consiguiente, la potencia en el entrehierro, P_g, es

$$P_g = 3I_2^2 \frac{r_2}{s} \tag{12.14}$$

la potencia desarrollada, P_d, es

$$P_d = (1 - s)P_g \tag{12.15}$$

y el empuje desarrollado, F_d, es

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{P_d}{v_m} \\ &= \frac{P_g}{v_s} = 3I_2^2 \frac{r_2}{sv_s} \end{aligned} \tag{12.16}$$

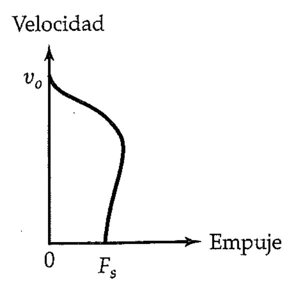


Figura 12.24. Velocidad típica versus la característica de empuje de un motor de inducción lineal.

La característica velocidad-par de un motor de inducción convencional equivale a la característica velocidad-empuje de un motor de inducción lineal, según se indica en la figura 12.24. La velocidad de un motor de inducción lineal disminuye rápidamente con el incremento del empuje, como puede observarse en esa figura. Por ello, es frecuente que estos motores operen con deslizamiento bajo, lo cual conduce a una eficiencia relativamente baja.

Un motor de inducción lineal provoca un fenómeno conocido como *efectos de extremo* a causa de su construcción de extremos abiertos. Esos efectos se clasifican en estáticos y dinámicos. El efecto extremo estático ocurre debido a la geometría asimétrica del primario. En este caso, las inductancias mutuas de los devanados de fase no son iguales entre sí. Esto ocasiona la distribución asimétrica del flujo en la región del entrehierro y da lugar a voltajes inducidos desiguales en los devanados de fase. El efecto de extremo dinámico ocurre como resultado del movimiento relativo del lado primario respecto al secundario. A medida que el primario se mueve sobre el secundario, en cada instante un nuevo conductor secundario se ubica bajo el borde delantero del primario, mientras que otro conductor secundario abandona el borde posterior del primario. El conductor que llega bajo el borde delantero se opone al flujo magnético en el entrehierro, en tanto que el conductor que abandona el borde posterior trata de sostener el flujo. Por tanto, la distribución del flujo se distorsiona. Es más débil en la región del borde delantero en comparación con la región del borde posterior. Aún más, el conductor que deja el borde posterior, a pesar de que todavía conduce la corriente y contribuye a las pérdidas, no contribuye al empuje. En consecuencia, las pérdidas incrementadas en el secundario reducen la eficiencia del motor.

Ejemplo 12.3

El paso polar de un motor de inducción lineal es de 0.5 m y la frecuencia del voltaje aplicado trifásico es de 60 Hz. La velocidad del lado primario del motor es de 200 km/h, y el empuje desarrollado es de 100 kN. Calcule la potencia desarrollada por el motor y la pérdida en el cobre en el lado secundario.

● Solución

La velocidad del motor es

$$v_m = \frac{200 \times 10^3}{3\,600} = 55.55 \text{ m/s}$$

La potencia desarrollada es

$$P_d = F_d v_m = 100 \times 10^3 \times 55.55 = 5\,555 \times 10^3 \text{ W}$$
$$P_d = 5\,555 \text{ kW}$$

La velocidad síncrona del motor es

$$V_s = 2\tau f = 2 \times 0.5 \times 60 = 60 \text{ m/s}$$

El deslizamiento para esta condición de operación es

$$s = \frac{v_s - v_m}{v_s} = \frac{60 - 55.55}{60} = 0.074$$

La pérdida en el cobre en el lado secundario es

$$P_{cos} = 3I_2^2 r_2 = F_d s v_s = 100 \times 10^3 \times 0.074 \times 60 = 444\,000 \text{ W}$$

o $P_{cos} = 444$ kW

■

Ejercicios

12.3. Un motor de inducción lineal con un paso polar de 50 cm se usa en un tranvía que viaja una distancia de 10 km. Se ha determinado que la resistencia y la corriente del lado secundario referidas al primario son de 4 Ω y de 500 A, respectivamente. Calcule el empuje desarrollado por el motor cuando el deslizamiento es de 25% trabajando a 60 Hz.

12.4. Un motor de inducción lineal de 660 V (línea) y 50 Hz impulsa un vehículo con deslizamiento de 20%. El motor tiene cinco polos y el paso polar es de 30 cm. Los parámetros de su circuito equivalente son:
Lado primario: $r_1 = 0.15\ \Omega, x_1 = 0.5\ \Omega$
Lado secundario: $r_2 = 0.3\ \Omega,\ x_2 = 0.3\ \Omega$
Reactancia de magnetización: $X_m = 3\ \Omega$
Calcule *a*) la velocidad síncrona, *b*) la potencia entregada a la carga, *c*) el empuje, *d*) la corriente de entrada, y *e*) el factor de potencia. Desprecie las pérdidas en el núcleo.

Resumen

Los inventos recientes en el área de la tecnología electrónica de potencia y de los sistemas de control digitales han facilitado el uso de motores de propósito especial a fin de controlar con exactitud la velocidad, la posición o ambas. Los motores de propósito especial estudiados en este capítulo son los de imanes permanentes (PM), los de pasos, los de reluctancia conmutada, los de cc sin escobillas y los de inducción lineales. Estos motores se encuentran en una amplia variedad de aplicaciones que van desde los equipos periféricos para computadoras hasta los medios de transporte terrestre de alta velocidad, así como en el control de procesos.

Los motores tipo PM funcionan como los motores de cc con excitación independiente, salvo que no tienen un devanado de campo. En lugar de ello, un motor tipo PM tiene imanes permanentes para establecer el campo magnético necesario para la conversión de energía electromecánica. Sin embargo, debe prestarse atención especial a fin de no desmagnetizar los imanes al exceder su fuerza coercitiva debido a la reacción de la armadura.

Un motor de pasos es un dispositivo motriz incremental usado ampliamente en los equipos periféricos para computadoras. Su rotación se rige por el número de pulsos aplicados al devanado del estator. Por tanto, para su operación no se requieren lazos de retroalimentación o sensores. La respuesta de paso de un motor de pasos puede ser oscilatoria. Los tres tipos de motores de pasos son: de reluctancia variable, de imanes permanentes e híbridos.

Un motor de reluctancia conmutada opera en forma similar a un motor de pasos de reluctancia variable. Sin embargo, un sensor detecta con exactitud la posición del rotor para mantener la temporización precisa de los devanados de fase para una condición de operación específica. Los motores de reluctancia conmutada tienen extensa aplicación donde tradicionalmente se han empleado los motores de ca o de cc.

Los motores de cc sin escobillas no tienen las desventajas de los motores de cc convencionales porque carecen del conjunto conmutador-escobillas. Por ello, sus características de rendimiento son muy similares a las de un motor shunt de cc convencional. La construcción de un motor de cc sin escobillas es similar a la de un motor de pasos tipo PM. No obstante, en un motor de cc sin escobillas la posición del rotor se detecta con exactitud por medio de un sensor a fin de establecer la temporización adecuada para la conmutación de los devanados del estator. Para detectar la posición del rotor en un motor de cc sin escobillas se usan el efecto Hall o los dispositivos optoelectrónicos.

Un motor de histéresis es un motor síncrono que usa la propiedad de histéresis de los materiales magnéticos para desarrollar el par. El par desarrollado por un motor de histéresis es inherentemente mayor a cualquier velocidad distinta de la síncrona. En consecuencia, el par de arranque nunca es un problema para un motor de histéresis.

Aun cuando para cada tipo de máquina rotatoria puede encontrarse su contraparte lineal, el motor de inducción lineal es el único que cubre un espectro amplio de aplicaciones, como el transporte terrestre de alta velocidad, bandas transportadoras y puertas deslizantes. Un motor de inducción lineal tiene dos lados, uno primario y otro secundario. El primario consta de un devanado trifásico y un núcleo magnético;

el secundario es una placa metálica o bien un devanado trifásico arrollado alrededor de un núcleo magnético. Para el transporte terrestre de alta velocidad se utilizan un primario corto (el vehículo) y un secundario largo (la vía). La velocidad síncrona v_s puede calcularse con $v_s = 2\tau f$, donde τ es el paso polar (m) y f es la frecuencia (Hz) del voltaje trifásico aplicado. Por otro lado, el empuje desarrollado es $F_d = P_d/v_m$, donde P_d(W) es la potencia desarrollada y v_m (m/s) es la velocidad del motor.

Preguntas de repaso

12.1. ¿Por qué es mayor la eficiencia de un motor tipo PM que la de un motor de cc devanado?
12.2. ¿Por qué decrece la densidad útil de flujo magnético en un motor tipo PM mientras trabaja con carga?
12.3. ¿En qué condiciones puede desmagnetizarse por completo un motor tipo PM?
12.4. ¿Qué es la línea de retroceso en un motor tipo PM?
12.5. ¿Cómo afecta la temperatura la operación de un motor tipo PM?
12.6. ¿Cómo opera un motor de pasos?
12.7. ¿Cuáles son los diferentes tipos de motores de pasos?
12.8. ¿Cuál es la expresión para el ángulo de paso de un motor de pasos de reluctancia variable?
12.9. ¿Cuál es la diferencia básica entre un motor tipo PM y uno de pasos de reluctancia variable?
12.10. ¿Cuál es la diferencia entre un motor de pasos de reluctancia variable y uno de reluctancia conmutada?
12.11. ¿En qué tipo de aplicaciones se usa un motor de reluctancia conmutada?
12.12. ¿Cuál es la diferencia entre el motor de pasos tipo PM y el de cc sin escobillas?
12.13. ¿Cómo varía la velocidad en un motor de cc sin escobillas con la variación del par?
12.14. Explique el principio de operación de un motor de histéresis.
12.15. ¿Qué es par de histéresis?
12.16. ¿Un motor de histéresis es un motor síncrono?
12.17. ¿Cómo opera un motor de inducción lineal?
12.18. ¿Cómo se expresa la velocidad síncrona en un motor lineal de inducción?
12.19. ¿Cómo varía el deslizamiento como función del empuje en un motor de inducción lineal?
12.20. ¿Puede sostenerse un campo viajero en retroceso en un motor de inducción lineal trifásico? Exponga sus razones.

Problemas

12.1. Un motor tipo PM de cc, de 20 V, desarrolla un par de 1 N • m al voltaje especificado. El flujo magnético en el motor es de 2 mWb. La resistencia de la armadura es de 0.93 Ω y la constante del motor es de 95. Calcule su velocidad de operación. Desprecie las pérdidas por rotación.

12.2. ¿Cuál es la corriente de la armadura del motor del problema 12.1 en condición de rotor fijo?

12.3. Calcule la magnitud del voltaje aplicado cuando el motor del problema 12.1 desarrolla un par de 10 N • m en condición de rotor fijo.

12.4. Un motor tipo PM de cc, de 100 V, opera a 1 200 rpm y al voltaje especificado. El flujo por polo debido a los imanes es de 1.5 mWb y la resistencia de la armadura de 0.7 Ω. Determine el par desarrollado si la constante del motor es de 82. Desprecie las pérdidas por rotación.

12.5. Un motor tipo PM bipolar, de 12 V fabricado con imanes de cerámica impulsa una carga de 0.134 hp con una eficiencia de 54%. La velocidad ideal sin carga del motor es de 800 rpm y la resistencia de la armadura es de 2 Ω. Determine su línea de operación si la longitud polar y el radio promedio son 35 mm y 25 mm, respectivamente. La constante del motor es de 75 y todas las pérdidas se suponen despreciables, excepto la del cobre. En la figura 2.28 se presentá la curva de desmagnetización.

12.6. Determine el rendimiento del motor del problema 12.5 si se sustituyen con imanes de tierras raras (principalmente samario) los imanes originales de cerámica, sin que cambien las dimensiones del motor.

12.7. Determine el flujo magnético en un motor tipo PM de 120 V y 1 hp que opera a una velocidad de 1 500 rpm. La constante del motor es de 85, la resistencia de la armadura es de 0.7 Ω y las pérdidas por rotación son de 50 W.

12.8. Un motor tipo PM de cc, de 120 V opera a una velocidad de 400 rad/s, sin carga. Si la resistencia del circuito de la armadura es de 1.3 Ω, determine la velocidad del motor cuando la carga exige 5 N • m a 50 V. Trace la característica velocidad-par para operaciones a 50 y 100 V. Suponga que el motor mantiene un flujo magnético constante sin pérdidas por rotación.

12.9. Un motor de inducción lineal trifásico tiene un paso polar de 1 m. Calcule la velocidad de la onda viajera de fmm resultante si el motor se excita con un suministro trifásico que tiene una frecuencia de 50 Hz.

12.10. La velocidad síncrona, frecuencia de operación y valor pico de corriente de un motor lineal de inducción son 10 m/s, 60 Hz y 10 A, respectivamente. Determine la onda viajera de fmm neta si el número de vueltas por fase es de 300, con un factor de devanado de 0.9. Suponga que el número de periodos en la longitud del motor es de 2.

12.11. Un motor de inducción lineal impulsa una banda transportadora a una velocidad de 20 km/h con deslizamiento de 20% a 60 Hz, y desarrolla un empuje de 200 N. *a*) Determine el paso polar del motor. *b*) Calcule la potencia desarrollada por el motor. *c*) Calcule la magnitud de la pérdida en el cobre en el lado secundario.

12.12. Un motor lineal de inducción de 2 300 V, 60 Hz y 10 MW tiene un factor de potencia de 0.8 en atraso trabajando con un deslizamiento de 30% y una eficiencia de 72%. El paso polar del motor es de 60 cm. Si la corriente de magnetización es 15% de la corriente aplicada y se encuentra atrasada respecto del voltaje aplicado en un ángulo de 88°, determine el empuje desarrollado por el motor y la resistencia del devanado secundario referido al primario. Desprecie las pérdidas en el núcleo, por fricción y por viento.

Apéndice A

Sistema de unidades

Aunque el Sistema Internacional de unidades (SI) se utiliza cada vez más en todas las áreas de la ingeniería eléctrica, las unidades del sistema inglés aún se emplean mucho para estudiar las máquinas eléctricas. Por ejemplo, es más fácil decir que la velocidad de un motor es de 1 500 rpm (revoluciones por minuto) que decir 157 rad/s (radianes por segundo). En forma similar, de un motor de 0.25 hp (caballos de fuerza) rara vez se habla como de uno de 187 W (watts). Sin embargo, en este libro el grueso de las ecuaciones se expresan en unidades del SI, y a veces es necesario convertirlas en unidades de otro sistema. En el SI las unidades de longitud, masa y tiempo son el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s), respectivamente. La unidad básica de carga se expresa en coulombs (C). La corriente es la tasa de cambio de la carga respecto al tiempo y se expresa en amperes (A). Así, 1 A = 1 C/s. Otras unidades fundamentales son las de temperatura, grados kelvin (K), y las de intensidad luminosa, candelas (cd). En el sistema inglés, la fuerza se expresa en libras, la longitud en pulgadas o pies, el par en pies-libras y el tiempo en segundos. La conversión de una unidad en otra se indica en la tabla A.1.

En la tabla A.2 se indican las unidades para otras cantidades que se mencionan en el libro. Esas unidades se conocen como *derivadas* porque pueden expresarse en términos de las unidades fundamentales. Por ejemplo, la unidad fundamental de fuerza es el watt (W), que, como se explicó, es la tasa a la que se realiza un trabajo o se gasta energía. Por tanto, el watt se define como 1 J/s. Por otro lado, el joule (J) es la unidad fundamental de trabajo. Un joule es el trabajo que realiza una fuerza constante de 1 newton (N) aplicada en la distancia de 1 metro (m). Por tanto, 1 joule es equivalente a 1 newton-metro (N • m). Sobre todo, 1 newton es la fuerza requerida para acelerar una masa de 1 kilogramo a razón de 1 metro por segundo, cada segundo, es decir, $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$. Observe que el newton se expresa en términos de las unidades fundamentales. Por lo anterior, es posible expresar joules y watts en términos de las unidades fundamentales.

Tabla A.1. Factores de conversión de unidades.

De	*Multiplicar por*	*Para obtener*
gilbert	0.79577	ampere vueltas (A • t)
ampere vueltas/cm	2.54	ampere vueltas/pulg
ampere vueltas/pulg	39.37	ampere vueltas/metro
oersted	79.577	ampere vueltas/metro
líneas (maxwells)	10^{-8}	webers (Wb)
líneas/cm^2 (gauss)	6.4516	líneas/$pulg^2$
líneas/$pulg^2$	0.155×10^{-4}	webers/m^2 (T)
webers/m^2 (tesla)	6.4516×10^4	líneas/$pulg^2$
webers/m^2	10^4	líneas/cm^2
pulgada	2.54	centímetro (cm)
pie	30.48	cm
metro	100	cm
pulgada cuadrada	6.4516	cm cuadrado
pulgada cuadrada	1.27324×10^6	millas circulares
onza	28.35	gramos
libras	0.4536	kilogramos
libras-fuerza	4.4482	newton
onzas-fuerza	0.27801	newton
newton	3.597	onza-fuerza
newton-metro	141.62	onza-pulgada
newton-metro	0.73757	libra-pie
revoluciones/minuto	$2\pi/60$	radianes/segundo
caballo de fuerza	746	watts
watts/libra	2.205	watts/kilogramo

Tabla A.2. Unidades derivadas para algunas cantidades.

Símbolo	*Cantidad*	*Unidad*	*Abreviatura*
Y	admitancia	siemens	S
ω	frecuencia angular	radián/segundo	rad/s
C	capacitancia	faradio	F
Q	carga	coulomb	C
ρ	densidad de carga	coulomb/metro^3	C/m^3
G	conductancia	siemens	S
σ	conductividad	siemens/metro	S/m
J	densidad de corriente	ampere/metro^2	A/m^2
ϵ_r	constante dieléctrica	adimensional	—
E	intensidad de campo eléctrico	volt/metro	V/m
D	densidad de flujo eléctrico	coulomb/metro^2	C/m^2
V	potencial eléctrico	volt	V
E	fuerza electromotriz	volt	V
W	energía	joule	J
F	fuerza	newton	N
f	frecuencia	hertz	Hz
Z, z	impedancia	ohm	Ω
L	inductancia	henry	H
Φ	flujo magnético	weber	Wb
B	densidad de flujo magnético	weber/metro^2	Wb/m^2
		tesla	T
H	intensidad de campo magnético	ampere-vuelta/metro	A • t/m
$\mathcal{F}$	fuerza magnetomotriz	ampere-vuelta	A • t
μ	permeabilidad	henry/metro	H/m
ϵ	permitividad	faradio/metro	F/m
P	potencia	watt	W
X, x	reactancia	ohm	Ω
$\mathcal{R}$	reluctancia	henry^{-1}	H^{-1}
R, r	resistencia	ohm	Ω
B	susceptancia	siemens	S
T	par	newton-metro	N • m
v	velocidad	metro/segundo	m/s
V, v	voltaje	volt	V
W	trabajo (energía)	joule	J

Apéndice B

La transformación de Laplace

La transformación de Laplace de una función de variable única $f(t)$ se define como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt \qquad \text{(B.1)}$$

donde $s = \sigma + j\omega$ es un número complejo. A fin de incluir la acción de conmutación o una función de impulso unitario en $t = 0$, se toma el límite más bajo generalmente como 0^-.

Para obtener la función $f(t)$ a partir de $F(s)$ puede aplicarse la transformación inversa de Laplace definida como

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\, ds \qquad \text{(B.2)}$$

donde $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ se lee como "transformación inversa de Laplace de $F(s)$".

La integración de la ecuación B.2 no es fácil, ya que se requiere el dominio de las funciones de variables complejas y, por tanto, se evita. Como hay una correlación uno a uno entre $f(t)$ y $F(s)$, se usa una tabla de "selección" para las transformadas de Laplace. Por tal razón, en la tabla B.1 se indican algunas transformadas de Laplace muy conocidas.

Tabla B.1. Unidades derivadas para algunas cantidades.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta'(t)$	s	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$(t-a)u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s^2}$
$te^{-at}u(t)$	$\left(\frac{1}{s+a}\right)^2$	$tu(t-a)$	$e^{-as}\left(\frac{a}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$
$e^{-at}t^n u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cos βt	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
sen βt	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$	e^{-at}sen ωt	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-)$	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0^-)-\frac{df(0^-)}{dt}$
$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{F(s)}{s}$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$

Bibliografía

Brown, D. y E. P. Hamilton III, *Electromechanical Energy Conversion*, Macmillan, Nueva York, 1984.

Chapman, S. J., *Electric Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985.

Del Toro, V., *Electric Machines and Power Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1985.

El-Hawary, M. E., *Electric Machines with Power Electronic Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1986.

Fitzgerald, A. E., C. Kingsley y S. D. Umans, *Electric Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1983.

Guru, B. S. y H. R. Hiziroglu, *Electromagnetic Field Theory Fundamentals*, PWS Publishing Co., Boston, 1998.

Lindsay, J. F. y M. H. Rashid, *Electromechanics and Electric Machinery*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1986.

Matsch, L. W. y J. D. Morgan, *Electromagnetic and Electromechanical Machines*, Harper & Row, Nueva York, 1986.

McPherson, G., *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1981.

Nasar, S. A. y L. E. Unnewehr, *Electromechanics and Electric Machines*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1983.

Say, M. G., *Alternating Current Machines*, Pitmann, Nueva York, 1976.

Slemon, G. R. y A. Straughen, *Electric Machines*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.

Índice analítico

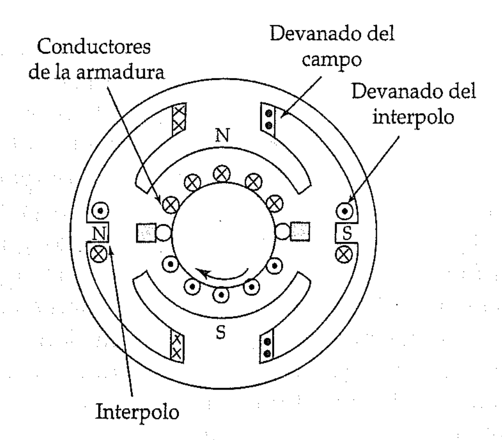


Figura 5.16. Devanado de los interpolos de un generador de cc.

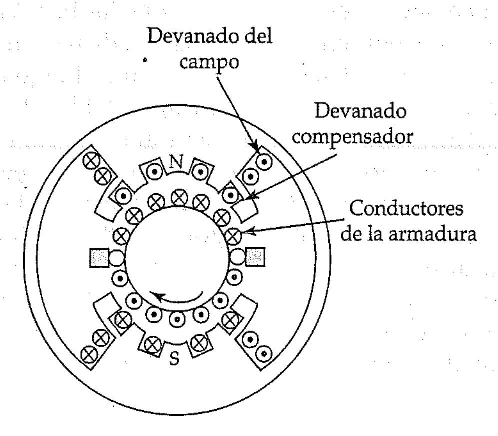


Figura 5.17. Devanado compensador de un generador de cc.

tuados en las ranuras poco profundas cortadas en las caras polares, como se muestra en la figura 5.17. De nuevo, el flujo que produce el devanado de compensación se hace igual y opuesto al que establece la fmm de la armadura.

5.9. Tipos de generadores de cc

Con base en el método de excitación, los generadores de cc pueden dividirse en dos categorías: con excitación independiente y autoexcitados. Un generador tipo PM puede considerarse con excitación independiente y con flujo magnético constante.

La corriente del campo (excitación) en un generador con excitación independiente la suministra una fuente externa independiente. En cambio, un generador auto-

fmm de la armadura también es una línea recta bajo el polo. Si el arco polar es menor que 180° eléctricos, el flujo en la armadura tiene una curva con forma de silla de montar en la región interpolar, producto de su reluctancia más elevada. En la figura 5.15*c* se muestra la distribución resultante (total) del flujo. Es evidente la distorsión en la distribución del flujo con carga en comparación con la distribución del flujo en condiciones sin carga. Si la saturación es baja, la disminución en el flujo en una mitad del polo va acompañada de un aumento igual en el flujo en la otra mitad. Por tanto, el flujo neto por polo es el mismo con carga o sin ella. Además, si los polos ya estuvieran cercanos al punto de saturación en condición sin carga, el incremento en el flujo es más pequeño que la disminución, como lo señala la línea punteada en la figura 5.15*c*. En ese caso, hay una pérdida neta en el flujo total. Para una velocidad constante de la armadura, la fem inducida en el devanado de esta última disminuye por el decrecimiento en el flujo cuando la armadura está en condiciones de carga.

Como ya se mencionó, el plano neutro en el generador se mueve en la dirección de rotación mientras la armadura se encuentre en condiciones de carga. Debido a que la zona neutral es la ideal para que las bobinas entren en conmutación, las escobillas deben moverse en congruencia con dicha zona. De no ser así, la conmutación forzada origina exceso de chispas. Conforme el flujo en la armadura varía con la carga, también lo hace su efecto en el flujo establecido por el devanado del campo. Luego, el desplazamiento del plano neutral es función de la corriente en la armadura.

La reacción en la armadura tiene un efecto desmagnetizador en la máquina. La reducción del flujo debido a la reacción en la armadura sugiere una pérdida significativa en la fmm aplicada por polo de la máquina. En máquinas grandes, la reacción de la armadura puede tener un efecto devastador en su rendimiento en condiciones de plena carga. Por consiguiente, deben desarrollarse técnicas para contrarrestar su efecto desmagnetizador. A continuación se resumen algunas medidas que se utilizan para combatir la reacción de la armadura:

1. Las escobillas pueden avanzarse de su posición neutral sin carga (eje neutro geométrico) al nuevo plano neutro con carga. Ésta es la medida menos cara, pero sólo es útil para generadores con carga constante.

2. Los *interpolos*, o *polos de conmutación* como a veces se les denomina, son polos estrechos que pueden colocarse en la región interpolar centrados a lo largo del eje neutro mecánico del generador. Los devanados interpolares se conectan permanentemente en serie con la armadura para darles efectividad en condiciones de carga variable. Los interpolos producen flujo que se opone al flujo debido a la fmm de la armadura. Cuando el interpolo se diseña en forma apropiada, el flujo neto a lo largo del eje neutro geométrico puede reducirse a cero para cualquier condición de carga. Debido a que los devanados interpolares conducen corriente de la armadura, sólo se precisan unas cuantas vueltas de conductor comparativamente grueso para proporcionar la fmm interpolar necesaria. En la figura 5.16 se muestra la distribución del flujo en la armadura con interpolos.

3. Otro método para anular el efecto de la reacción de la armadura es mediante *devanados de compensación*, que también llevan corriente de la armadura y están si-